凸函数和奥尔里奇空间

M. A. 克拉斯諾西尔斯基
Я. Б. 鲁季茨基

科学出版社

凸函数和奥尔里奇空間

M. A. 克拉斯諾西尔斯基
Я. Б. 魯 季 茨 基 著

吳 从 炘 譯

科 學 出 版 社
1962

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ И Я. Б. РУТИЦКИЙ
ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Физико-математической литературы
Москва 1958

內容簡介

以波兰数学家奥尔里奇通訊院士命名的空間的研究已有将近三十年的历史，但其成果大都散見于各种数学杂志上的論文中。本书是关于奥尔里奇空間理論的第一部专著，它系統地总結了著者从 1951 到 1958 的工作成就。特别值得提出的是作者們成功地把这种空間的一般理論应用于非綫性积分方程的研究。

凸函数和奥尔里奇空間

М. А. 克拉斯諾西尔斯基
Я. Б. 魯季茨基 著
吳从炘 譯

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962 年 5 月第一版 书号：2516 字数：191,000
1962 年 5 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—9,100 印张：7 5/16

定价：1.20 元

序

本专著共分四章.

第一章研究各种不同的凸函数类. 这一章的主要內容直到目前为止还仅发表在各杂志上. 作者认为本章內容即使不管书中的其它部分也还是有兴趣的，因为凸函数在数学的許多分支中有着广泛的应用.

第二章叙述奥尔里奇空間的一般理論,这种空間是空間 L^p 的直接推广.

在这里我們对奥尔里奇空間研究通常綫性泛函分析所考虑的問題:完全性,可分性的条件，基的存在，等价的范数,列紧性的条件,綫性泛函的性質等等. 可以看到奥尔里奇空間有許多关系与空間 L^p 相似.

第三章研究定义在奥尔里奇空間的算子和泛函.

作者在討論形如

$$\lambda\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y)f[\varphi(y)]dy$$

的非綫性积分方程时,感到有应用奥尔里奇空間的必要,其中 $f(u)$ 是增加速度快于任意冪的函数.

对任何 $p > 1$，上述积分方程的右端所定义的算子并不映空間 L^p 到它自己內,因此借助非綫性泛函分析的方法来研究这种积分方程出現了困难，而第二章和第三章的結果使我們能够来討論相当广泛的非綫性方程的类.

本书的最后一章研究了若干非綫性的問題.

作者利用这个机会向希洛夫 (Г. Е. Шилов) 表示感謝,他的許多意見本书已經采用.

目　录

第二章　奥尔里奇空間

第三章　奥尔里奇空間內的算子

第四章 非綫性积分方程

第一章 特殊类的凸函数

§1. N-函 数

1. 凸函数. 实变量 u 的实値函数 $M(u)$ 称为凸的，假如对于 u_1 和 u_2 的一切值满足不等式

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leqslant \frac{M(u_1) + M(u_2)}{2}. \tag{1.1}$$

我們仅对連續的凸函数有兴趣. 条件 (1.1) 表明联結函数 $M(u)$ 的图形上任何两点的弦的中点恆位于图形的对应点之上.

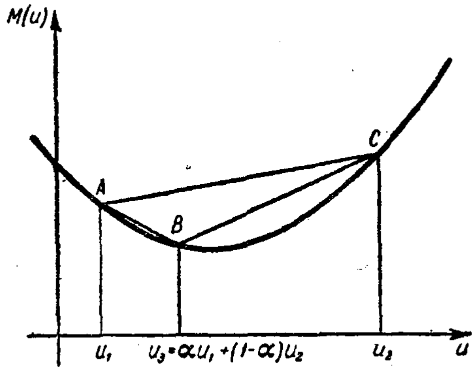

图 1

从几何上 (图 1) 易見所有的弦均位于函数的图形之上，即对于一切 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 不等式

$$M[\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2] \leqslant \alpha M(u_1) + (1 - \alpha)M(u_2) \tag{1.2}$$

恆成立. 这个不等式称为琴生不等式. 我們还可以用解析的方法来証明該不等式. 事实上，假設不等式 (1.2) 不是对于 $[0, 1]$ 上的一切 α 均能满足，那么連續函数

$$f(\alpha) = M[\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2] - \alpha M(u_1) - (1 - \alpha)M(u_2)$$

在 $[0, 1]$ 上的最大值 M_0 为正. 我們把使得 $f(\alpha)$ 具有值 M_0 的自变量的最小值記为 α_0. 又假定 $\delta > 0$ 是这样的数，它使得区間 $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ 包含在 $[0, 1]$ 內. 于是对点

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2,$$
$$u_2^* = (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2$$

应用不等式(1.1)并且轉到函数 $f(\alpha)$ 即得

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0.$$

于是发生矛盾，因而不等式(1.2)获証.

如果 $u_1 \neq u_2$，則(1.2)中的等号成立，或者只有当 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 时，或者对于一切 $\alpha \in [0, 1]$. 事实上，假設对某个 $\alpha_0 \in (0, 1)$ (1.2)中的等号成立，即 $f(\alpha_0) = 0$. 今証在此情况下对于一切 $\alpha \in [0, 1]$ 有 $f(\alpha) = 0$. 容易看出，連續函数 $f(\alpha)$ 是凸的，因此它同样也滿足琴生不等式. 假設对于某个 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 有 $f(\alpha_1) < 0$，(根据已經証明的結論 $f(\alpha)$ 不能为正). 为了确定起見，假定 $\alpha_1 < \alpha_0$，因为 $\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}$，則由琴生不等式

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} f(1) = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) < 0.$$

这与 $f(\alpha_0) = 0$ 矛盾.

不等式(1.1)还可以再推广成如下的形式：对任何 $u_1, u_2, \cdots, u_n$,

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}[M(u_1) + M(u_2) + \cdots + M(u_n)]. \qquad (1.3)$$

对形如 2^k 的一切 n，只要連續应用(1.1)就能証明不等式(1.3). 較复杂的是任意 n 的情形. 假設 m 是这样的数，它使得 $n + m = 2^k$，則

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + mu^*}{n + m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+m}\left[M(u_1)+M(u_2)+\cdots+M(u_n)+mM(u^*)\right].$$

命 $u^*=\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$，即得(1.3)。

設 $u_1\leqslant u_3\leqslant u_2$，則

$$u_3=\frac{u_2-u_3}{u_2-u_1}u_1+\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}u_2,$$

于是由不等式(1.2)，

$$M(u_3)\leqslant \frac{u_2-u_3}{u_2-u_1}M(u_1)+\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}M(u_2),$$

故得

$$\frac{M(u_3)-M(u_1)}{u_3-u_1}\leqslant \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}\leqslant \frac{M(u_2)-M(u_3)}{u_2-u_3}. \tag{1.4}$$

所得到的不等式（参看图 1）表明弦 AB 的角系数小于弦 AC 的角系数，而它又小于弦 BC 的角系数。

2. 凸函数的积分表达式。

引理 1.1. 連續凸函数 $M(u)$ 在每一点都有右导数 $p_+(u)$ 和左导数 $p_-(u)$，并且

$$p_-(u)\leqslant p_+(u). \tag{1.5}$$

証. 由于(1.4)，当 $0<h_1<h_2$ 时

$$\frac{M(u)-M(u-h_2)}{h_2}\leqslant \frac{M(u)-M(u-h_1)}{h_1}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(u+h_1)-M(u)}{h_1}\leqslant \frac{M(u+h_2)-M(u)}{h_2}. \tag{1.6}$$

从这些不等式即可推出关系式

$$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}$$

是非减的，因而当 $h\to+0$ 时有极限 $p_-(u)$。类似地，关系式 $\dfrac{M(u+h)-M(u)}{h}$ 是非增的，因而当 $h\to+0$ 时有极限 $p_+(u)$。至于不等式(1.5)同样能由(1.6)推出。

引理 1.2. 連續凸函数 $M(u)$ 的右导数 $p_+(u)$ 是非减的右連續函数.

証. 假設 $u_1 < u_2$, 則当正数 h 充分小时

$$u_1 + h < u_2 - h,$$

于是由(1.4),

$$\frac{M(u_1 + h) - M(u_1)}{h} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_2 - h)}{h}. \tag{1.7}$$

取极限并利用不等式(1.5)即得

$$p_+(u_1) \leqslant p_+(u_2). \tag{1.8}$$

这样,函数 $p_+(u)$ 的单調性就証明了.

在証明引理 1.1 时曾經指出,对于一切 $h > 0$

$$p_+(u) \leqslant \frac{M(u + h) - M(u)}{h}.$$

固定 h 并且取当 $u \to u_0 + 0$ 时的极限, 由函数 $M(u)$ 的連續性即得

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \leqslant \frac{M(u_0 + h) - M(u_0)}{h}. \tag{1.9}$$

由于函数 $p_+(u)$ 的单調性, 不等式左端的极限是存在的. 再在(1.9)中取当 $h \to +0$ 时的极限,得到

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \leqslant p_+(u_0).$$

另一方面,当 $u \geqslant u_0$ 时 $p_+(u) \geqslant p_+(u_0)$,由此

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \geqslant p_+(u_0).$$

因而

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) = p_+(u_0).$$

上述等式表明了函数 $p_+(u)$ 的右連續性.

引理証毕.

附注. 完全类似地可以証明 $p_-(u)$ 是非减的左連續函数.

引理 1.3. 凸函数 $M(u)$ 在任何有限区間内絕对連續且滿足李普希茲条件.

証. 考察任一区間 $[a, b]$. 假設 $a < u_1 < u_2 < b$. 由于(1.4)

$$\frac{M(u_1) - M(a)}{u_1 - a} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant \frac{M(b) - M(u_2)}{b - u_2}.$$

从上述不等式即可推出

$$p_+(a) \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant p_-(b),$$

亦即对于区間$[a, b]$内的一切 u_1, u_2, 量$\left|\frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1}\right|$是有界的.

引理証毕.

定理 1.1. 任何滿足条件 $M(a) = 0$ 的凸函数 $M(u)$ 可表为

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt, \tag{1.10}$$

其中 $p(t)$ 是非減的右連續函数.

証. 首先注意函数 $M(u)$ 几乎处处有导数. 事实上, 由于(1.7)和(1.5),当 $u_2 > u_1$ 时

$$p_-(u_2) \geqslant p_+(u_1) \geqslant p_-(u_1). \tag{1.11}$$

因为函数 $p_-(u)$ 是单調的,所以它几乎处处連續. 假設 u_1 是函数 $p_-(u)$ 的連續点,在(1.11)中取当 $u_2 \to u_1$ 时的极限,即得

$$p_-(u_1) \geqslant p_+(u_1) \geqslant p_-(u_1),$$

于是

$$p_-(u_1) = p_+(u_1).$$

因而几乎处处有

$$M'(u) = p(u) = p_+(u).$$

由于引理 1.3, 函数 $M(u)$ 絕对連續, 因此它就是 (例如参看[38])自己的导数的不定积分.

定理証毕.

3. N-函数的定义. 函数 $M(u)$ 称为 N-函数, 如果它能够表为

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt, \tag{1.12}$$

其中 $p(t)$ 当 $t>0$ 时为正，又当 $t\geqslant 0$ 时是右連續的非減函数并且还满足条件：

$$p(0)=0,\ p(\infty)=\lim_{t\to\infty}p(t)=\infty. \tag{1.13}$$

簡言之，上述条件表明，函数 $p(t)$ 必須具有形如图 2 的图形，而 N-函数的值就是相应的曲綫梯形的面积.

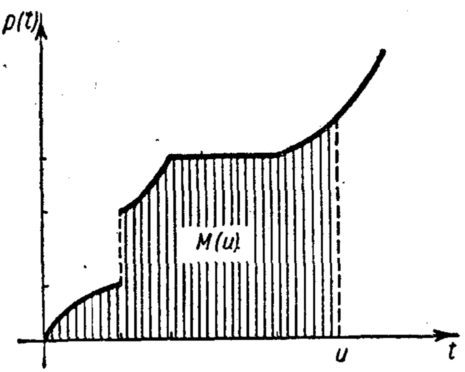

图 2

譬如函数

$$M_1(u)=\frac{|u|^\alpha}{\alpha}\ (\alpha>1),\ M_2(u)=e^{u^2}-1$$

就是 N-函数的例子. 对于其中的第一个，$p_1(t)=M_1'(t)=t^{\alpha-1}$，而对于第二个，$p_2(t)=M_2'(t)=2te^{t^2}$.

4. N-函数的性质. 由表达式(1.12)可推出每一个 N-函数是連續的偶函数，它在零点的值为零并且当自变量的值为正时还是增加的.

N-函数是凸的. 事实上，如果 $0\leqslant u_1<u_2$，則由于 $p(t)$ 的单調性

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)=\int_0^{\frac{u_1+u_2}{2}}p(t)dt\leqslant\int_0^{u_1}p(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t)dt\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{u_1} p(t)\,dt + \int_0^{u_2} p(t)dt\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right].$$

在 u_1, u_2 任意的情况下

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = M\left(\frac{|u_1+u_2|}{2}\right) \leqslant M\left(\frac{|u_1|+|u_2|}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right].$$

在(1.2)中假設 $u_2=0$,可得

$$M(\alpha u_1) \leqslant \alpha M(u_1) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{1.14}$$

条件(1.13)的第一个等式表明

$$\lim_{u\to 0}\frac{M(u)}{u} = 0. \tag{1.15}$$

从(1.13)的第二个条件又可推出

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u} = \infty, \tag{1.16}$$

因为当 $u>0$ 时

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u p(t)dt \geqslant \frac{1}{u}\int_{\frac{u}{2}}^u p(t)dt \geqslant \frac{1}{2}\,p\left(\frac{u}{2}\right).$$

我們指出,对 N-函数而言,(1.14) 中仅当 $\alpha=0,1$ 或 $u_1=0$ 时等号成立. 事实上,假設 $u_1\neq 0$ 并且对于某个 $\alpha\in(0,1)$(1.14) 中的等号成立,則由 2 頁所証明的結論在(1.14)中对于一切 $\alpha\in[0,1]$ 等号成立. 于是对于一切 $\alpha\in[0,1]$

$$\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

在此等式中取当 $\alpha\to 0$ 时的极限,得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

这与(1.15)矛盾.

由此可見

$$M(\alpha u) < \alpha M(u) \quad (0 < \alpha < 1, u \neq 0). \tag{1.17}$$

由上述不等式可推出函数 $\frac{M(u)}{u}$ 当 u 为正值时是严格增加的

$$\frac{M(u')}{u'} < \frac{M(u)}{u} \quad (0 < u' < u). \tag{1.18}$$

为了証明这个断言,只須在(1.17)中命 $\alpha = \frac{u'}{u}$.

我們所得到的性質已經完全足以描述 N-函数的图形了(图3). 性質(1.15)表明横軸与 N-函数的图形在原点相切. 而性質(1.18)和(1.16)給出联結原点与 N-函数图形上的动点的弦之角系数的变化特征. N-函数的图形可能包含間断点和直綫段. 間断点对应于函数 $p(t)$ 的間断点,而直綫段对应于函数 $p(t)$ 的常数区間.

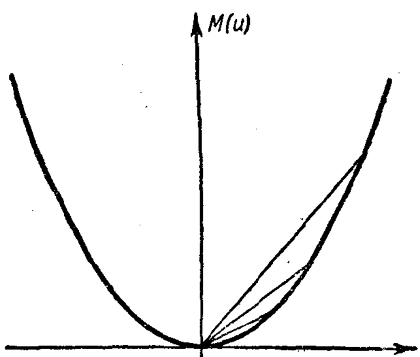

图 3

当自变量为非負值时, N-函数 $M(u)$ 的反函数記为 $M^{-1}(v)$ $(0 \leqslant v < \infty)$. 这个函数是凹的,因为由不等式(1.2)当 $v_1, v_2 \geqslant 0$ 时

$$M^{-1}[\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2] \geqslant \alpha M^{-1}(v_1) + (1-\alpha)M^{-1}(v_2).$$

从 N-函数 $M(u)$ 的右导数 $p(u)$ 的单调性可推出不等式

$$M(u)+M(v)=\int_0^{|u|}p(t)dt+\int_0^{|v|}p(t)dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{|u|}p(t)dt+\int_{|u|}^{|u|+|v|}p(t)dt=$$

$$=\int_0^{|u|+|v|}p(t)dt=M(|u|+|v|). \qquad (1.19)$$

假設 $a=M(u)$, $b=M(v)$ 是任意非負的数，則由 (1.19) 又得到

$$M^{-1}(a+b)\leqslant M^{-1}(a)+M^{-1}(b). \qquad (1.20)$$

5. N–函数的第二种定义. 使用以下的定义有时是很方便的. 連續凸函数 $M(u)$ 称为 N–函数,假如它是偶函数并且满足条件(1.15)和(1.16). 今証这个定义与前面的定义等价. 显然我們只須証从 N–函数的第二个定义可以推出把它表为 (1.12) 形式的可能性.

由于(1.15) $M(0)=0$, 因此由函数 $M(u)$ 的偶函数性和定理 1.1, 能把它表为

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$$

的形式，其中 $p(u)$ 是当 $u>0$ 时非減的右連續函数（函数 $M(u)$ 的右导数). 因为当 $u>0$ 时

$$p(u)\geqslant\frac{M(u)}{u},$$

則当 $u>0$ 时 $p(u)>0$, 並且由(1.16)

$$\lim_{u\to\infty}p(u)=\infty.$$

另一方面,当 $u>0$ 时

$$M(2u)=\int_0^{2u}p(t)dt>\int_u^{2u}p(t)dt>up(u),$$

因而

$$p(u)<\frac{M(2u)}{u}.$$

因此由(1.15)

$$p(0)=\lim_{u\to 0}p(u)=0.$$

6. N-函数的复合函数. 两个 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的复合函数 $M(u)=M_2[M_1(u)]$ 仍然是 N-函数. 事实上,函数 $M(u)$ 有右导数(当 $u>0$ 时)

$$p(u)=p_2[M_1(u)]p_1(u),$$

其中 $p_1(u)$, $p_2(u)$ 是 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的右导数. 函数 $p(u)$ 右連續、非減且滿足条件 (1.13), 因为函数 $p_1(u)$ 和 $p_2(u)$ 满足这些条件.

其逆亦眞: 任何 N-函数 $M(u)$ 都是两个 N-函数的复合函数 $M(u)=M_2[M_1(u)]$.

如果 $M_1(u)$ 为一給定的 N-函数,則函数 $M_2(u)$ 由等式

$$M_2(u)=M[M_1^{-1}(|u|)] \tag{1.21}$$

唯一地确定,其中 $M_1^{-1}(v)$ 是 $M_1(u)$ 的反函数.

这样一来,为了将 $M(u)$ 表成复合函数的形式,必須找出这样的 N-函数 $M_1(u)$,使 $M_2(u)=M[M_1^{-1}(|u|)]$ 也是 N-函数.

因为当 $u>0$ 时

$$p_2(u)=\frac{p[M_1^{-1}(u)]}{p_1[M_1^{-1}(u)]},$$

所以欲使 $M_2(u)$ 是 N-函数,必須且只須函数 $\dfrac{p(u)}{p_1(u)}$ 非減、右連續并且滿足条件 (1.13), 因为連續函数 $M_1^{-1}(v)$ 单调且与 v 一齐趋近于零和无穷.

这样,如果我們找到了非減、右連續并且满足条件(1.13)的函数 $p_1(u)$,使 $\dfrac{p(u)}{p_1(u)}$ 同样是非減、右連續并且滿足条件 (1.13) 的函数,那么函数

$$M_1(u)=\int_0^{|u|}p_1(t)\,dt$$

和由等式(1.21)所定义的 $M_2(u)$ 都是 N-函数,并且等式 $M(u)=$ $=M_2[M_1(u)]$ 成立.

作为函数 $p_1(u)$ 特別可以取

$$p_1(u)=[p(u)]^{\varepsilon_0} \quad (0<\varepsilon_0<1).$$