高等学校试用教材

数值逼近

李岳生　黄友谦　编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数　值　逼　近

李岳生　黄友谦　编

人　民　教　育　出　版　社

数 值 逼 近

李岳生　黄友谦 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山东青岛印刷厂印装

*

1978 年 7 月第 1 版　　1978 年12月第 1 次印刷

书号 13012·0202　　　定价 0.91 元

序　言

根据教育部1977年10月上海理科教材会议讨论的精神，认为数值逼近是计算数学专业的一门专业基础课．这门课应体现加强基础和加强对学生分析能力的训练，又要求内容尽可能现代化．它不仅可供计算数学专业的师生使用，同时也可供有关专业的读者参考．

为了达到上述要求，我们从以下几个方面作了一定的努力：

我们力求将教材写成一本名符其实的数值逼近教材，也就是说，这本书的内容既不能是没有数值的逼近，更不能是没有逼近的数值．而是要把函数逼近理论和数值分析方法恰当地结合起来，以前者为指导，后者为归宿．因此，我们在侧重介绍函数逼近基本方法和理论的同时，还举了大量的数值例子，从正反两方面鲜明地说明了方法的好坏．因为，一个好的例子，胜过一百句空话，它往往能给人以有益的启示．

我们力求使本书内容反映数值逼近发展的新水平．自电子计算机出现以来，数值逼近内容不断丰富，近十几年它的面貌更是焕然一新．样条函数、快速富氏分析、曲面分片拟合的出现，以及外推算法、契比晓夫多项式的数值应用和有理函数逼近的进一步发展等等，就足以说明这一点，这些内容在本书中都重点作了介绍．特别是考虑到样条函数正在向计算方法各领域渗透，它在计算几何，数学物理方程的数值解，以及数据处理等问题中都有重要作用．因此，我们不仅专门开辟一章来论述样条函数的基本知识，而且还在其它有关章节进一步阐明它的应用．

在内容的叙述上，我们采用由简单到复杂，由特殊到一般的叙

述方法，在具体分析的基础上再上升到一般的方法和理论．同时也注意贯彻理论联系实际和少而精的原则，所讲的方法和理论都是基本的，有效的，所举的例子绝大多数是我们自己计算的，有的还是生产中有意义的实例．

关于本书各章的内容，下面作简要说明．

第一章的目的在于引起读者对数值运算误差分析的重视，但仅限于介绍数值计算中要遵守的几条基本原则．第二章讲代数插值，是历来必有的内容，除了肯定它是插值方法的基础以外，也指出了高次代数插值的缺点——振荡现象，从而为介绍样条函数方法留了一个伏笔．第三章所讲样条函数，是本书的一个突出重点，通常强调的是三次样条函数插值法，我们则认为二次样条同样值得重视．在这一章里还介绍了曲线拟合的磨光法，它是一个简便、有效、而且易被读者接受的数值逼近法．第四章讲数值积分和数值微分比常见的方法增添了新的内容，肯定了样条函数和外推算法对这一类问题的有效性，肯定了数值微分转化为数值积分的处理方法的有效性．第五章介绍了正交多项式，除了为高斯型求积公式作准备外，还有它本身的独立意义，因为正交多项式是函数逼近的重要工具．第六章，我们把契比晓夫多项式列为专节加以介绍，因为它在数值逼近中的地位，显得越来越重要．同时，我们将函数逼近问题提高到线性模空间来研究，这一必要的抽象，可以使读者对数值逼近的认识进一步深化．第七章讲述的快速富氏变换是有限富氏分析的一个卓有成效的新算法，它能成千成万倍地节约计算时间．第八章所讲有理函数逼近，对具有奇性的函数往往能带来良好的效果，其在计算物理问题中的应用已很广泛．第九章二元函数的分片光滑逼近是考虑到计算几何和有限元法的需要而写的．总起来说，采用代数多项式、三角多项式、样条函数、有理函数作为基本逼近函数类，运用插值法、磨光法、平方逼近和一致

逼近作为基本逼近方法，并使两者结合构成本书的基本内容. 书末尾列出的书目，便于读者查阅.

采用本书作教材时，如果觉得学时偏紧，可以适当削减部分内容. 有些类似内容可举一反三略而不讲，如高斯型求积公式着重讲高斯-勒让特公式就行了. 第二章§8埃尔米特插值，可结合到第三章§5去讲，重点分析二重节点的三次埃尔米特插值及其分片三次插值. 此外，第一章§5、第六章§5、第八章§4和第九章§4、§5，也可略而不讲. 这样做无损于课程的系统性，对于有余力的学生可以作为进一步自学的内容.

本书由计算数学教研室李岳生、黄友谦两同志执笔写成. 参加编写工作的还有潘振泰、陈大正同志. 编写过程中得到系领导的关怀和有关部门的支持.

本书由南京大学沈祖和同志主审，参加审查的还有四川大学、贵州大学、广西大学、南开大学的同志. 他们以认真负责的精神，对本书提出了许多宝贵的意见和建议. 这些意见和建议，对提高本书质量很有帮助. 编者谨向这些同志表示深切的谢意.

由于我们水平不高，时间也比较匆忙，错误和不妥的地方，恳请读者批评指正.

编　者

一九七八年六月于广州中山大学

目　　录

第一章　数值运算误差的初步分析

§1　重视数值的近似运算

加减乘除还有什么文章可做吗？给定了计算方案，当程序正确编出后，在通用电子计算机上实现解题运算①，其结果该是足够准确吧！不能这样高枕无忧．且看下面几个例题．

例 1． 建立积分 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx, n=0,1,\cdots,20$的递推关系式，并在电子计算机上实现解题．

解　容易导得

$$I_n+5I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^n+5x^{n-1}}{x+5}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n},$$

$$I_0=\int_0^1\frac{dx}{x+5}=\ln 6-\ln 5.$$

于是建立了下列递推关系

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} I_n=-5I_{n-1}+\dfrac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,20,\\ I_0=\ln 6-\ln 5. \end{cases}$$

编好程序后在 121 机实现计算，算得结果见表 1．算得结果可靠吗？我们来分析一下．

容易明白，积分

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx$$

具有下列几个特性:

---

①例如国产 DJS-121 机能将规格化的数，表达到十进制小数后第八位．

1） $I_n>0$,

2） $I_n<I_{n-1}$,

3） $n\longrightarrow\infty$ 时 $I_n\longrightarrow 0$,

4） 因为 $I_{n-2}>I_{n-1}>I_n$, 有

$$5I_{n-1}<I_n+5I_{n-1}<6I_{n-1},$$

由于 $I_n+5I_{n-1}=\dfrac{1}{n}$, 故

$$\frac{1}{6n}<I_{n-1}<\frac{1}{5n}.$$

但是我们在表 1 中发现，$I_{12}<0$，往后的 I_i 值，正负号交替出现，绝对值不是趋于零而是不断递增. 从而理论的分析与计算的结果严重不符.

现在我们采用新的计算方案，考虑到

$$\frac{1}{6\times 21}<I_{20}<\frac{1}{5\times 21},$$

就粗略地取

$$I_{20}\approx\frac{\dfrac{1}{6\times 21}+\dfrac{1}{5\times 21}}{2}=0.0087301587,$$

然后按下列递推关系式在电子计算机上计算

$$\text{(B)}\qquad\begin{cases}I_{n-1}=-\dfrac{I_n}{5}+\dfrac{1}{5n},\ n=20,19,\cdots,1,\\ I_{20}\approx 0.0087301587.\end{cases}$$

计算结果见表 1.

我们发现 I_0 与 $\ln 6-\ln 5$ 的值一样. 这就说明了在方案（A）尽管 I_0 取得了八位准确数字进行运算，但越往后递推算得结果就越不可靠；方案（B）尽管粗略取 $I_{20}\approx 0.0087301587$，但按逆递推方向算下去却能基本反映 I_n 的特性，最后求得的 I_0 又很准确. 这就启发我们适当将 I_{20} 选得准确点（本书数值积分部分将谈这个

i	I_i 值 (A)	I_i 值(B)	i	I_i 值(A)	I_i 值(B)
0	0.18232155	0.18232155	11	0.017324710	0.014071338
1	0.088392216	0.088392216	12	−0.003290219	0.012976641
2	0.058038918	0.058038919	13	−0.093374172	0.012039867
3	0.043138742	0.043138734	14	−0.39544229	0.011229233
4	0.034306287	0.034306329	15	2.0438781	0.010520499
5	0.028468560	0.028468352	16	−10.156890	0.009897504
6	0.024323864	0.024324995	17	50.843276	0.009336007
7	0.021237820	0.021232615	18	−254.16082	0.008875522
8	0.018810897	0.018836924	19	1270.8567	0.0082539682
9	0.017056624	0.016926489	20	−6354.2338	0.0087301587
10	0.014716876	0.015367550			

表 1 （箭头示递推方向）

问题），按方案(B)实现计算其结果可靠，而方案(A)应该被放弃．为什么要淘汰方案(A)呢？我们知道，电子计算机只能对有限的数位进行算术运算，在 121 机上只能取 I_0 的八位数字进行运算，于是 I_0 的误差传播到 I_1，I_1 的误差又按递推关系式 $I_2=-5I_1+\frac{1}{2}$传播给 I_2. 记 I_n 的近似值为 $\hat{I}_n$(即电子计算机运算所得的近似值)，那么有

准确的理论递推式 $I_1=-5I_0+1$,

实际运算的递推式 $\hat{I}_1=-5\hat{I}_0+1$.

两式相减有

$$I_1-\hat{I}_1=-5(I_0-\hat{I}_0),$$

也就是说，若 I_0 与 $\hat{I}_0$ 的误差为 ε, $I_0=\hat{I}_0+\varepsilon$. 那么 $I_1-\hat{I}_1$ 就是负五倍 ε，并继续影响到$\hat{I}_2, \hat{I}_3\cdots$. 按这样的分析办法可求得

$$I_n-\hat{I}_n=-5(I_{n-1}-\hat{I}_{n-1})=(-5)^2(I_{n-2}-\hat{I}_{n-2})=\cdots$$
$$=(-1)^n5^n(I_0-\hat{I}_0).$$

也就是说，若 $\hat{I}_0$ 有 ε 的误差 $I_0-\hat{I}_0=\varepsilon$，那么 $\hat{I}_n$ 就有$(-1)^n5^n$ 倍 ε

的误差，可信当 n 充分大时计算严重不可靠.

同样的分析方法对于方案(B)有

准确的理论递推式 $I_{n-1}=-\frac{I_n}{5}+\frac{1}{5n}$,

实际运算的递推式 $\hat{I}_{n-1}=-\frac{\hat{I}_n}{5}+\frac{1}{5n}$.

从而有

$$I_0-\hat{I}_0=-\frac{1}{5}(I_1-\hat{I}_1)=\frac{1}{5^2}(I_2-\hat{I}_2)=\cdots$$

$$=\frac{(-1)^n}{5^n}(I_n-\hat{I}_n).$$

即误差的传播是逐步缩小的，故方案(B)是可靠的．当然这样的分析办法与实际的误差传播多少还有点出入．例如我们假设 $\frac{1}{n}$ 的计算是准确的等等．但是，无论如何这是一个常用的分析方法.

这个例题告诉我们，一个计算数学工作者，不但要学会建立方法编制程序，而且还要学会分析电子计算机算得的结果．如果我们对积分 I_n 作理论的特性分析，就会帮助我们鉴别计算结果是否可靠，避免了一场差错．递推关系的计算格式在数值逼近中有重要地位，在本书的开页介绍这个例子是有意义的.

例2. 求方程 $\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+10^9=0$ 的根，这里 $\alpha=-10^9$, $\beta=-1$.

解 应用 $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ 的求根公式编制程序，并在 121 机计算有

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

其中

$$-b=-(\alpha+\beta)=10^9+1=0.1\times10^{10}+0.0000000001\times10^{10}.$$

由于 121 机只能将数表达到小数后第八位，故 β 这个量在上式的计算中~~不起作用.~~ 即在计算机运算时 $-b=-\alpha=10^9$. 被淹没.

类似的分析有

$$b^2-4ac\approx b^2,\ \sqrt{b^2-4ac}\approx|b|.$$

故求得两个根是

$$\lambda_1\approx\frac{10^9+10^9}{2}=10^9,$$

$$\lambda_2\approx\frac{10^9-10^9}{2}=0.$$

求得的结果可靠吗？由于

$$\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+10^9\equiv\lambda^2-(10^9+1)\lambda+10^9=(\lambda-10^9)(\lambda-1),$$

故其二根分别为 10^9 和 1. 为什么会出现第二个根的谬误呢？分析一下计算机的计算过程就会明白，是在计算中忽略了量 β 和常数项 10^9，实质上是求解方程

$$\lambda^2+\alpha\lambda=0,$$

结果当然是谬误的. 计算过程中，由于加法减法运算时要对阶，大数"吃掉"了小数，α"吃掉"了 β 使 $b=\alpha$，由此一步的误差积累，导致最后计算 λ_2 时失败. 在某种情况下，大数"吃掉"了小数是允许的(例如本例的 λ_1)，在另外情况下，大数"吃掉"了小数却不允许(本例的 λ_2)，具体问题要具体分析. 如果我们运用根与系数关系来求 λ_2，有

$$\lambda_2=\frac{c}{a\lambda_1}=1.$$

求得的结果就正确.

在电子计算机上求 $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ 的根是按下列步骤计算的(退化的情况 $a=0, b=0$ 另考虑).

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-b-\operatorname{sign}(b)\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ \lambda_2 = \dfrac{c}{a\lambda_1}. \end{cases}$$

其中当 $b>0$ 时 $\operatorname{sign}(b)=1$, $b<0$ 时 $\operatorname{sign}(b)=-1$, 在学完本章的若干基本理论后自然明白上述公式的合理性.

例 3. 给定 $g(x)=10^7(1-\cos x)$,试用四位数学用表求 $g(2°)$ 的近似值.

解 甲用下列步骤解题: 由于 $\cos 2°\approx 0.9994$ 故

$$g(2°)=10^7(1-\cos 2°)\approx 10^7(1-0.9994)$$
$$=6000.$$

乙则另法计算: 由于

$$g(x)=10^7(1-\cos x)\equiv 2\times 10^7\sin^2\frac{x}{2},$$

查表 $\sin 1°\approx 0.0175$, 故

$$g(2°)=2\times 10^7\sin^2 1°\approx 2\times 10^7(0.0175)^2\approx 6125.$$

甲、乙都承认下列事实，共用一本数学手册，表的每个数（即 $\cos x$, $\sin x$)都准确到小数后第四位，答案为什么不一致？谁的答案较正确呢？我们将在§3回答这个问题.

§2 误差的分类

我们对于客观世界量的认识是逐步深入的. 通过科学实验，获得了客观量的许多现象和一大批数据，在这种感性认识的基础上，就可以抓住主要矛盾，抛开次要因素，建立起量的**数学模型**. 诚然对许多物理工程问题以至经济的、社会的问题，建立起来的模型总是近似的，其误差称为**模型误差**. 在数学模型中往往包含了若干参变量，如物体比重、阻力系数、热量交换系数等等，这种量往

往是通过观测定下来的，因此也带来了误差，这种误差称为**观测误差**. 当实际问题的数学模型很复杂，因而不能获得其精确解时，就必须建立一套行之有效的近似方法即数值方法，模型的准确解与数值方法准确解之差称为**方法误差**或叫**截断误差**. 由于实际计算是按有限位数进行的，所以数值解的每一步都可能有误差，这种误差称为**舍入误差**.

例 4. 记 L_t 是金属棒在温度 t 时的长度，L_0 是在 0 度时金属棒的长度，假设我们建立起数学模型 l_t 为

$$L_t \approx l_t = L_0(1+\alpha t+\beta t^2),$$

这里 $L_0\equiv 1, \alpha, \beta$ 为参数，有如下估计

$$\alpha = 0.001253 \pm 10^{-6}, \quad \beta = 0.000068 \pm 10^{-6}.$$

则 $L_t - l_t$ 就称为模型误差. 10^{-6} 就是 α, β 的观测误差. 下面讨论当 $t=10$ 时怎样求 l_t 的近似值. 因为

$$0.001252 \leqslant \alpha \leqslant 0.001254,$$

又

$$0.000067 \leqslant \beta \leqslant 0.000069,$$

所以

$$1+0.001252\times 10+0.000067\times 100 \leqslant l_{10} \leqslant 1+0.001254\times 10+0.000069\times 10^2,$$

即

$$1.019220 \leqslant l_{10} \leqslant 1.019440.$$

上述的 l_{10} 估计式，就是数值方法计算结果的误差范围.

例 5. 设圆的半径的测量值是 25.3 米，假设误差不超过 0.1 米，即

$$r_0 = r+\varepsilon,$$

这里 r 为测量值，r_0 为准确值，ε 为测量误差，且 $|\varepsilon| \leqslant 0.1$ 米. 现在我们来研究圆的面积误差 E,

$$E = \pi r_0^2 - \pi r^2,$$

从而有

$$|E| = \pi|r_0-r|\cdot|r_0+r| = \pi|\varepsilon|(r_0+r)$$

$$\leqslant 0.1\pi(2r+0.1)\leqslant 16.0(\text{米}^2).$$

这就说明若半径有 0.1 米误差，面积误差将不超过 16 平方米.

例 6. 求级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j j!}$ 之值，若实际计算用 $\sum_{j=0}^{5}\frac{1}{2^j j!}$ 来近似代替，那么数值方法的截断误差 R 满足:

$$R=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j j!}-\sum_{j=0}^{5}\frac{1}{2^j j!}=\sum_{j=6}^{\infty}\frac{1}{2^j j!}.$$

例 7. 在实际运算时用 0.33333 代替了 $\frac{1}{3}$，则舍入误差

$$R=\frac{1}{3}-0.33333=0.00000333\cdots.$$

引入记号

u　　某一客观量，

u_1　　数学模型准确解，

u_2　　由于模型中参数的误差所得的解，

u_3　　对上述参数模型建立的数值方法准确解，

u_4　　运用计算机作实际运算所获得的数值方法近似解.

我们最终目的是研究 u 与 u_4 的误差，它可分为几个步骤进行. 因为

$$u-u_4=(u-u_1)+(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+(u_3-u_4),$$

其中 $u-u_1$ 为模型误差，u_1-u_2 为模型参数误差，u_2-u_3 为方法误差，u_3-u_4 为计算误差(由舍入误差引起). 假若我们运用某种物理或数学手段获得这几个误差的估计为

$$|u-u_1|<\varepsilon_1,\ |u_1-u_2|<\varepsilon_2,$$
$$|u_2-u_3|<\varepsilon_3,\ |u_3-u_4|<\varepsilon_4,$$

那么 $u-u_4$ 的上界估计即由这四部分合并而成，有

$$|u-u_4|\leqslant|u-u_1|+|u_1-u_2|+|u_2-u_3|+|u_3-u_4|$$