

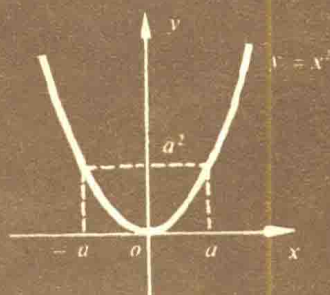
工科大学数学丛书

高等数学习题集

GAODENGSHUXUEXITITIJI

刘剑秋·徐绶·高立仁 编

下



天津大学出版社

工科大学数学丛书

高等数学习题集

(下 册)

刘剑秋 徐 绥 高立仁 编

天津大学出版社

1988.2

内 容 提 要

本书分上、下两册，是学习高等数学的辅导性教材，内容包括一元函数微积分、多元函数微积分、级数、微分方程。本书按各章的节分为要点、例题、习题三个部分，并对典型例题进行分析、归纳，给出解题的方法和技巧。

本书可供工科大学、电视大学、职工大学本科生使用，也可供科技人员及自学高等数学的读者参考。

工科大学数学丛学

高等数学习题集

(下册)

刘剑秋 徐 绥 高立仁 编

※

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

※

开本：850×1168毫米^{1/32} 印张：11^{11/16} 字数：303千字

1988年2月第一版 1988年2月第一次印刷

印数：1-10000

ISBN 7-5618-0029-0/0·2

定价：1.90元

目 录

第七章	矢量代数与空间解析几何	(1)
第一节	矢量加、减法 标量与矢量乘法	(1)
	例 1—例 4	(3)
	习题	(7)
第二节	矢量的两种乘法	(10)
	例 1—例 4	(12)
	习题	(13)
第三节	平面方程与直线方程	(16)
	例 1—例 8	(18)
	习题	(23)
第四节	几种常见的曲面和曲线	(30)
	例 1—例 4	(32)
	习题	(38)
第八章	多元函数微分学	(46)
第一节	多元函数的概念	(46)
	例 1—例 7	(48)
	习题	(55)
第二节	偏导数与全微分	(58)
	例 1—例 10	(60)
	习题	(67)
第三节	复合函数微分法 方向导数与梯度	(71)
	例 1—例 8	(73)
	习题	(81)
第四节	隐函数微分法	(85)

例 1—例 6	(87)
习题	(91)
第五节 偏导数的应用	(94)
例 1—例 6	(97)
习题	(103)
第九章 重积分	(115)
第一节 二重积分的概念及算法	(115)
例 1—例 11	(118)
习题	(128)
第二节 三重积分的概念及算法	(135)
例 1—例 5	(138)
习题	(146)
第三节 重积分的应用	(149)
例 1—例 7	(151)
习题	(158)
第十章 曲线积分与曲面积分	(164)
第一节 第一类曲线积分和第二类曲线积分	(164)
例 1—例 8	(168)
习题	(179)
第二节 格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件	(183)
例 1—例 7	(184)
习题	(193)
第三节 第一类曲面积分和第二类曲面积分	(198)
例 1—例 7	(201)
习题	(210)
第四节 奥—高公式 曲面积分与曲面无关的条件	
斯托克斯公式 空间曲线积分与路径无关的条件	(214)
例 1—例 8	(216)

习题	(225)
第五节 矢量场的散度和旋度	(228)
例 1 — 例 4	(230)
习题	(234)
第十一章 级数	(240)
第一节 无穷级数的基本概念	(240)
例 1 — 例 4	(241)
习题	(246)
第二节 正项级数	(250)
例 1 — 例 6	(252)
习题	(258)
第三节 任意项级数	(262)
例 1 — 例 3	(263)
习题	(267)
第四节 幂级数	(269)
例 1 — 例 4	(272)
习题	(276)
第五节 函数的台劳级数与台劳展开式	(277)
例 1 — 例 6	(280)
习题	(288)
第六节 付立叶三角级数	(291)
例 1 — 例 2	(293)
习题	(297)
第七节 偶函数和奇函数的付立叶级数展开式 任意 区间上的函数的付立叶级数展开式	(299)
例 1 — 例 4	(301)
习题	(306)
第十二章 微分方程	(319)

第一节 一阶微分方程.....	(319)
例 1 — 例 7	(322)
习题.....	(327)
第二节 可降阶的高阶微分方程.....	(332)
例 1 — 例 4	(333)
习题.....	(336)
第三节 线性微分方程.....	(337)
例 1 — 例 6	(341)
习题.....	(348)
第四节 幂级数解法及微分方程组.....	(354)
例 1 — 例 4	(356)
习题.....	(360)

第七章 矢量代数与空间解析几何

第一节 矢量加、减法 标量与矢量乘法

一 矢量的概念及其表示形式

既有大小又有方向的量称为矢量。矢量有三种表示形式。

1 矢量的几何表示形式 矢量 $\mathbf{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 为空间的有向线段,如图7—1所示; $\mathbf{a}$ 的大小或模 $|\mathbf{a}|$ 表示为有向线段的长度, $\mathbf{a}$ 的方向表示为有向线段的方向(指向)。

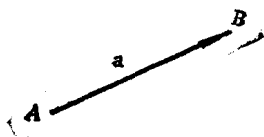


图7—1

2 矢量的坐标表示形式 矢量 $\mathbf{a}$ 表示为

$$\mathbf{a} = \{x, y, z\},$$

其中 x, y, z 分别为矢量 $\mathbf{a}$ 在各坐标轴上的投影, $\mathbf{a}$ 的模为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$\mathbf{a}$ 的方向由方向角 α, β, γ 确定

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3 矢量的分解表示形式 矢量 $\mathbf{a}$ 表示为

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

其中 $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ 分别为 $\mathbf{a}$ 在各坐标轴上的分矢量。

矢量的三种表示形式各有其特点。矢量的几何表示形式有显明的直观性，但不便于在理论上进行研究。矢量的坐标形式和分解形式基本上是相同的，前者是用数量表示矢量，而后者用特殊矢量表示矢量，他们便于计算和在理论上进行研究。

注意矢量的坐标与点的坐标的区别和联系。已知二点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，则以 A 为起点 B 为终点的矢量 $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ 。

二 矢量的加、减法

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ 的几何表示形式按照平行四边形法则 或三角形法则给出， $\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ 如图7-2所示。

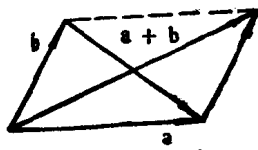


图7-2

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ 的坐标表示形式 设 $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}.$$

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ 的分解表示形式 设 $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_1 \pm x_2)\mathbf{i} + (y_1 \pm y_2)\mathbf{j} + (z_1 \pm z_2)\mathbf{k}.$$

三 标量与矢量的乘法

标量 λ 与矢量 $\mathbf{a}$ 的乘积 $\lambda\mathbf{a}$

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$;

当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 的模 $|\lambda \mathbf{a}| = \lambda |\mathbf{a}|$, $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 同向,

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 的模 $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$, $\lambda \mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 反向.

$\lambda \mathbf{a}$ 的坐标表示形式

设 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$, 则 $\lambda \mathbf{a} = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}$.

$\lambda \mathbf{a}$ 的分解表示形式

设 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 则 $\lambda \mathbf{a} = \lambda x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j} + \lambda z\mathbf{k}$.

矢量的加法及标量与矢量的乘法, 它们的运算规律与实数相同, 具有交换律, 结合律以及分配律.

四 关于矢量的基本公式

1 两点之间的距离公式

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) &\Rightarrow \\ d = |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

2 矢量在轴上的投影公式

$$\text{Pr}_{\mathbf{l}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta \quad (\theta \text{ 为 } \overrightarrow{AB} \text{ 与轴 } \mathbf{l} \text{ 的正向夹角}).$$

3 定比分点的坐标公式

$$\left. \begin{aligned} A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \\ M(x, y, z), AM = \lambda MB \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

当 $\lambda = 1$ 时, M 为线段 AB 的中点, 它的坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

例1 已知 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 为非零矢量, 试问: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 具有什么几何特

征, 下列等式成立:

$$(1) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|, \quad (2) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|.$$

[解] (1) 根据矢量加法的平行四边形法则, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 与 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 是平行四边形两条对角线的长度, 因此, 当平行四边形为矩形时即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 互相垂直时, 等式 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 成立 (图 7-3)。

(2) 因 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 表示矢量的大小, 若 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ 成立, 则必有 $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$, 即 $\mathbf{a}$ 的模大于或等于 $\mathbf{b}$ 的模。

在一般情形下, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ 表示一个三角形的三条边的长度, 因此

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|,$$

仅当 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的夹角为 π 即 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 反向时等号成立。于是, 当 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 反向且 $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$ 时, 等式 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ 成立 (图 7-4)。

例2 设矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为一个平行六面体的三个棱 (图 7-5), 点 A , B , C , D , E , F 分别为六面体各边的中点, 证明: 矢量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ 构成一个三角形。

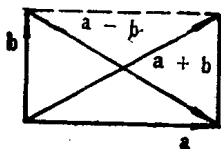


图7-3

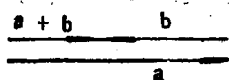


图7-4

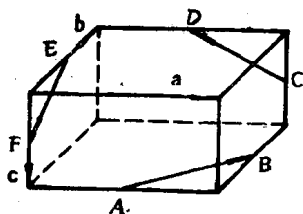


图7-5

[证] 要证 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ 构成一个三角形, 只须证 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \mathbf{0}$ 。

$$\text{据题设, } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{EF} =$$

$-\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$, 以上三式相加, 得

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \mathbf{0}.$$

这表明矢量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ 构成一个三角形.

例3 设 $\triangle ABC$ 的重心为 M , 任一点 P 到三角形的三顶点的矢量分别为 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ (图 7-6), 证明:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

[证] 因 M 是三角形的重心, 所以 M 是中线 AD , BE 的交点, 见图 7-6. 由

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM},$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DM},$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM},$$

三式相加, 得

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{PM} &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \\ &\quad + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

因 M 是三角形重心, 所以

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}, \text{ 即 } \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DM} = \mathbf{0}.$$

又

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \text{ 即 } \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}.$$

故

$$3\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}, \text{ 即}$$

$$\vec{PM} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}).$$

例4 已知点 $A(x, y, z)$ 和一条轴 l ，且轴 l 的正向与向量 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 同向，求矢量 $\vec{OA}$ 在轴 l 上的投影 $\text{Pr}_l \vec{OA}$ ，其中 O 为原点。

〔解〕 过点 A 作线段 $AP \perp xoy$ 面，垂足为 P 。过点 P 作线段 $PQ \perp x$ 轴，垂足为 Q (图 7-7)，于是

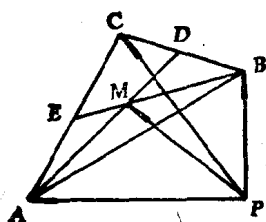


图7-6

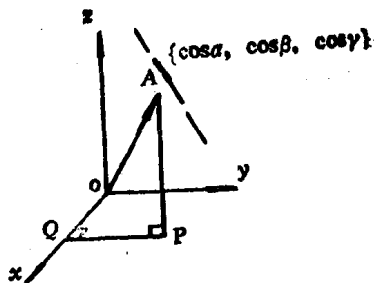


图7-7

$$\vec{OA} = \vec{OQ} + \vec{QP} + \vec{PA},$$

根据投影定理

$$\text{Pr}_l \vec{OA} = \text{Pr}_l \vec{OQ} + \text{Pr}_l \vec{QP} + \text{Pr}_l \vec{PA}.$$

因为 $\text{Pr}_l \vec{OQ} = |\vec{OQ}| \cos\theta$ ， θ 为 $\vec{OQ}$ 与轴 l 的正向的夹角， $\cos\theta = \pm \cos\alpha$ (当 $\vec{OQ}$ 与 x 轴正向同向，取 $+$ 号，否则，取 $-$ 号)，又 $\pm |\vec{OQ}| = x$ ，所以

$$\text{Prj}_i \vec{OQ} = \pm |\vec{OQ}| \cos \alpha = x \cos \alpha.$$

同理, $\text{Prj}_i \vec{QP} = y \cos \beta$, $\text{Prj}_i \vec{PA} = z \cos \gamma$. 于是

$$\text{Prj}_i \vec{OA} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

.....

习 题

(甲)

1. 设点 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点. 若记矢量 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AD} = \mathbf{b}$, 试用 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 表示矢量 $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ 和 $\vec{MD}$.

2. 设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为二非零矢量, 利

用图形证明:

$$(1) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a};$$

$$(2) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b}.$$

3. 若 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, 试证 $|\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|$.

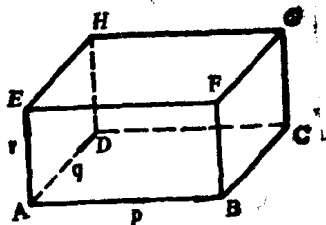


图 7—8

4. 在平行六面体 $ABCDEFGH$ 中 (图 7—8), 设 $\vec{AB} = \mathbf{p}$, $\vec{AD} = \mathbf{q}$, $\vec{AE} = \mathbf{r}$, 试用矢量 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ 表示 $\vec{BG}$, $\vec{CH}$, $\vec{HF}$, $\vec{AG}$, $\vec{FD}$, $\vec{CE}$.

5. 已知点 $A(4, 0, 0)$, $B(0, 0, 3)$, $C(4, 0, 3)$, $D(0, -7, 0)$, $E(0, -7, 2)$,

(1) 在空间直角坐标系中标出这些点的位置;

(2) 在坐标系中描绘它们的矢径 (起点为原点, 终点为已知点)。

6. 求与定点 $(2, -3, -1)$ 分别对称于 xoy 、 yoz 、 zox 坐标平面的点的坐标。

7. 求与定点 (a, b, c) 分别对称于 xoy 、 yoz 、 zox 坐标平面的点的坐标。

8. 求与定点 $(2, -3, -1)$ 分别对称于 ox 轴、 oy 轴及 oz 轴的点的坐标。

9. 已知矢量 $a = \{3, 5, -1\}$, $b = \{2, 2, 3\}$, $c = \{4, -1, -3\}$,

(1) 求 $2a - 3b + 4c$ 的坐标;

(2) 求 $ma + nb$ 的坐标。

10. 设矢量 $a = \{3, 2, -1\}$, $b = \{1, -1, 2\}$, $C = \{x, y, z\}$ 。

问当 x 、 y 、 z 分别取什么值时, 等式 $3a - 5b + 2c = 0$ 能成立。

11. 分别求 $a = i + j + k$ 和 $b = 2i - 3j + 5k$ 的模, 并分别用单位矢量 a° 和 b° 表示 a 和 b 。

12. 求矢量 $a = \frac{1}{3}(2i + 2j - k)$ 及 $b = \frac{1}{3}(-i + 2j + 2k)$ 的模和方向余弦。

13. 设矢量的方向角为 α 、 β 、 γ 。若

(1) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, 求 γ ;

(2) $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 60^\circ$, 求 γ 。

14. 已知矢量 $a = xi + 5j - k$ 和矢量 $b = 3i + j + yk$ 平行, 求系数 x 和 y 。

15. 求点 $M(4, -3, 5)$ 与原点及各坐标轴的距离。

16. 在 oz 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点。

17. 已知 $A(-1, 4, 1)$ 和 $B(1, 0, -3)$ 两点。

(1) 求线段 AB 的中点坐标;

(2) 求点 M 使 $\vec{AM} = 2\vec{MB}$;

(3) 求点 M 使 $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{MB}$.

(乙)

18. 已知 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 为非零矢量, 试问: $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 具有什么几何特征时, 下列等式成立:

(1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;

(2) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;

(3) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, λ 为实数.

19. 设 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 有公共起点, 且 $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $\mathbf{c} = b\mathbf{a} + a\mathbf{b}$, 求证 $\mathbf{c}$ 平分 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的夹角.

20. 利用矢量的方法, 证明: 若四边形的对角线互相平分, 则四边形是平行四边形.

21. 一矢量与 ox 轴和 oy 轴所成的角相等, 而与 oz 轴所成的角是它们之一的两倍, 试确定这矢量的方向.

22. 一矢量的终点为 $B(2, -1, 7)$, 它在坐标轴上的投影分别是 4、-4、7, 求这矢量的起点坐标.

23. 试证: 以 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

24. 在 $yo z$ 平面上, 求与三个已知点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 、 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

25. 已知点 $A(2, -1, 7)$ 和 $B(4, 5, -2)$, 试求各坐标面与线段 AB (或其延长线) 交点的坐标及此交点分线段 AB 的比值.

26. 证明点 $A(-3, 2, -7)$ 、 $B(2, 2, -3)$ 、 $C(-3, 6, -2)$ 是一个等腰三角形的顶点, 并求这个三角形的重心.

27. 设 P 是点 A 和 B 的连线以外的一点, 证明: 当且仅当 $\vec{PC} = x\vec{PA} + y\vec{PB}$ 时, A, B, C 三点共线, 其中 $x + y = 1$.

第二节 矢量的两种乘法

一 矢量的数积

1 数积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}})$.

2 数积的坐标表示式

设 $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

3 性质

设 $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则

$$(1) \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$(2) \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

4 数积的运算规律

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (交换律).

(2) $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$ (结合律).

(3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (分配律).

二 矢量的矢积

1 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的矢积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 仍是一个矢量, 且

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}})$,

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向这样来确定, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 顺次成右手系.

2 矢量的坐标表示式

$$\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \implies \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$