高等学校教学用書

数学物理方法

梁昆淼編

人民教育出版社

高等学校教学用書

数学物理方法

梁昆淼編

人民教育出版社

本书是为綜合大学物理专业編写的。需要較多数学的工科亦可参考。包含复变函数論，傅里叶展开，数学物理方程三部分，而后者为全书中心內容。加强了将物理問題“翻譯”为数学問題这一环节。着重討論了分离变量法，系統地説明了它在各种情况下的运用。

数学物理方法

梁昆淼編

人民教育出版社出版 高等学校教学用書編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版业营业許可証出字第2号)

京华印书局印装　新华书店发行

統一書号：13010·762　开本 $850\times1168\ 1/32$　印张 $13\ 4/16$

字数 366,000　印数 0001—15,000　定价(6)￥1.30

1960年6月第1版　1960年6月北京第1次印刷

目　录

04795

第二篇 傅里叶展开

第三篇 数学物理方程

序 言

本書是为綜合大学物理专业編写的。它包含三个部分：复变函数論，傅里叶展开，数学物理方程。

对于物理专业来說，我們認为，"数学物理方法"不宜单純作为数学課程来进行講授与学习。它既是数学課程，又是物理課程。在这样一門課程中，固然不应該将数学的謹严性弃置不顧，另一方面却也不宜在数学謹严上作过多的要求。虽然在复变函数，傅里叶展开，数学物理方程等方面已有不少著名的优秀专門著作，我們仍然感到，在数学理論上不花費过多力量，以鮮明的思路引导讀者迅速掌握这些数学工具并应用于物理問題，这样一份教材还是很需要的。本書就以此作为努力目标。

第一篇复变函数論，除基本原理以外，着重談到共軛調和函数，留数定理，运算微积等方面的应用。

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变量法作准备的。当然，傅里叶展开的应用并不限于分离变量法，它是分析許多物理过程的有力工具。

第三篇数学物理方程是全書的中心內容。它研究各种各样的物理过程。其第一个环节在于将物理問題"翻譯"为数学問題，一般往往沒有加以重視，本書中加强了这一环节（第三篇 §§ 2—4）。其第二个环节就是求解从物理問題翻譯出来的数学問題。在各种解法中，本書突出了最基本的重要方法——分离变量法。系統地討論了各种不同情况下如何运用分离变量法（第三篇第三——七章）。我們認为，这样有利于学生較熟練地用分离变量法去解数学物理問題。特别是特殊函数与分离变量法熔为一体，从分离变量法引起特殊函数，研究了特殊函数之后

又回到分离变量法。在特殊函数的教学中，目的性比較鮮明，也有利于培养学生运用特殊函数解决問題的能力。

除了分离变量法之外，行波法(第三篇第二章)，保角变換与运算微积方法(第三篇第九章)也是很重要的方法。其次，我們也介紹了由格林公式导出的解的积分公式(第三篇第八章)与近似方法(第三篇第十章)。

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动，有源的导热或扩散問題，有电荷的电場等等)，我們从物理的推理引出解題的綫索(第三篇§§ 17—18, 26—28)，也是本書特色之一。

在1958年的教学改革中，我們檢查了过去的教材，并根据我們对教学改革的精神的体会，着手編写这份教材。先后在两个年級中进行教学实踐，又根据实踐效果再三修改补充。在編写、修改过程中，参加該項教学实踐的教师与学生提出不少意見。特别是姚希賢，柯善哲同志还专門进行了几次討論。在抄写繪图方面，1956級理論物理专門化全体同学給予了很大帮助。

編者深感限于水平，一定有很多不妥当处以及錯誤和缺点，非常盼望同志們的批評指正。

1959年10月1日于南京大学

第一篇 复变函数論

第一章 复变函数

§1. 复数和它的运算

复数和它的运算，是我們已經学过的。現在作一次扼要的复习。熟練地掌握基本运算是很重要的。

一个复数总可以表为某个实数与某个純虛数之和

$$z=x+iy. \tag{1.1}$$

其中 x 和 y 分别称为該复数的实部和虛部(記作 $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$)。我們如将 x, y 看作平面上的点的直角坐标，那就将复数和平面上的点一一对应起来了。这种对应也可以換一种方式来叙述。从平面上坐标原点到平面上某个点引一矢量，如果我們将 x, y 看作这矢量的分量，那也就将复数和平面上的点一一对应起来了。这个平面称为复数平面，所說的直角坐标系的坐标軸称为实軸与虛軸。

如果上面所說的矢量的长度为 ρ, 从实軸的正方向逆鐘向到該矢量的正方向的角度为 φ (图 1), 則

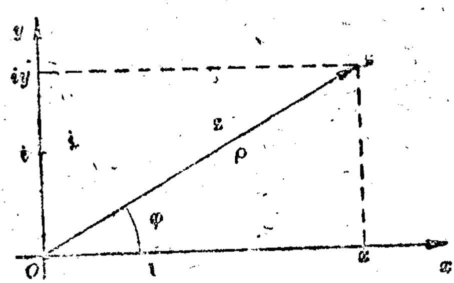

图 1

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \varphi=\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right),\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}\tag{1.2}$$

因而复数 z 也可表为

$$z=x+iy=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).\tag{1.3}$$

这是复数的第二种表达方式，称为**三角式**。ρ 称为复数的模（記作 $|z|$），φ 称**輻角**（記作 $\arg z$）。同一个复数的輻角可以差 2π 的整倍数。复数"零"的輻角沒有明确意义。

从三角式，我們又得到第三种表达方式

$$z=\rho e^{i\varphi}\tag{1.4}$$

称为**指数式**。

一个复数 z 的共軛复数 z^*，指的是对应的点对实軸的反映，即

$$z^*=x-iy=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-i\varphi}.\tag{1.5}$$

关于前面所談到的复数和平面上的点一一对应，应該补充指出：通常将复数平面上的无限远看作一点，并且称之为**无限远点**。关于无限远点，可以如下理解。把一个球放在复数平面上，使它以南极 S 和平面相切于原点。在复数平面上任取一点 A，将 A 与球的北极 N 联接起来，交球面于 A'。如此可使复数平面中的有限远点与球面上 N 以外的点一一对应起来，平面上并沒有有限远点和 N 对应。这种对应关系称为測地投影，这个球称为复数球（图 2）。現在設想 A 点沿着一根通过原点的直綫向无限远移动，于是对应的点 A' 沿着一根子午綫向北极 N 趋近。如 A 沿另一根过原点直綫移向无限远，A' 就沿另一子午綫向北极 N 趋近。其实不論 A 按什么方式向无限远

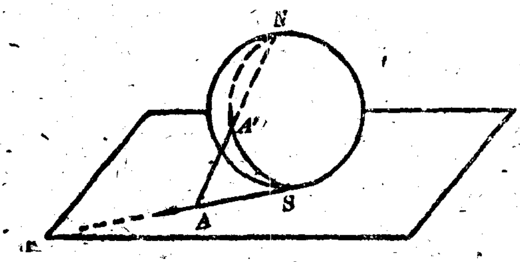

图 2

移动，A' 总按某种相应的方式趋近于 N。因此，可以将平面上的无限远看作一点，即与复数球上北极相应的那一点。无限远点 $z=\infty$ 的幅角也沒有明确意义。不包括无限远点的平面称为开平面；包括无限远点的平面称为闭平面。

至于复数的运算是如下进行的。

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和 z_1+z_2 被定义为：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \tag{1.6}$$

因而明显可见加法的交换律和結合律是成立的。从对应的矢量来看，两个复数的求和对应于两个矢量的合成。从而，又可以知道

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.7}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的差 z_1-z_2 被定义为 z_1 与 $-z_2=-x_2-iy_2$ 的和。所以

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.8}$$

并且容易看出

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{1.9}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的积 z_1z_2 被定义为

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.10}$$

很容易驗証，乘法的交换律，結合律，分配律都是成立的。由此，可以将定义(1.10)理解为

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

如改用三角式或指数式来进行計算，则(1.10)就化为

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \tag{1.11}$$

或

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.12}$$

有时这样比較方便。

应当注意区别 $|z|^2$ 与 z^2。前者是复数 z 的模的平方，它等于 zz^*。后者是复数 z 的自乘，它等于 zz。

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的商 $\frac{z_1}{z_2}$ 被定义为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \qquad (1.13)$$

很容易驗証，除法确是乘法的逆运算。定义(1.13)又可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

如改用三角式或指数式来进行計算，則(1.13)就化为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (1.14)$$

或

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (1.15)$$

有时这样比較方便。

n（整数）次冪 z^n 可以根据乘法定义(1.10)进行連乘而得出。如改用三角式或指数式进行計算則

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1.16)$$

$$z^n=\rho^n e^{in\varphi}. \qquad (1.17)$$

n（整数）次根式 $\sqrt[n]{z}$ 以用三角式或指数式进行計算比較方便

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}\,e^{\frac{i\varphi}{n}}. \qquad (1.18)$$

§2. 复变数

如果变数 $z=x+iy$ 与常数 $\alpha=a+ib$ 之差的模

$$|z-\alpha|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0,$$

我們就說 z 以 α 为極限。記为

$$z\to\alpha.$$

但我們知道

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$$

完全相当于

$$\begin{cases} x\to a \\ y\to b, \end{cases}$$

所以也可以說

$$z\to\alpha \text{ 等价于 } \begin{cases} x\to a \\ y\to b. \end{cases}$$

从对应的点来看,也就是

$$z\text{ 点}\to \alpha\text{ 点}.$$

既然一个复变数的极限問題归結为两个实变数(这两个实变数就是該复变数的实部和虚部)的极限問題,那么在实变函数理論中关于极限的和、差、积、商的定理,关于极限存在的科希判据,显然也都适用于复变数,我們就不在这里一一叙述了。

§3. 复变数函数

当复变数 z 在复数平面中某个区域 B 上变动时,如复变数 w 的值随复变数 z 的值而定,就称 w 为区域 B 上的 z 的函数,z 則为 w 的宗量,記为

$$w=f(z).$$

例如多項式

$$w=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,$$

有理函数

$$w=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n},$$

无理函数

$$w=\sqrt{a_0+a_1z},$$

超越函数

$$w=e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

$$w=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$w=\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z,$$

$$w=z^n=e^{n\ln z}.\qquad (n\text{ 不限于整数})$$

应当注意：$\sin z$ 或 $\cos z$ 的模可以大于 1，例如可以取 5，3.2 之类的值；当 z 是負的实数时候，$\ln z$ 也有意义(取复数值)。若限于实数領域这些都是不可能的。在实数領域內，$|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$，負数的对数沒有意义。

說到区域，我們将規定它并不划分为小块(区域是連通的)。可以区別两种点：**內点**和**境界点**。在直观上，內点和境界点的意义是很明显的。确切說来，一个点不仅本身屬于这区域，而且它有一个邻域，这邻域中各点全都屬于这区域，那么这个点就是內点。如果在一个点的任意小的邻域中总有区域的內点，那么这个点就是境界点。通常講到**开区域**或**区域**时，指的是区域的內点的全体。如果将境界点也包括在內，我們就称为**閉区域**。

我們暫时限于討論单值函数，每給定宗量的一个值，函数也只有一个值。关于多值函数我們将等到 §7 再討論。

設在某个区域上定义了一个函数 $w=f(z)$。在区域內取点 z_0，如果

$$\text{当}\qquad z\to z_0\text{ 时，}\qquad f(z)\to f(z_0),$$

則称 $f(z)$ 在 z_0 点連續。如 $f(z)$ 在区域的所有內点都連續，就称 $f(z)$ 在区域上連續。

将 $w=f(z)$ 分为实部和虛部

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

于是連續的定义就等价于

$$\text{当}\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}\text{时，}\begin{cases}u(x,y)\to u(x_0,y_0)\\ v(x,y)\to v(x_0,y_0).\end{cases}$$

因而一个复变函数在 z_0 点的連續問題归結为两个二元实变函数(它們是該复变函数的实部和虛部)在(x_0,y_0)点的連續問題。利用这个方法，很容易知道多項式 e^z, $\sin z$, $\cos z$ 在开平面上連續，有理分式也在开

平面上連續(分母次数高于或等于分子次数的有理分式在閉平面上連續),但分母的零点应該除开在外。

当复变函数 $w=f(z)$ 在閉区域上有定义的时候，还会引起关于 $f(z)$ 在境界点 z_0 的連續性問題。如果当 z 从区域內部或沿境界綫趋近于 z_0 时，$f(z)\to f(z_0)$，我們就說 $f(z)$ 在 z_0 点(这里說的是境界点)連續。类似于实变数，下列定理对于复变函数也成立：如 $f(z)$ 在有界閉区域上連續，則必在这区域上一致連續。

§4. 微商(导数)

如果不論 Δz 按什么方式趋于零，比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

都趋近于同一个有限的极限，这个极限就称为 $f(z)$ 在 z 点的**微商** $f'(z)$，并且說 $f(z)$ 在 z 点是**單演**的(或可微的)。显然，单演的必是連續的，仅仅連續却未必单演。

复变函数的微商定义形式上完全类似于实变函数的微商，因而在实变函数理論中关于微商的一些規則和結果往往可应用于复变函数，我們不在这里一一証明，以免累贅。例如

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dz}(w\pm u)=\frac{dw}{dz}\pm\frac{du}{dz},\\&\frac{d}{dz}(wu)=w\frac{du}{dz}+u\frac{dw}{dz},\\&\frac{d}{dz}\left(\frac{w}{u}\right)=\frac{uw'-wu'}{u^2},\\&\frac{dw}{dz}=1\Big/\frac{dz}{dw},\\&\frac{d}{dz}F(w)=\frac{dF}{dw}\cdot\frac{dw}{dz},\end{aligned}\right.\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1},\\&\frac{d}{dz}e^z=e^z,\\&\frac{d}{dz}\sin z=\cos z,\\&\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z\\&\frac{d}{dz}\ln z=\frac{1}{z},\end{aligned}\right.$$

等等。

必須指出：复变函数的微商的定义，虽然形式上和实变函数微商定义类似，实質上却有很大的不同。实变数 Δx 只能在实軸上趋于零，而复变数 Δz 却可以在复数平面上以按任意方式趋于零。因而可以知道，复变函数微商的存在是一种严格得多的要求。我們在 § 11 还将再次提起这个問題。

現在我們来研究复变函数 $f(z)$ 在点 z 为单演的必要条件。先令 Δz 沿着平行于实軸的方向趋于零，卽 $\Delta y\equiv 0$, $\Delta z=\Delta x\to 0$，于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.1}$$

再令 Δz 沿着平行于虛軸的方向趋于零，卽 $\Delta x\equiv 0$, $\Delta z=i\Delta y\to 0$，于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}-i\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}\right\}=$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.2}$$

如果 $f(z)$ 在 z 点是单演的，那么上面两个极限都必須存在，而且必須相等，卽

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.3}$$

这个等式的实部，虛部必須分别相等，卽

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{4.4}$$

这两个等式通常称为科希-里曼方程。因此复变函数在点 z 为单演的必要条件是：在点 (x, y)，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 都存在而且满足科希-里曼方程。

例如处处連續函数 $w=\operatorname{Re} z=x$，这里 $u=x$，$v=0$。于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

在任一点都存在，但在任一点都不满足科希-里曼方程，所以处处連續函数 $w=\operatorname{Re} z$ 是处处非单演的。事实上，当 $\Delta z=\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1$，而当 $\Delta z=i\Delta y\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{0}{i\,\Delta y}=0\to 0$.

但是应該注意到：虽然凡不满足科希-里曼方程的复变函数是非单演的，但是满足科希-里曼方程的却未必就是单演的，也就是說科希-里曼方程还不是函数单演的充分条件。这是很容易理解的，因为科希-里曼方程只保証了当 $\Delta z=\Delta x\to 0$ 时与 $\Delta z=i\Delta y\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ 趋于同一极限，却沒有能保証当 Δz 按任何方式趋于零时，$\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ 都趋于同一极限。

例如复变函数 $w=\sqrt{\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z}=\sqrt{xy}$。这里 $u(x, y)=\sqrt{xy}$，$v(x, y)=0$。在原点，我們有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x, 0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z=0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0, \Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0} 0=0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z=0}=0.$$