中学学科能力训练·备考教程

高考3+X 数学

ZHUANTI ZONGJIE

专题总结与综合能力训练

YU ZONGHE NENGLI XUNLIAN

唐国庆/主编

本书收入2001年
各类最新高考真题及详解

大连理工大学出版社

中学学科能力训练·备考教程

数学

高考3+X

专题总结与综合能力训练

ZHUANTI ZONGJIE YU ZONGHE NENGLI XUNLIAN

主　编：唐国庆
副主编：黄仁寿
编　者：黄仁寿　易兰贵
　　　　吴有根　张明贵
　　　　贺功保

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考3+X专题总结与综合能力训练·数学/唐国庆主编.—大连:大连理工大学出版社,2001.8

ISBN 7-5611-1900-3

Ⅰ.高… Ⅱ.唐… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

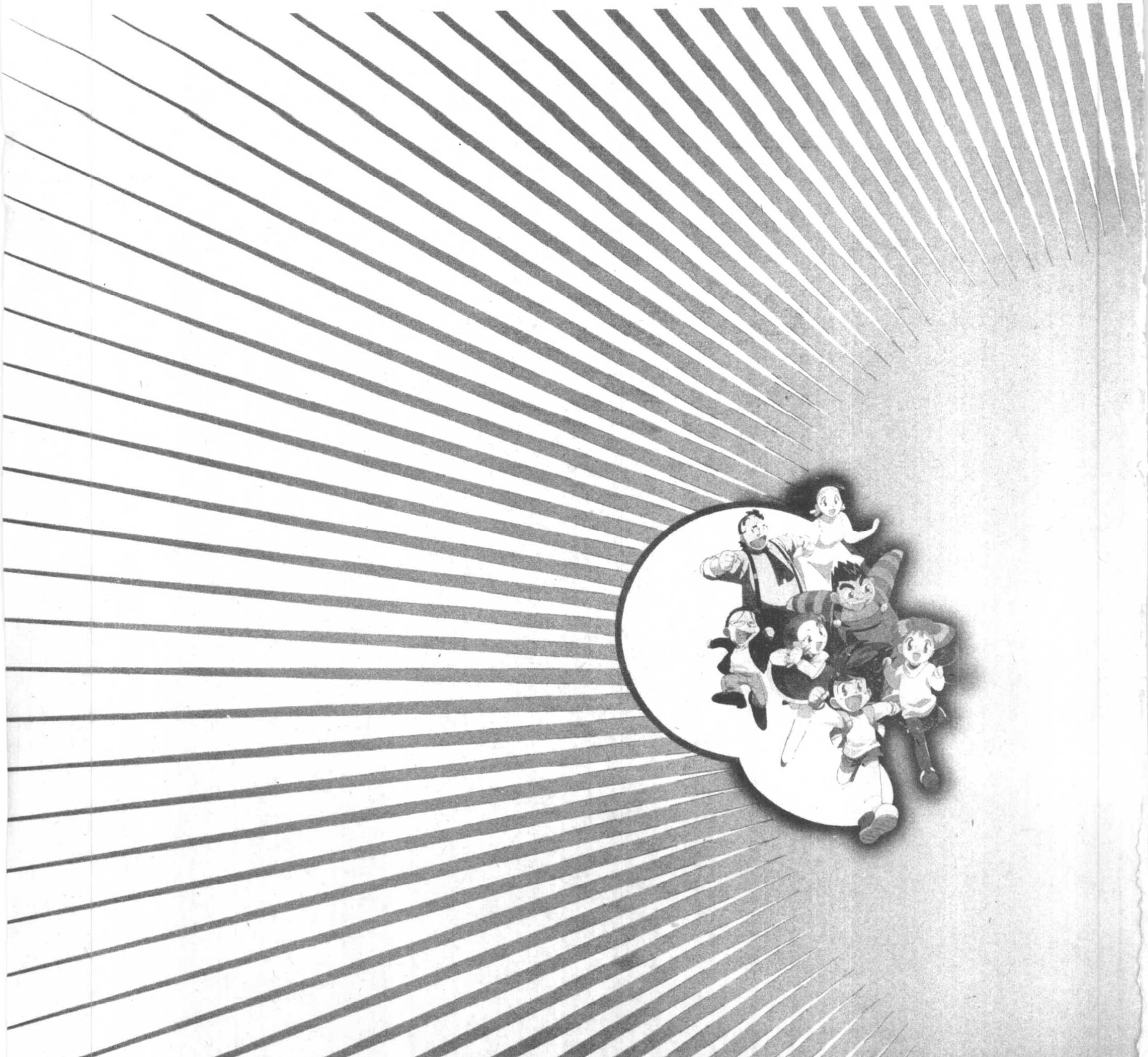
中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第05924号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码 116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:787毫米×1092毫米 1/16 字数:668千字 印张:20.75
印数:1—20000册
2001年8月第1版 2001年8月第1次印刷

责任编辑:于明珍 责任校对:张伟民
封面设计:王福刚 版式设计:娄 华

定价:21.00元



前　言

21 世纪是知识趋于一统、人才竞争愈烈的世纪。随着“3+X”高考制度的全面推进，如何在梳理知识、培养能力的基础上加强专题性研究，以突出学科的主干知识，强化深层能力，熟练方法技巧，进行更科学有效的学习，是摆在广大教育工作者，尤其是高中毕业班教师及学生面前亟待解决的重要课题。

为了适应教育体制和考试制度改革的新形势，帮助大家更系统深入地搞好考前复习，使迎考应试工作真正步入一个新台阶，我们特组织了一批长期拼搏在高考一线的资深教师，充分运用他们厚实的专业理论知识和丰富的复习备考经验，群策群力，深入研讨，精心编撰了这套《高考 3+X 专题总结与综合能力训练》丛书。

本丛书是专题研究类的综合性备考资料，与最新的教学大纲和考试大纲配套使用。内容紧扣《教纲》《考纲》，将学科知识归纳、高考考点解析、方法技巧传授和备考经验熔为一炉，既忠实于教材，更有拓展突破。编写时，我们力求知识归纳全面翔实，专题总结深入系统，吸取最新科研成果，紧跟高考考试改革步伐，从而突出了重点，突破了难点，具有严谨的科学性、丰富的知识性、鲜明的应试性和灵活的技巧性等特点。

丛书依据最新考试大纲，以考点为单位分若干专题编写。对于每个专题再分三个层面，即设置“考点知识网络建构”、“能力高层发展”和“综合能力训练”三个版块深入展开。

◆第一层面：考点知识网络建构

针对每一专题，提炼归纳考点知识网络，揭示本专题知识点、重点难点的内在联系，帮助考生理清知识脉络，在头脑中形成一个清晰的知识点框架，打下扎实的理论基础。

◆第二层面：能力高层发展

在梳理本专题知识点的基础上，归纳总结本专题知识点在高考中出现的题型、题量和难易程度，以及命题背景、题型特征、能力要求和今后考试的趋势等，同时针对本专题涉及的跨学科综合题给予详细的分析与介绍；本栏目还通过列举、分析大量的高考题或典型题，尤其是精选了2000年、2001年的全国、上海和广东高考试题，具体指明考查内容、解题思路和误区点津，随题介绍解题技巧，并突出对每道题的探讨性过程，帮助考生进一步深入理解知识点，拓展解题思路，掌握解题技巧，提高解题能力。

◆第三层面：综合能力训练

在前两个层面的总结、复习、提高基础上，有计划、有针对性地进行实战演练，即根据国家最新高考要求及命题走向，针对本专题内容和特色选择具有不同梯度和难度的典型训练题，帮助考生进行专题综合能力强化训练，提高备考应试水平。

我们相信，只要你能认真、扎实地针对每一专题按照以上三个层面做循序渐进的复习和训练，你就一定会获得成功。这也是我们编写者和出版者对你的祝愿！

目录

专题一
集合的知识及应用

考点知识网络建构

1.集合的有关概念

(1)一组对象的全体形成一个集合,集合里的各个对象叫做集合的元素。

(2)集合的元素有三大特征:确定性、互异性和无序性。

(3)集合的表示方法:列举法、描述法、图像法。

(4)不含任何元素的集合叫空集,记作 $\varnothing$。

(5)A 是 B 的子集,即任取 $x\in A$,总有 $x\in B$,记作 $A\subseteq B$;A 是 B 的真子集,即任取 $x\in A$,有 $x\in B$,但存在 $y\in B$ 且 $y\notin A$。

空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集。

(6)两个集合相等:若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$。

(7)两个重要关系:元素和集合的关系是从属关系,用符号 $\in$ 与 $\notin$ 表示;集合与集合的关系是包含关系,用符号 $\subseteq$,$\subset$ 或 $\not\subseteq$,$\not\subset$ 表示。

(8)由集合元素的三要素,知从 n 个元素的集合 A 中取 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 个元素构成集合 A 的 m 个元素的子集,这种子集的个数为 C_n^m。

进一步知集合 A 的不同子集个数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

2.集合的运算

(1)交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$;

(2)并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$;

(3)补集:$\overline{A}=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}$,其中 I 称为全集,$A\subseteq I$。

集合的并集、交集、补集由下面的式子联系着:

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

(4)用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数,由集合运算的概念(或用图形帮助分析),知

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

能力高层发展

【高考考点分析】

集合的知识是一套严谨的数学语言,贯穿于高中数学教学的始终。近年来高考中至少有一道选择题考查该内容,虽然难度不大,但体现了集合的知识在中学数学中的基础性和工具性。

【高考题型回放】

1.集合的概念性问题

【例1】 **1994年全国高考试题** 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$,集合 $A=\{0,1,2,3\}$,集合 $B=\{2,3,4\}$,则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$(　　)。

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

➡考查内容 集合的并、交、补等运算。

➡解题思路 易知 $\overline{A}=\{4\}$,$\overline{B}=\{0,1\}$,故 $\overline{A}\cup\overline{B}=\{4\}\cup\{0,1\}=\{0,1,4\}$。故选C。

【例2】 **1997年上海高考试题** 设全集 $I=\mathbf{R}$,$M=\{x\mid x\leqslant 1+\sqrt{2},x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{1,2,3,4\}$,则 $\overline{M}\cap N=$(　　)。

A. $\{4\}$　　B. $\{3,4\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

➡考查内容 集合的概念和并、交、补运算。

➡解题过程 由条件知 $\overline{M}=\{x\mid x>1+\sqrt{2},x\in\mathbf{R}\}$,故 $\overline{M}\cap N=\{x\mid x>1+\sqrt{2},x\in\mathbf{R}\}\cap\{1,2,3,4\}=\{3,4\}$,故选B。

【例3】 已知集合 $A=\{-1,2\}$,$B=\{x\mid mx+1=0\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 m 的取值的集合是(　　)。

A. $\{-1,2\}$　　B. $\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$　　C. $\left\{-\frac{1}{2},0,1\right\}$　　D. $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$

➡考查内容 集合运算的灵活运用。

➡解题思路 由 $A\cup B=A$,知 $B\subseteq A$,即 B 中元素 $x=-\frac{1}{m}\in A$,故

当 $B=\varnothing$ 时,$m=0$;

当 $-\frac{1}{m}=-1$ 时,$m=1$;

当 $-\frac{1}{m}=2$ 时,$m=-\frac{1}{2}$。

故 m 的取值的集合是 $\{-\frac{1}{2},0,1\}$,故选C。

【例4】 已知集合 $M=\{x\mid x^2-x+2>0\}$,N 为函数 $y=\ln|x|$ 的定义域,$P=\{x\mid y=\sqrt{2|x|+x}$,则 M,N,P 的关系是(　　)。

A. $M\supset N=P$　　B. $M\subset N=P$　　C. $M\supset N\supset P$　　D. $M=P\supset N$

➡考查内容 集合的应用与集合的包含关系。

➡解题思路 M 为不等式 $x^2-x+2>0$ 的解集,故 $M=\mathbf{R}$;$\ln|x|$ 的定义域为 $x\neq 0$,故 $N=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$;P 为函数 $y=\sqrt{2|x|+x}$ 的定义域,故 $P=\mathbf{R}$。综上可知,$N\subset P=M$,故选D。

【例5】 已知集合 $A=\{a,b\}$,集合 $B=\{x\mid x\in A\}$,集合 $C=\{x\mid x\subseteq A\}$,则集合 B 和 C 的关系是______。

➡考查内容 元素和集合的关系及集合和集合的关系。

➡解题思路 $B=\{x\mid x\in A\}=\{a,b\}$。

$C=\{x\mid x\subseteq A\}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。故集合 B 是集合 C 的一个元素,因而 $B\in C$。填 $B\in C$。

➡误区点津 容易将 B 和 C 的关系理解为集合和集合的关系,从而错误作答 $B\subset C$。

【例6】 给出以下命题:① $\varnothing=\{x\mid x\neq x\}$;② $\varnothing\in\{\varnothing\}$;③ $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;④ $\varnothing\subset\{\varnothing\}$。其中正确命题的序号为______。

➡考查内容 空集的意义及空集和集合的关系。

➡解题思路 集合 $\{x\mid x\neq x\}$ 中不含任何元素,故①正确;$\{\varnothing\}$ 为非空集合,其元素为 $\varnothing$,故②正确;空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,故③④均正确。故应填①②③④。

【例7】 集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{z\mid z=ax^2-2x+4a,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围。

➡**考查内容**　集合关系的应用。

➡**解题思路**　先化简集合 A 和 B，再由 $A\subseteq B$ 列出 a 的不等式，求 a 的范围。

➡**解题过程**　由 $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geqslant 3$，知 $A=\{y|y\geqslant 3\}$。

当 $a=0$ 时，$B=\{z|z=-2x,x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$，因此 $A\subseteq B$；

当 $a\neq 0$ 时，$z=ax^2-2x+4a=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+4a-\frac{1}{a}$。若 $a<0$ 时，$B=\{z|z\leqslant 4a-\frac{1}{a},a<0\}$，显然与 $A\subseteq B$ 矛盾；若 $a>0$ 时，$B=\{z|z\geqslant 4a-\frac{1}{a},a>0\}$，要 $A\subseteq B$，只要 $\begin{cases}4a-\frac{1}{a}\leqslant 3\\ a>0\end{cases}$，由此解得 $0<a\leqslant 1$。

综上所述，使 $A\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围是 $[0,1]$。

➡**误区点津**　*由于含有参数 a，使集合 B 的构成变得复杂。分类讨论在分析集合 B 的构成方面起到了重要作用。此题再一次说明分类讨论这一数学思想的重要性。*

2.集合内容的渗透性和联系性

集合的内容作为一套数学语言，在数学的各部分有广泛的渗透性和联系性——数学的其他考点，通过集合语言的“包装”后，以集合问题的“面目”出现，表现出较强的综合性。

【例8】　1991年上海高考试题　关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$（其中 $a\in\mathbf{R}$）的解集依次记为 A 与 B。求使 $A\subseteq B$ 的取值范围。

➡**考查内容**　集合知识的应用，解一元二次不等式，解含绝对值的不等式。

➡**解题思路**　求两不等式的解集，也就是化简集合 A 和 B，然后对字母参数 a 进行讨论，找出使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围。

➡**解题过程**　由 $\left|x-\frac{1}{2}(a+1)^2\right|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$，得

$$-\frac{1}{2}(a-1)^2\leqslant x-\frac{1}{2}(a+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$$

即

$$2a\leqslant x\leqslant a^2+1$$

故

$$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$$

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，得

$$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$$

当 $3a+1\geqslant 2$，即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，得 $B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$。欲使 $A\subseteq B$，只要

$$\begin{cases}2\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$$

由此得

$$1\leqslant a\leqslant 3$$

当 $3a+1<2$，即 $a<\frac{1}{3}$ 时，得 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$，欲使 $A\subseteq B$，只要

$$\begin{cases}3a+1\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}$$

由此得

$$a=-1$$

综上可知，使 $A\subseteq B$ 的 a 的范围是 $\{a|1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$。

➡**误区点津**　*解一元二次不等式的过程中，因含有参数，故务必分类讨论。$a=-1$ 容易漏掉，须引起高度注意。*

【例9】　对点集 $A=\{(x,y)|x=m,y=-3m+2,m\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=n,y=a(n^2-n+1),n\in\mathbf{Z}\}$，求证：存在惟一正整数 a，使得 $A\cap B\neq\varnothing$。

➡**考查内容**　集合语言的综合运用，分析问题和解决问题的能力。

➡**解题思路**　先化简集合 A,B，再寻求 $A\cap B\neq\varnothing$ 的必要条件，最后在一个较小的范围内求满足条件的正整数 a 的值。

➡解题过程　$A=\{(x,y)|x=m,y=-3m+2,m\in\mathbf{Z}\}=\{(x,y)|y=-3x+2,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)|x=n,y=a(n^2-n+1),n\in\mathbf{Z}\}=\{(x,y)|y=a(x^2-x+1),x\in\mathbf{Z}\}$，$A\cap B\neq\varnothing$ 等价于关于 x,y 的方程组

$$\begin{cases}y=-3x+2 & ①\\ y=a(x^2-x+1) & ②\end{cases}$$

有整数解。两式联立得方程

$$ax^2-(a-3)x+a-2=0 \quad ③$$

问题又转化为③有整数解，其必要条件是 $\Delta=(a-3)^2-4a(a-2)\geqslant 0$。

由此解得
$$\frac{1}{3}(1-2\sqrt{7})\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}(1+2\sqrt{7}) \quad ④$$

易知，仅有正整数 $a=1,a=2$ 满足④，但 $a=1$ 时，$A\cap B=\varnothing$；$a=2$ 时，$A\cap B=\{(0,2)\}\neq\varnothing$。

故仅有惟一正整数 $a=2$ 满足 $A\cap B\neq\varnothing$。

➡误区点津　先据判断式 $\Delta\geqslant 0$ 探索正整数 a 的必要条件，再在一个较小的范围内讨论满足条件的 a 具有惟一性。这种化难为易的方法值得学习。

☞综合能力训练

一、选择题

1.已知全集 $I=\{0,-1,-2,-3,-4\}$，集合 $M=\{0,-1,-2\}$，$N=\{0,-3,-4\}$，则 $\overline{M}\cap N=$（　　）。

A.$\{0\}$　　B.$\{-3,-4\}$　　C.$\{-1,-2\}$　　D.$\varnothing$

2.设全集是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x|x\leqslant 1+\sqrt{2},x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，则 $\overline{M}\cap N$ 等于（　　）。

A.$\{4\}$　　B.$\{3,4\}$　　C.$\{2,3,4\}$　　D.$\{1,2,3,4\}$

3.已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$，$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为（　　）。

A.$x=3,y=-1$　　B.$(3,-1)$　　C.$\{3,-1\}$　　D.$\{(3,-1)\}$

4.设全集为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合 $\{x|f(x)g(x)=0\}$ 等于（　　）。

A.$\overline{M}\cap\overline{N}$　　B.$\overline{M}\cup\overline{N}$　　C.$M\cup\overline{N}$　　D.$\overline{M}\cup\overline{N}$

5.若全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}$ 是（　　）。

A.$\{2\}$　　B.$\{-1\}$　　C.$\{x|x\leqslant -1\}$　　D.$\varnothing$

二、填空题

6.设集合 $M=\{x|x-x^2\geqslant 0\}$，$N=\{x|x^2-2x+1\leqslant 0\}$，则 $M\cup N=$______。

7.已知全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x||x-a|<2\}$，$B=\{x||x-1|\geqslant 3\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围是______。

8.已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若 $A=B$，则数组 (x,y) 为______。

三、解答题

9.设集合 $M=\{x|2<x<3\}$，$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}}$，试判断 x 是否为集合 M 的元素。

10.已知 $M=\{(x,y)|y=x+\log_a m,a>0,a\neq 1\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2=2\}$，求使集合 $M\cap N=\varnothing$ 成立的实数 m 的集合。

11.已知全集 $I=\mathbf{R}$，集合

$A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right.\right\}$，$B=\{x|\log_3(x-a)<2\}$，问当 a 取什么值时下列各式分别成立？

(1)$A\subseteq B$；　　(2)$A\cap B\neq\varnothing$；　　(3)$A\cap B=\varnothing$。

12.设 $m\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)|y=-\sqrt{3}x+m\}$，$B=\{(x,y)|x=\cos\theta,y=\sin\theta,0<\theta<2\pi\}$，且 $A\cap B=\{(\cos\theta_1,\sin\theta_1),(\cos\theta_2,\sin\theta_2),\theta_1\neq\theta_2\}$，求 m 的取值范围。

【参考答案与提示】

一、1.B;　2.B;　3.D;　4.D;　5.B

二、6. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$;　7. $0<a<2$;　8. $(-1,-1)$

三、9. $x=\frac{1}{\log_3 3}+\frac{1}{\log_3 2}=\frac{1}{\log_2 3}+\log_2 3>2$,且 $1<\log_2 3<2$,故 $1<\log_2 3<2$,故 $x<3$,因而 $x\in M$

10. 由 $M\cap N=\varnothing$,知方程组

$$\begin{cases} y=x+\log_a m & ① \\ x^2+y^2=2 & ② \end{cases}$$

无解。由① ②联立消去 y 得关于 x 的一元二次方程 $x^2+(x+\log_a m)^2=2$,即

$$2x^2+2x\log_a m+\log_a^2 m-2=0 \quad ③$$

问题进一步转化为③无实根,由

$$\Delta=4\log_a^2 m-4\times 2(\log_a^2 m-2)<0$$

解得　$\log_a m>2$ 或 $\log_a m<-2$

当 $a>1$ 时,$0<m<a^{-2}$ 或 $m>a^2$

当 $0<a<1$ 时,$0<m<a^2$ 或 $m>a^{-2}$

综上可知,当 $a>1$ 时,m 的取值范围是 $\{x|0<x<a^{-2}$ 或 $m>a^2\}$;当 $0<a<1$ 时,m 的取值范围是 $\{x|0<x<a^2$ 或 $x>a^{-2}\}$

11. 易求得 $A=\{x|-2<x<3\}$,$B=\{x|a<x<9+a\}$

(1)要 $A\subseteq B$,即要 $\begin{cases} a\leqslant -2 \\ a+9\geqslant 3 \end{cases}$,即 $-6\leqslant a\leqslant -2$

(2)要 $A\cap B\neq\varnothing$,即要 $a+9>-2$ 或 $a<3$,即 $-11<a<3$

(3)要 $A\cap B=\varnothing$,即要 $a+9\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 3$,即 $a\leqslant -11$ 或 $a\geqslant 3$

12. $B=\{(x,y)|x^2+y^2=1$ 且 $x\neq 1\}$,由题意知,直线 $y=-\sqrt{3}x+m$ 与曲线 $x^2+y^2=1(x\neq 1)$有两个交点。

数形结合分析可知直线应位于以 $-\sqrt{3}$ 为斜率的切线之间,不包括过点(1,0)的那一条,故 $m\in(-2,2)$ 且 $m\neq\sqrt{3}$。

专题二

函数的三要素与反函数概念

考点知识网络建构

1.映射与函数

两个集合 A 和 B,如果存在一个对应法则 f,使得集合 A 中的任何元素在 B 中都有惟一的元素和它对应,则称 f 为集合 A 到集合 B 的映射,记为

$$f:A\longrightarrow B$$

集合 A 中的元素 a 对应于集合 B 中的元素 b,b 称为 a 的像,a 称为 b 的原像。

函数是一种特殊的映射。映射 $f:A\longrightarrow B$ 成为函数必须具备两个条件:

(1)集合 A,B 均是非空的数集合;

(2)集合 B 中的每一个元素都有原像。

2.映射与反函数

在映射的基础上定义了函数。其实,反函数也是在"存在映射"的基础上定义的。我们从分析求反函数的三个步骤入手探讨这种映射的特点。

第1步:求出原函数的定义域 A 和值域 B;

第2步:将 $y=f(x)$ 看作方程,在其定义域上解出 $x=f^{-1}(y)$;

第3步:将 x,y 互换得反函数的表达式 $y=f^{-1}(x)$。

从第2步可看出,要 $y=f^{-1}(x)$ 成为函数,从值域 B 到定义域 A,按照 $y\in B$,$x=f^{-1}(y)$ 的对应应为映射。这就是函数 $y=f(x)$ 存在反函数时的映射特点。

由此还可以看出,原函数的值域和定义域分别是其反函数的定义域和值域,故求反函数的定义域一般通过求原函数的值域实现。

若点 $P(x_0,y_0)$ 在原函数的图像上,则点 $P'(y_0,x_0)$ 在其反函数的图像上,而点 P 和点 P' 关于直线 $y=x$ 对称,故互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 成轴对称图形。

3.函数的三要素

函数 $f:A\longrightarrow B$ 中,定义域 A、值域 B、对应法则 f 称为函数的三要素。其中起决定作用的是定义域和对应法则,因为只要这两者确定了,函数的值域也就随之而定。

能力高层发展

【高考考点分析】

映射是函数的基础。函数的概念与函数的定义域、值域和函数解析式——函数的三要素,是高考的热点题材。近年来重视在应用题中对函数解析式与定义域的考查,要求考生根据题意建立数学模型,写出解析式。应用问题是高考的热点,要求考生会把实际问题转化为数学问题。

【高考题型回放】

1.映射与函数三要素问题

【例1】　2000年全国高考试题　设集合 A 和 B 都是自然数集 N,映射 $f:A\longrightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f F,像20的原像是(　　)。

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

➡**考查内容**　映射的概念,方程的自然数解。

➡**解题思路**　观察易知方程

$$2^n+n=20$$

的解为 $n=4$,故像20的原像为4,选C。

➡**解题关键**　此题从形式上继承了过去"第(1)题为集合问题"的特点,但重心落在"映射的概念"上,关键点是"求方程 $2^n=20-n$ 的自然数解"。"求方程 $2^x=20-x$ 的解的个数"一类的问题,是各种高考教学参考书中常见的题型。此题超越了这一模型,要求具体求出方程的解。解题过程虽仍不外作函数 $y=2^x$ 及 $y=20-x$ 的图像,观察图像得出两图像的交点约为 $x=4$,再取 $x=4$ 代入方程验算,得方程的自然数解,像20的原像确为4,实实在在地考查了学生观察分析图形的能力与数学估算能力。

【例2】　映射 $f:A\longrightarrow B$ 对应的函数的定义域为 A,值域为 B,则下列说法正确的是(　　)。

A.集合 A 中的每个元素必有像,但 B 中的元素不一定有原像

B.集合 B 中的元素必有原像

C.集合 B 中的元素只能有一个原像

D.集合 A 或集合 B 可以是空集

➡**考查内容**　映射与函数的概念。

➡**解题思路**　由映射 $f:A\longrightarrow B$ 成为函数的两个特征可知,B是正确的且其他均不正确,故选B。

【例3】　已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,2]$,求函数

$$g(x)=\frac{f(x^2)}{1+\lg(x+1)}$$

的定义域。

➡**考查内容**　复合函数的定义域的求法。

➡**解题过程**　要函数 $g(x)$ 有意义,即要

$$\begin{cases}0\leqslant x^2\leqslant 2\\ x+1>0\\ 1+\lg(x+1)\neq 0\end{cases}$$

由此解得

$$-1<x\leqslant\sqrt{2},且\ x\neq-\frac{9}{10}$$

故函数 $g(x)$ 的定义域是$\left(-1,-\frac{9}{10}\right)\cup\left(-\frac{9}{10},\sqrt{2}\right]$。

➡**误区点津**　*求复合函数 $y=f(g(x))$ 的定义域时,必须注意 $f(x)$ 的定义域一定是 $u=g(x)$ 的值域的子集。因此这类问题其实是求定义域和值域的综合问题。*

【例4】　已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2-3)=\lg\frac{x^2}{x^2-6}$,求函数 $f(x)$ 的定义域。

➡**考查内容**　求复合函数的定义域。

➡**解题过程**　令 $u=x^2-3$,则 $f(x)$ 的定义域就是中间变量 u 的值域。

又因为要 $\lg\frac{x^2}{x^2-6}$ 有意义,还必须且只须 $x^2-6>0$,即 $x^2>6$。

故 $u=x^2-3>3$。

故函数 $f(x)$ 的定义域为$(3,+\infty)$。

➡**误区点津**　*此题的另一解法是先用换元法求出原函数 $f(x)$ 的解析式:令 $u=x^2-3$,即 $x^2=u+3$,*
$f(u)=\lg\frac{u+3}{u-3}$。

由
$$\begin{cases}u+3=x^2\geqslant 0\\ \dfrac{u+3}{u-3}>0\end{cases}$$
知
$$u>3$$
解题中不可忽视换元式 $x^2=u+3$ 起的作用，否则 $f(x)$ 的定义域会扩大为 $(3,+\infty)\cup(-\infty,-3)$。

2.函数的反函数问题

函数的反函数是一个重要的概念，求反函数的关系式、反函数的值、研究互为反函数的函数的图像关系解题，也是高考的热点题材。

【例5】 函数 $g(x)$ 的图像与 $f(x)=\log_3(x-1)+9$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(10)$ 的值等于(　　)。

A.11　　B.10　　C.4　　D.1

➡考查内容 互为反函数的函数的图像间的关系，反函数值的求法。

➡解题过程 由题意知，$g(x)$ 即为 $f(x)=\log_3(x-1)+9$ 的反函数，因此 $g(10)$ 即为 $f(x)=10$ 时 x 的值。由 $\log_3(x-1)+9=10$，解得 $x=4$，故选 C。

➡误区点津 也可以由 $f(x)=\log_3(x-1)+9$，求得 $g(x)=3^{x-9}+1$，进而得 $g(10)=4$，故选 C。

【例6】 已知函数 $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$。

(1)求 $f^{-1}(x)$ 的表达式，并指出其定义域；

(2)设 $P(n)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_a\sqrt{2})$，若 $P(n)<\dfrac{1}{2}(3^n+3^{-n})(n\in\mathbf{N})$，求 a 的取值范围。

➡考查内容 反函数的求法，原函数与其反函数的定义域和值域的关系，解不等式和不等式组。

➡解题过程 (1)由 $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)$，得
$$x+\sqrt{x^2-2}=a^y$$
两边平方并整理得
$$2x\cdot a^y=a^{2y}+2$$
由此解得
$$x=\frac{1}{2}\left(a^y+\frac{2}{a^y}\right)$$
交换 x,y 位置，得
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+\frac{2}{a^x}\right)$$
解不等式组
$$\begin{cases}x^2-2\geqslant 0\\ x+\sqrt{x^2-2}>0\end{cases}$$
得
$$x\geqslant\sqrt{2}$$
即原函数的定义域为 $[\sqrt{2},+\infty)$。

令 $u=x+\sqrt{x^2-2}$，则 u 关于 x 在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上是增函数，故当 $x\geqslant\sqrt{2}$ 时，$u\geqslant\sqrt{2}$。所以

当 $a>1$ 时，$\log_a u\geqslant\log_a\sqrt{2}$，

当 $0<a<1$ 时，$\log_a u\leqslant\log_a\sqrt{2}$。

故原函数的值域，即反函数的定义域为

当 $a>1$ 时，$x\in[\log_a\sqrt{2},+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，$x\in(-\infty,\log_a\sqrt{2}]$。

(2) $\because f^{-1}(n+\log_a\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}\left(a^{n+\log_a\sqrt{2}}+\dfrac{2}{a^{n+\log_a\sqrt{2}}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cdot a^n+\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot a^n}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a^n+a^{-n})$
$$\therefore P(n)=\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})$$

若　$P(n) < \frac{1}{2}(3^n + 3^{-n})$

则　$a^n + a^{-n} < 3^n + 3^{-n}$

即　$a^{2n} - (3^n + 3^{-n})a^n + 1 < 0$

由此解得　$\left(\frac{1}{3}\right)^n < a^n < 3^n (n \in \mathbf{N})$

由此进一步得　$\frac{1}{3} < a < 3$，且 $a \neq 1$

又显然 $n + \log_a \sqrt{2} \geqslant \log_a \sqrt{2} (n \in \mathbf{N})$，由(1)知 $a > 1$。

故 a 的取值范围是 $1 < a < 3$。

➡**误区点津**　此题涉及的知识点虽然十分基础，但对知识内涵的理解性却是深层次的，综合性也很强。求反函数的定义域必须通过求原函数的值域实现，求原函数的值域时又需要先确定原函数的定义域。这是处理反函数问题时务必注意的要点。

3.函数关系式的应用

【例 7】　某工厂生产甲、乙两种产品，设投入资金 x(万元)，甲产品获利 y_1(万元)，乙产品获利 y_2(万元)。根据经验，投入资金与所获利润的函数关系式是：$y_1 = \frac{1}{4}x, y_2 = \frac{5}{4}\sqrt{x}$。现有资金 10(万元)全部投入甲、乙两种产品的生产，设投入乙产品的资金为 t(万元)$(0 \leqslant t \leqslant 10)$。

(1)确定总利润 y 关于 t 的函数关系式；

(2)求可获得的最大总利润为多少万元。

➡**考查内容**　列函数关系式解数学应用题。

➡**解题过程**　(1)由乙产品投入 t 万元，知甲产品投入$(10-t)$万元，投产后的总利润为

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{4}(10-t) + \frac{5}{4}\sqrt{t}$$

$$= -\frac{1}{4}t + \frac{5}{4}\sqrt{t} + \frac{5}{2}, \quad t \in [0,10]$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}t + \frac{5}{4}\sqrt{t} + \frac{5}{2}, \quad t \in [0,10]$$

(2)令 $x = \sqrt{t}$，则 $t = x^2$，　$x \in [0, \sqrt{10}]$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{65}{16}, \quad x \in [0, \sqrt{10}]$$

故当 $x = \frac{5}{2}$，即 $t = \frac{25}{4}$ 时，y 取最大值 $\frac{65}{16}$，即 $t = 6.25$ 时，y 取最大值 4.0625。

答　乙产品投入 6.25 万元，甲产品投入 3.75 万元时，可获最大利润 4.0625 万元。

➡**误区点津**　(1)中务必注意 t 的取值范围；(2)中务必注意 x 的取值范围即是关于 t 的函数 $x = \sqrt{t}$，$(t \in [0,10])$ 的值域，否则容易出错。

☞综合能力训练

一、选择题

1.已知函数 $y = \frac{6x+5}{x-1} (x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 1)$，那么它的反函数为(　　)。

A. $y = \frac{6x+5}{x-1} (x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 1)$　　B. $y = \frac{x+5}{x-6} (x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 6)$

C. $y = \frac{x-1}{6x+5} (x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq -\frac{5}{6})$　　D. $y = \frac{x-6}{x+5} (x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq -5)$