

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

高 等 数 学

(上册)

刘维翰 吴增炽 张旭辉 主编

广西人民出版社

成人高校教学研究丛书
电大数学辅导课教案精选
高等数学（上册）

刘维翰 吴增炽 张旭辉 主编

☆

广西人民出版社出版
(南宁市河堤路14号)
广西新华书店发行 广西大学印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张14.875 字数166,000

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印 数 1—8,000册

书号: 7113·834 定价: 3.00元

ISBN 7-219-00474-5

0·6

目 录

第一章	函数	(1)
教案一	函数的概念、函数的表示法与函数的性质孙美春(中央电大)	(1)
教案二	反函数与初等函数.....孙美春(中央电大)	(16)
	对于函数这一章的教学意见.....孙美春(中央电大)	(26)
第二章	极限与连续性	(33)
教案三	极限概念、极限的四则运算.....邓承永(锦州)	(33)
教案四	两个重要极限、求极限的基本方法邓承永(锦州)	(50)
教案五	函数的连续性与间断性.....邓承永(锦州)	(67)
	对于极限与连续性这一章的教学意见.....邓承永(锦州)	(82)
第三章	导数与微分	(90)
教案六	导数概念、基本公式、四则运算法则、 反函数导数法则.....张旭辉(南宁)	(90)
教案七	复合函数、隐函数、由参数方程表示的 函数的求导法.....张旭辉(南宁)	(105)
教案八	微分的概念及计算方法、高阶导数、高	

阶微分.....	吴增炽 (广西)	(122)
对于导数与微分这一章的教学意见.....		
.....	张旭辉 (南宁)	(141)
第四章 中值定理.....		(149)
教案九 微分学中值定理.....	蔡孝侔 (上海)	(149)
教案十 洛必达法则和泰勒公式.....		
.....	蔡孝侔 (上海)	(165)
对于中值定理这一章的教学意见.....		
.....	蔡孝侔 (上海)	(193)
第五章 导数的应用.....		(196)
教案十一 函数的单调性、函数的极值、曲线的 凹凸性、拐点和渐近线.....		
.....	柴全战 (辽宁)	(196)
教案十二 函数图形的描绘方法、极值应用题		
.....	柴全战 (辽宁)	(210)
对于导数的应用这一章的教学意见.....		
.....	柴全战 (辽宁)	(222)
阶段复习课教案——一元函数微分学.....		
.....	赵坚、陈卫宏 (中央电大)	(225)
第1—5章复习测验题.....	张旭辉 (南宁)	(252)
第六章 不定积分.....		(260)
教案十三 不定积分的概念、应用基本积分公式 直接积分、第一换元法.....		
.....	葛振三 (湖南)	(260)
教案十四 第二换元法、分部积分法.....		
.....	葛振三 (湖南)	(271)

教案十五	有理函数与三角函数有理式的积分	葛振三(湖南)	(294)
	对于不定积分这一章的教学意见	葛振三(湖南)	(316)
第七章	定积分		(323)
教案十六	定积分概念与基本性质、微积分基本定理	马安禄(南宁)	(323)
教案十七	定积分的换元积分法与分部积分法、广义积分	马安禄(南宁)	(337)
	对于定积分这一章的教学意见	马安禄(南宁)	(350)
第八章	定积分的应用		(355)
教案十八	定积分的应用	赖立祥(广西)	(355)
	对于定积分的应用这一章的教学意见	赖立祥(广西)	(371)
第九章	空间解析几何		(376)
教案十九	空间直角坐标系与矢量代数	李树新(广西)	(376)
教案二十	平面与空间的直线、二次曲面	李树新(广西)	(389)
	对于空间解析几何这一章的教学意见	赖立祥(广西)	(408)
阶段复习课教案——一元函数积分学及空间解析几何		赵坚、陈卫宏(中央电大)	(419)
第6—9章复习测验题		张旭辉(南宁)	(446)

期末综合练习题(一) 吴增炽(广西) (453)

期末综合练习题(二) 吴增炽(广西) (459)

第一章 函 数

教 案 一

孙美春（中央电大）

课题 函数的概念、函数的表示法与函数的性质

教学目的 （1）正确理解绝对值的概念与简单性质，并且能用不等式和绝对值表示实数的范围，会解简单的绝对值不等式。

（2）要求深刻理解函数的概念。着重掌握函数的定义域，对应关系和值域三个环节。能够熟练地求出函数的定义域，并能理解函数符号的意义。

（3）了解表达函数关系的三种方法，并能根据实际问题列出函数表达式；了解分段表示函数。

（4）了解函数的几种基本性质。

重点 函数的概念及其三要素；函数定义域的确定。

难点 解绝对值不等式，根据实际问题列出函数表达式。

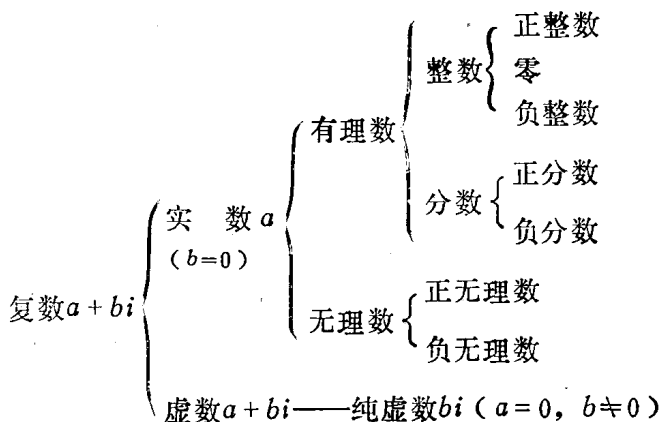
教学过程

一、电视课内容归纳

问题1 实数包含哪几种数？区间大概分为哪几种，其含义是什么？不等式及绝对值有哪些运算规则？

答 数是数学中一个重要的研究对象，到目前为止，我

们所学过的数可归为



有理数和无理数统称为实数。

实数轴是有方向、原点和单位长度的有向直线。实数与数轴上的点是一一对应。

在实际问题中，由于需要在某个实数范围内考虑问题，于是产生了“区间”的概念。

闭区间： $[a, b]$ 是指介于实数 a 和 b 之间并且包括两个端点在内的一切实数的集合。除用 $[a, b]$ 表示外，还可以用不等式 $a \leq x \leq b$ 或在数轴上表示。

开区间： (a, b) 是指介于 a 与 b 之间而不包括两个端点在内的一切实数的集合。除用符号 (a, b) 表示外，还可不等式 $a < x < b$ 或在数轴上表示。

半开区间： $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 是指介于 a 与 b 之间并且仅包括一个端点 a 或 b 在内的一切实数的集合。除用符号 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 表示外，还可用不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 表示或在数轴上表示。

注意：“ $-\infty$ ”和“ $+\infty$ ”是两个记号而不是数，我们用“ $(-\infty, +\infty)$ ”表示整个实数轴。

在教学中常要利用绝对值和不等式来表示实数的范围。

绝对值定义 任意实数 a 的绝对值用符号 “ $|a|$ ” 表示，

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

绝对值的运算

$$(1) |ab| = |a| \cdot |b| \quad (2) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

不等式概念 用不等号 “ $<$ ” “ $>$ ” 或 “ $\leq$ ” “ $\geq$ ” 连接的表示不等关系的代数式叫不等式。

绝对值不等式

(1) 若 $a, b, \dots, k$ 为任意实数，则

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \pm b \pm \dots \pm k| \leq |a| + |b| + \dots + |k|$$

(2) 若 a, b 为任意实数，则

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

(3) 若 $|a| \leq b, b > 0$ ，则 $-b \leq a \leq b$ 。特别有

$$-|a| \leq a \leq |a|。反之亦对。$$

(4) 若 $|a| \geq b, b > 0$ ，则 $a \geq b$ 或 $a \leq -b$ 反之亦对。

问题2 什么叫常量，什么叫变量，函数是如何定义的？

答 在某个过程中，保持一定数值的量叫常量，可以取不同数值的量叫变量。

函数的定义 设在某个过程中，有两个变量 x 和 y ，如果对于变化范围内的每一个 x 值， y 按一定的规则总有唯一

确定的数值与之对应（在此只讨论单值函数），则变量 y 叫作变量 x 的函数， x 叫作自变量， y 叫作因变量。

在讨论函数概念时应着重抓住三个要素：

- （1）自变量的变化范围即函数的定义域；
- （2）自变量与因变量的对应关系；
- （3）因变量的取值范围即函数的值域。

问题3 函数有几种表示方法？建立函数关系的基本步骤有几点？

答 函数有三种表示法：

（1）解析法。用一个解析表达式（如 $y = 2x^2 + 1$ ）来表示两个变量之间的关系。这种方法不够直观，但便于理论上的研究。

（2）图示法。借助于坐标系，将变量之间的关系用图形来刻划。图示法比较直观，但精确度不够。

（3）表格法（列表法）。用一表格显示变量之间的关系。其优点是可以按照要求的精度列表，便于查阅，但不够直观，有局限性，不易看出规律，函数的许多性质也无法体现。

建立函数关系的一般步骤：

（1）了解问题中各量之间的关系，分清哪些是常量，哪些是变量，哪个变量应作为自变量，哪个变量应作为因变量，哪些变量是中间变量？

（2）若属于有图形的问题，画一草图，借助于图形来分析各个量之间的关系。

（3）根据问题的条件与要求，周密分析各量之间的内在联系，利用已知的关系或已有的几何关系或物理定律，用数

学式子表示出来。

(4) 最后根据问题的条件确定自变量的变化范围,即确定函数的定义域。

问题4 函数有哪些性质?

答 函数的简单性质,包括函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性。

函数的奇偶性: 设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-a, a)$ 上, 若有 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

函数的单调性: 设 $f(x)$ 定义在 (a, b) (a, b 是有限或无限的) 上, 对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或} \quad f(x_1) > f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内为一单调增加(或减少)的函数。

函数的有界性: 设 I 为某一区间, 若存在一正数 M , 使得对一切 $x \in I$ 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界, 否则称 $f(x)$ 在 I 内无界。

函数的周期性: 对函数 $y = f(x)$ 若存在一个正数 T , 使得 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T (T 是满足这种关系的最小正数) 为周期的周期函数。

二、例题分析

例1 求解下列不等式

$$(1) \quad |x-3| < 5 \qquad (2) \quad \sqrt{(x-3)^2} > 5$$

$$(3) \quad \left| \frac{1-2x}{3} \right| \leq 1 \qquad (4) \quad \left| \frac{2x}{x+1} \right| \leq 1$$

$$(5) \quad x^2 - 2x - 3 > 0$$

解 (1) 原不等式等价于 $-5 < x - 3 < 0$

解得 $-2 < x < 3$

(2) 原不等式等价于 $|x - 3| > 5$

由 $x - 3 > 5$ 解得 $x > 8$

由 $-(x - 3) > 5$ 解得 $x < -2$

原不等式解为 $x < -2$ 和 $x > 8$

$$(3) \quad \left| \frac{1 - 2x}{3} \right| \leq 1 \quad \text{即} \quad -1 \leq \frac{1 - 2x}{3} \leq 1$$

$$-3 \leq 1 - 2x \leq 3 \quad (\text{不等式两边同乘 } 3, \text{ 不等号不变方向})$$

$$-4 \leq -2x \leq 2 \quad (\text{不等式两边同加一个数, 不等号不变方向})$$

$$2 \geq x \geq -1 \quad (\text{不等式两边同乘一负数, 改变不等号的方向})$$

则得原不等式的解为 $-1 \leq x \leq 2$

(4) 因为分式分母不为 0, $x \neq -1$, 原不等式

$$\left| \frac{2x}{x+1} \right| \leq 1 \quad \text{即}$$

$$-1 \leq \frac{2x}{x+1} \leq 1 \quad (*)$$

当 $x+1 > 0$ 时 $(*)$ 式为

$$-x - 1 \leq 2x \leq x + 1$$

解 $-x - 1 \leq 2x$, 得 $x \geq -\frac{1}{3}$, 解 $2x \leq x + 1$, 得 $x \leq 1$, 合起

来得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

当 $x+1 < 0$ 时, $(*)$ 式为

$$-x-1 \geq 2x \geq x+1$$

解得 $x \leq -\frac{1}{3}$, $x \geq 1$, 因此矛盾, 说明无解.

得原不等式解为

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

(5) 对二次三项式分解, 原不等式等价于

$$(x-3)(x+1) > 0$$

它等价于

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

解前组不等式为 $x > 3$, $x > -1$, 公共部分 $x > 3$.

解后组不等式为 $x < 3$, $x < -1$, 公共部分 $x < -1$.

原不等式解是 $x < -1$ 或 $x > 3$

例2 指出下列各组中函数是否相同, 并说明理由

(1) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(2) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = 1$

(4) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$

解 (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$ 而 $g(x)$ 的值域是 $[0, +\infty)$.

(2) 相同. 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域和对应法则相同, 显然, 值域也相同, 实际上有:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(3) 不相同。因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ ，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

(4) 不相同。因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ ，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ 。

例3 已知 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ，求 $f(1)$ ， $f(-2)$ ， $f(a+1)$ ， $f(a)+1$ 。

解 $f(x)$ 表示对自变量 x 作下列运算

$f(\quad) = 2(\quad)^2 - 3(\quad) + 1$ ，所以只要将“1”、“-2”、“ $a+1$ ”、“ a ”代替 $f(x)$ 表达式中的 x 即可。

$$\text{即 } f(1) = 2 \cdot (1)^2 - 3 \cdot (1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 15$$

$$f(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = a(2a+1)$$

$$f(a)+1 = [2(a)^2 - 3(a)+1] + 1 = 2a^2 - 3a + 2$$

例4 求下列函数的定义域

$$(1) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$(2) f(x) = \lg \frac{x-2}{1-x}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 3x & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 4 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

解 (1) 因为分式的分母不能为零，所以

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \text{即 } x \neq \pm 2$$

原式的定义域为 $(-\infty, -2)$ ， $(-2, +2)$ ， $(2, +\infty)$ 。

(2) 求 $\lg \frac{x-2}{1-x}$ 的定义域相当于解不等式组

$$\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \frac{x-2}{1-x} > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ x-2 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ x-2 < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

由不等式组①解得 $x \neq 1$, $x > 2$, $x < 2$, 显然矛盾, 无解。

由不等式组②解得 $x \neq 1$, $x < 2$, $x > 1$

即 $1 < x < 2$

$\therefore \lg \frac{x-2}{1-x}$ 的定义域是 $(1, 2)$

(3) 求 $\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域相当于解不等式

$$x^2-x-6 \geq 0 \quad \text{即} \quad (x-3)(x+2) \geq 0$$

解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$ (*)

而 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$ 即

$$-7 \leq 2x-1 \leq 7$$

解得 $-3 \leq x \leq 4$ (**)

最后取 (*) 式与 (**) 式公共部分为原式定义域

$[-3, -2]$ 或 $[3, 4]$

(4) 这种用几个式子分段表示的函数称为分段函数, 其特点是在自变量变化的不同区间上它有不同的表达式, 而在自变量的整个变化区间上, 它只是一个函数。显然, 该函数的定义域是闭区间 $[0, 3]$ 。

例 5 用帆布缝制一座有一定容积的圆锥形帐篷，试建立所用帆布数量与帐篷高度之间的函数关系。

解 帐篷是圆锥形的，有一定的容积，应看作常量记为 V ，高度记为 h ，底面圆半径记为 r ，而所用帆布数量即是圆锥形的侧面积，可记为 S ，显然，侧面积的计算要联系到圆锥母线长，可将其记为 L ，据此分析，作出草图，并将其符号标于图上（如图 1—1）

由立体几何知道，圆锥侧面积：

$$S = \pi r L \quad (1)$$

根据题意， S 应作为因变量， h 该作为自变量，(1) 式中的 π 是常量， r 和 L 是什么呢？由圆锥体体积公式

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

可得
$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} \quad (2)$$

再从图 1—1 可知， h ， r ， L 三个量是一个直角三角形的三条边，其中 L 是斜边， h ， r 是两条直角边，由勾股定理有

$$L = \sqrt{h^2 + r^2} \quad (3)$$

再将 (2) 式代入 (3) 式，得

$$L = \sqrt{h^2 + \frac{3V}{\pi h}} \quad (4)$$

最后，一并将 (2) 式、(4) 式代入 (1) 式，即得

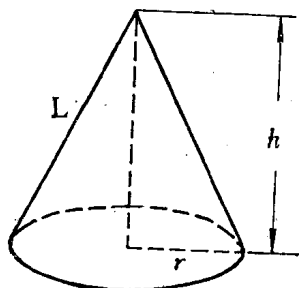


图 1—1

$$S = \pi \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{3V}{\pi h}} = \pi \sqrt{\frac{3hV}{\pi} + \frac{9V^2}{\pi^2 h^2}}$$

这样就建立了所用帆布数量 S 与帐篷高度 h 之间的函数关系。

例6 证明 $f(x) = 1 - \ln x$ 是单调减少函数。

证 根据单调函数定义, 任取 $0 < x_1 < x_2 < +\infty$ (因为 $f(x)$ 的定义域是 $x > 0$) 有

$$f(x_1) - f(x_2) = (1 - \ln x_1) - (1 - \ln x_2) = \ln \frac{x_2}{x_1}$$

$$\because x_1 < x_2 \quad \frac{x_2}{x_1} > 1 \quad \ln \frac{x_2}{x_1} > 0$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

故 $f(x) = 1 - \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调减少函数。

例7 判断下列函数的奇偶性

$$(1) \quad y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} \quad (2) \quad y = x \sin x$$

$$(3) \quad y = \sin x - \cos x$$

解 运用奇偶函数的定义

$$(1) \because \frac{a^{-x} + 1}{a^{-x} - 1} = \frac{1 + a^x}{1 - a^x} = -\frac{a^x + 1}{a^x - 1}$$

$$\therefore y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} \text{ 是奇函数.}$$

$$(2) \because (-x) \cdot \sin(-x) = x \sin x$$

$$\therefore y = x \sin x \text{ 是偶函数.}$$

$$(3) \because \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$$

$$\therefore y = \sin x - \cos x \text{ 是非奇非偶的函数.}$$

例8 判断下列函数是否周期函数, 若是试求其周期