

高等学校教学用书

数学物理方法

梁 昆 森 編

人民教育出版社

高等学校教学用书



数学物理方法

梁昆森 編

人民教育出版社

本书是为综合大学物理专业编写的。需要较多数学的工科亦可参考。包含复变函数论，傅里叶展开，数学物理方程三部分，而后者为全书中心内容。加强了将物理问题“翻译”为数学问题这一环节。着重讨论了分离变量法，系统地说明了它在各种情况下的运用。

数 学 物 理 方 法

梁 昆 森 编

人民教育出版社出版 高等学校教学用书编辑组
北京宣武门内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业许可证出字第2号)

京华印书局印装 新华书店发行

统一书号：13010·762 开本850×1168¹/₃₂ 印张13⁴/₁₆

字数 366,000 印数 0001—15,000 定价(6) 1.80

1960年6月第1版 1960年6月北京第1次印刷

目 录

序言 1

第一篇 复变函数論

第一章 复变函数 3

§ 1. 复数和它的运算(3) § 2. 复变数(6) § 3. 复变数函数(7)
§ 4. 微商(导数)(9) § 5. 解析函数(14) § 6. 平面标量場与等温
网(16) § 7. 多值函数(20)

第二章 复变函数的积分 23

§ 8. 复变函数的积分(23) § 9. 科希定理(24) § 10. 不定积分概
念(27) § 11. 科希公式(28) § 12. 模数原理与刘維定理(31)

第三章 无穷級数 解析延拓 孤立奇点 23

§ 13. 无穷級数(33) § 14. 变項級数(34) § 15. 幂級数(37) § 16.
泰勒展开(39) § 17. 罗朗展开(41) § 18. 例(46) § 19. 多值函
数在有限阶支点的邻域中的展开式(49) § 20. 解析函数的零点(50)
§ 21. 解析延拓(51) § 22. 利用泰勒級数具体进行解析延拓(53)
§ 23. 孤立奇点(56) § 24. 可去奇点(56) § 25. 极点(57) § 26.
本性奇点(59) § 27. 有限阶支点(60) § 28. 无限远点(61)

第四章 留数定理及其应用 63

§ 29. 留数定理(63) § 30. 計算留数的方法(65) § 31. 留数定理应
用于計算某些实变函数定积分(66) § 32. 第一类型 $\int_0^{2\pi} R(\cos x,$
 $\sin x)dx(67)$ § 33. 第二类型 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx(68)$ § 34. 第三种类
型 $\int_0^{\infty} F(x)\cos mx dx$ 或 $\int_0^{\infty} G(x)\sin mx dx(70)$ § 35. 第四
类型 $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx(\alpha \text{ 非整数})(77)$ § 36. 其他利用留数定理計算
的定积分的例子(80) § 37. δ 函数, 实变函数的路积分表示(82)
§ 38. 幅角原理(86)

第五章 运算微积 89

§ 39. 符号法(89) § 40. 拉普拉斯变换(90) § 41. 微商与积分式的
象函数(93) § 42. 拉普拉斯变换的反演(95) § 43. 运算微积的应

用例(101)

第二篇 傅里叶展开

§1. 以 2π 为周期的函数的展开问题(104) §2. 狄里希利定理(111)
§3. 以 2π 为周期的函数展开例(113) §4. 周期为任意值的函数的展开
问题(118) §5. 一定区间上的函数的展开问题(131) §6. 复数形式的
傅里叶级数(126) §7. 非周期函数的傅里叶积分(127) §8. 广义傅
里叶展开·希耳伯空间的概念(132) §9. 多重傅里叶展开(133)

第三篇 数学物理方程

第一章 数学物理方程的提出与分类.....139

§1. 引言(139) §2. 数学物理方程的导出(141) §3. 定解条件(150)
§4. 衔接条件(162) §5. 线性二阶偏微分方程(164) §6. 二个自变
量情况下线性方程的分类和化为标准形式(165) §7. 多自变量的情形
(169) §8. 常系数线性方程(171) §9. 叠加原理(172)

第二章 行波法.....173

§10. 达朗伯公式(173) §11. 反射波(178) §12. 有界弦与有界
杆(183) §13. 两段的衔接(185) §14. 三维无界空间的振动·泊松
公式(187) §15. 反射波(191) §16. 降维法(192) §17. 无界弦或
杆强迫振动(195) §18. 三维无界空间中的强迫振动·推迟势(199)

第三章 驻波法 分离变量法概要202

§19. 有界弦或杆的自由振动(202) §20. 非齐次边界条件的处理(208)
§21. 有界杆的导热问题(无热源)(210) §22. 矩形膜自由振动(212)
§23. 杆的自由横振动(215) §24. 没有初始条件的问题(218) §25.
矩形域中的调和函数(220) §26. 有界弦(或杆)的强迫振动(222)
§27. 有界杆的导热问题(有热源)(225) §28. 泊松方程(229) §29.
正交曲线坐标系中的拉普拉斯算符(230) §30. 圆形域中的调和函
数(235) §31. 特殊函数微分方程的出现(239)

第四章 二阶常微分方程的级数解法 本征值问题247

§32. 二阶常微分方程(247) §33. 常点邻域的级数解(248) §34. 奇点·
正则奇点邻域中的级数解法(256) §35. 斯特姆-刘维尔本征值问题(266)

第五章 球函数274

§36. 球函数(274) §37. 勒让德多项式(276) §38. 综合勒让德函
数(281) §39. 按球函数展开(285) §40. 球函数的应用(288)

第六章 柱函数295

§41. 柱函数(295) §42. 贝塞耳函数(297) §43. 虚宗量的贝塞耳

函数(修正貝塞耳函数)(305) § 44. 貝塞耳函数的应用(306) § 45. 球貝塞耳函数(312) § 46. 柱函数的路积分表示与渐近公式(316) § 47. 柱函数的应用例(329)	
第七章 分离变量法結束語	331
§ 48. 分离变量法总结(331) § 49. 无限长弦上的振动(331) · § 50. 无限长杆的导热問題(或一維无界空間的扩散問題)(333)	
第八章 数学物理方程的解的积分公式	333
§ 51. 格林公式及其应用于拉普拉斯方程与泊松方程(333) § 52. 推广的格林公式及其应用(343)	
第九章 复变函数論应用于数学物理方程	340
§ 53. 解析函数与調和函数(350) § 54. 保角变换的基本性质(353) § 55. 綫性变换(365) § 56. 幂函数与根式(335) § 57. 指数函数与对数函数(368) § 58. 分式綫性变换(368) § 59. 儒閣夫斯其函数(374) § 60. 施瓦茲-克利斯多非变换(378) § 61. 三維空間中的保角变换——逆矢徑变换(383) § 62. 运算微分应用于求解带有初始条件的定解問題(385)	
第十章 近似方法簡略介紹	391
§ 63. 近似方法的重要性(391) § 64. 作为近似方法的变分法(391) § 65. 模拟法(396) § 66. 有限差分法(396)	
附录	400
一、拉普拉斯变换函数表(400) 二、勒讓德多項式 $P_l(x)$ (402) 三、合勒締讓德函数(403) 四、球函数的加法公式(404) 五、貝塞耳函数(406) 六、諾埃曼函数(407) 七、函数 $K_0(x)$ 与 $K_1(x)$ 的值(410) 八、車貝雪夫-厄密多項式(411) 九、車貝雪夫-拉蓋尔多項式(413)	
参考書目	416
人名对照表	417

序 言

本書是为綜合大学物理专业編写的。它包含三个部分：复变函数論，傅里叶展开，数学物理方程。

对于物理专业来說，我們認為，“数学物理方法”不宜单純作为数学課程来进行講授与学习。它既是数学課程，又是物理課程。在这样一門課程中，固然不應該将数学的謹严性弃置不顧，另一方面却也不宜在数学謹严上作过多的要求。虽然在复变函数，傅里叶展开，数学物理方程等方面已有不少著名的优秀專門著作，我們仍然感到，在数学理論上不花費过多力量，以鮮明的思路引导讀者迅速掌握这些数学工具并应用于物理問題，这样一份教材还是很需要的。本書就以此作为努力目标。

第一篇复变函数論，除基本原理以外，着重談到共軛調和函数，留数定理，运算微积等方面的应用。

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变量法作准备的。当然，傅里叶展开的应用并不限于分离变量法，它是分析許多物理过程的有力工具。

第三篇数学物理方程是全書的中心內容。它研究各种各样的物理过程。其第一个环节在于将物理問題“翻譯”为数学問題，一般往往沒有加以重視，本書中加强了这一环节(第三篇 §§ 2—4)。其第二个环节就是求解从物理問題翻譯出来的数学問題。在各种解法中，本書突出了最基本的重要方法——分离变量法。系統地討論了各种不同情况下如何运用分离变量法(第三篇第三——七章)。我們認為，这样有利于学生較熟練地用分离变量法去解数学物理問題。特別是特殊函数与分离变量法熔为一体，从分离变量法引起特殊函数，研究了特殊函数之后

又回到分离变量法。在特殊函数的教学中,目的性比較鮮明,也有利于培养学生运用特殊函数解决問題的能力。

除了分离变量法之外,行波法(第三篇第二章),保角变换与运算微积方法(第三篇第九章)也是很重要的方法。其次,我們也介紹了由格林公式导出的解的积分公式(第三篇第八章)与近似方法(第三篇第十章)。

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动,有源的导热或扩散問題,有电荷的电場等等),我們从物理的推理引出解題的綫索(第三篇 §§ 17—18, 26—28),也是本書特色之一。

在 1958 年的教学改革中,我們檢查了过去的教材,并根据我們对教学改革的精神的体会,着手編写这份教材。先后在两个年級中进行教学实践,又根据实践效果再三修改补充。在編写、修改过程中,参加該項教学实践的教师与学生提出不少意見。特别是姚希賢,柯善哲同志还专门进行了几次討論。在抄写繪图方面,1956 級理論物理专门化全体同学給予了很大帮助。

編者深感限于水平,一定有很多不妥当处以及錯誤和缺点,非常盼望同志們的批評指正。

1959 年 10 月 1 日于南京大学

第一篇 复变函数論

第一章 复变函数

§1. 复数和它的运算

复数和它的运算，是我們已經学过的。現在作一次扼要的复习。熟練地掌握基本运算是很重要的。

一个复数总可以表为某个实数与某个純虚数之和

$$z = x + iy. \quad (1.1)$$

其中 x 和 y 分別称为該复数的实部和虚部(記作 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$)。我們如將 x, y 看作平面上的点的直角坐标，那就將复数和平面上的点一一对应起来了。这种对应也可以換一种方式来叙述。从平面上坐标原点到平面上某个点引一矢量，如果我們將 x, y 看作这矢量的分量，那也就將复数和平面上的点一一对应起来了。这个平面称为复数平面，所說的直角坐标系的坐标軸称为实軸与虚軸。

如果上面所說的矢量的长度为 ρ ，从实軸的正方向逆鐘向到該矢量的正方向的角度为 φ (图 1)，則

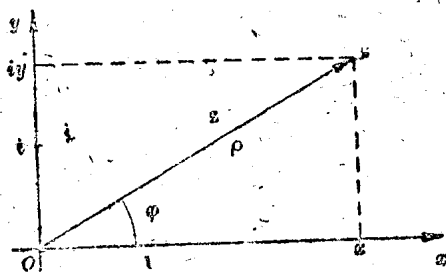


图 1

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.2)$$

因而复数 z 也可表为

$$z = x + iy = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.3)$$

这是复数的第二种表达方式,称为三角式。 ρ 称为复数的模(记作 $|z|$), φ 称辐角(记作 $\arg z$)。同一个复数的辐角可以差 2π 的整倍数。复数“零”的辐角没有明确意义。

从三角式,我们得到第三种表达方式

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (1.4)$$

称为指数式。

一个复数 z 的共轭复数 z^* , 指的是对应的点对实轴的反映,即

$$z^* = x - iy = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}. \quad (1.5)$$

关于前面所谈到的复数和平面上的点一一对应,应该补充指出:通常将复数平面上的无限远看作一点,并且称之为无限远点。关于无限远点,可以如下理解。把一个球放在复数平面上,使它以南极 S 和平面相切于原点。在复数平面上任取一点 A , 将 A 与球的北极 N 联接起来,交球面于 A' 。如此可使复数平面中的有限远点与球面上 N 以外的点一一对应起来,平面上并没有有限远点和 N 对应。这种对应关系称为测地投影,这个球称为复数球(图2)。现在设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动,于是对应的点 A' 沿着一根子午线向北极 N 趋近。如 A 沿另一根过原点直线移向无限远, A' 就沿另一子午线向北极 N 趋近。其实不论 A 按什么方式向无限远

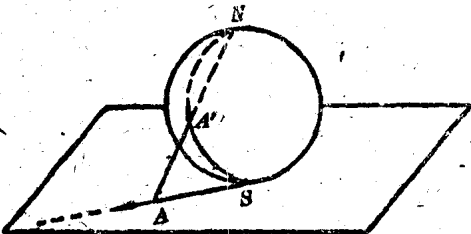


图 2

的直线向无限远移动,于是对应的点 A' 沿着一根子午线向北极 N 趋近。如 A 沿另一根过原点直线移向无限远, A' 就沿另一子午线向北极 N 趋近。其实不论 A 按什么方式向无限远

移动, A' 总按某种相应的方式趋近于 N 。因此, 可以将平面上的无限远看作一点, 即与复数球上北极相应的那一点。无限远点 $z = \infty$ 的幅角也没有明确意义。不包括无限远点的平面称为开平面; 包括无限远点的平面称为闭平面。

至于复数的运算是如下进行的。

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的和 $z_1 + z_2$ 被定义为:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.6)$$

因而明显可见加法的交换律和结合律是成立的。从对应的矢量来看, 两个复数的求和对应于两个矢量的合成。从而, 又可以知道

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.7)$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的差 $z_1 - z_2$ 被定义为 z_1 与 $-z_2 = -x_2 - iy_2$ 的和。所以

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.8)$$

并且容易看出

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.9)$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的积 $z_1 z_2$ 被定义为

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.10)$$

很容易验证, 乘法的交换律, 结合律, 分配律都是成立的。由此, 可以将定义(1.10)理解为

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

如改用三角式或指数式来进行计算, 则(1.10)就化为

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (1.11)$$

或

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.12)$$

有时这样比较方便。

应当注意区别 $|z|^2$ 与 z^2 。前者是复数 z 的模的平方, 它等于 $z z^*$ 。后者是复数 z 的自乘, 它等于 $z z$ 。

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的商 $\frac{z_1}{z_2}$ 被定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.13)$$

很容易验证，除法确是乘法的逆运算。定义(1.13)又可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

如改用三角式或指数式来进行计算，则(1.13)就化为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (1.14)$$

或
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1.15)$$

有时这样比较方便。

n (整数)次幂 z^n 可以根据乘法定义(1.10)进行连乘而得出。如改用三角式或指数式进行计算则

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.16)$$

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}. \quad (1.17)$$

n (整数)次根式 $\sqrt[n]{z}$ 以用三角式或指数式进行计算比较方便

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}. \quad (1.18)$$

§ 2. 复变数

如果变数 $z = x + iy$ 与常数 $\alpha = a + ib$ 之差的模

$$|z - \alpha| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0,$$

我们就说 z 以 α 为极限。记为

$$z \rightarrow \alpha.$$

但我们知道

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0$$

完全相当于

$$\begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b, \end{cases}$$

所以也可以說

$$z \rightarrow \alpha \text{ 等价于 } \begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b. \end{cases}$$

从对应的点来看,也就是

$$z \text{ 点} \rightarrow \alpha \text{ 点.}$$

既然一个复变数的极限問題归结为两个实变数(这两个实变数就是該复变数的实部和虚部)的极限問題,那么在实变函数理論中关于极限的和、差、积、商的定理,关于极限存在的科希判据,显然也都适用于复变数,我們就不在这里一一叙述了。

§ 3. 复变数函数

当复变数 z 在复数平面中某个区域 B 上变动时,如复变数 w 的值随复变数 z 的值而定,就称 w 为区域 B 上的 z 的函数, z 则为 w 的宗量,記为

$$w = f(z).$$

例如多項式

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

有理函数

$$w = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m},$$

无理函数

$$w = \sqrt{a_0 + a_1 z},$$

超越函数

$$w = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$w = \ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

$$w = z^n = e^{n \ln z} \quad (n \text{ 不限于整数})$$

应当注意： $\sin z$ 或 $\cos z$ 的模可以大于 1，例如可以取 5, 3.2 之类的值；当 z 是负的实数时候， $\ln z$ 也有意义（取复数值）。若限于实数领域这些都是不可能的。在实数领域内， $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ ，负数的对数没有意义。

说到区域，我们将规定它并不划分为小块（区域是连通的）。可以区别两种点：**内点**和**境界点**。在直观上，内点和境界点的意义是很明显的。确切说来，一个点不仅本身属于这区域，而且它有一个邻域，这邻域中各点全都属于这区域，那么这个点就是内点。如果在一个点的任意小的邻域中总有区域的内点，那么这个点就是境界点。通常讲到**开区域**或**区域**时，指的是区域的内点的全体。如果将境界点也包括在内，我们就称为**闭区域**。

我们暂时限于讨论单值函数，每给定定量的一个值，函数也只有一个值。关于多值函数我们将等到 § 7 再讨论。

设在某个区域上定义了一个函数 $w = f(z)$ 。在区域内取点 z_0 ，如果

$$\text{当 } z \rightarrow z_0 \text{ 时, } f(z) \rightarrow f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点**连续**。如 $f(z)$ 在区域的所有内点都连续，就称 $f(z)$ 在区域上**连续**。

将 $w = f(z)$ 分为实部和虚部

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

于是连续的定义就等价于

$$\text{当 } \begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{cases} \text{ 时, } \begin{cases} u(x, y) \rightarrow u(x_0, y_0) \\ v(x, y) \rightarrow v(x_0, y_0) \end{cases}.$$

因而一个复变函数在 z_0 点的连续问题归结为两个二元实变函数（它们是该复变函数的实部和虚部）在 (x_0, y_0) 点的连续问题。利用这个方法，很容易知道多项式 $e^z, \sin z, \cos z$ 在开平面上连续，有理分式也在开

平面上連續(分母次数高于或等于分子次数的有理分式在閉平面上連續),但分母的零点應該除开在外。

当复变函数 $w=f(z)$ 在閉区域上有定义的时候,还会引起关于 $f(z)$ 在境界点 z_0 的連續性問題。如果当 z 从区域内部或沿境界綫趋近于 z_0 时, $f(z) \rightarrow f(z_0)$, 我們就說 $f(z)$ 在 z_0 点(这里說的是境界点)連續。类似于实变数,下列定理对于复变函数也成立:如 $f(z)$ 在有界閉区域上連續,則必在这区域上一致連續。

§ 4. 微商(导数)

如果不論 Δz 按什么方式趋于零,比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

都趋近于同一个有限的极限,这个极限就称为 $f(z)$ 在 z 点的微商 $f'(z)$, 并且說 $f(z)$ 在 z 点是單演的(或可微的)。显然,單演的必是連續的,仅仅連續却未必單演。

复变函数的微商定义形式上完全类似于实变函数的微商,因而在实变函数理論中关于微商的一些規則和結果往往可应用于复变函数,我們不在这里一一証明,以免累贅。例如

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}(w \pm u) = \frac{dw}{dz} \pm \frac{du}{dz}, \\ \frac{d}{dz}(wu) = w \frac{du}{dz} + u \frac{dw}{dz}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{w}{u}\right) = \frac{uw' - wu'}{u^2}, \\ \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}, \\ \frac{d}{dz}F(w) = \frac{dF}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \\ \frac{d}{dz}e^z = e^z, \\ \frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \\ \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \\ \frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}, \end{array} \right.$$

等等。

必須指出：复变函数的微商的定义，虽然形式上和实变函数微商定义类似，实质上却有很大的不同。实变数 Δx 只能在实轴上趋于零，而复变数 Δz 却可以在复数平面上以按任意方式趋于零。因而可以知道，复变函数微商的存在是一种严格得多的要求。我们在 § 11 还将再次提起这个问题。

现在我们来研究复变函数 $f(z)$ 在点 z 为单演的必要条件。先令 Δz 沿着平行于实轴的方向趋于零，即 $\Delta y \equiv 0, \Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ ，于是

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

再令 Δz 沿着平行于虚轴的方向趋于零，即 $\Delta x \equiv 0, \Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ ，于是

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} + i \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \right\} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

如果 $f(z)$ 在 z 点是单演的，那么上面两个极限都必须存在，而且必须相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.3)$$

这个等式的实部，虚部必须分别相等，即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (4.4)$$

这两个等式通常称为科希-里曼方程。因此复变函数在点 z 为单演的必要条件是：在点 (x, y) , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 都存在而且满足科希-里曼方程。

例如处处连续函数 $w = \operatorname{Re} z = x$, 这里 $u = x$, $v = 0$ 。于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

在任一点都存在,但在任一点都不满足科希-里曼方程,所以处处连续函数 $w = \operatorname{Re} z$ 是处处非单演的。事实上,当 $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \rightarrow 1$, 而当 $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{0}{i\Delta y} = 0 \rightarrow 0$ 。

但是应该注意到:虽然凡不满足科希-里曼方程的复变函数是非单演的,但是满足科希-里曼方程的却未必就是单演的,也就是说科希-里曼方程还不是函数单演的充分条件。这是很容易理解的,因为科希-里曼方程只保证了当 $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ 时与 $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ 趋于同一极限,却没有能保证当 Δz 按任何方式趋于零时, $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ 都趋于同一极限。

例如复变函数 $w = \sqrt{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z} = \sqrt{xy}$ 。这里 $u(x, y) = \sqrt{xy}$, $v(x, y) = 0$ 。在原点,我们有

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{z=0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{z=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{z=0} = 0.$$