

凸函数和 奥尔里奇空间

М. А. 克拉斯諾西爾斯基

Я. Б. 魯季茨基

科学出版社

51.64
259

凸函数和奥尔里奇空间

M. A. 克拉斯諾西尔斯基 著
Я. Б. 魯季茨基

吳从圻 譯

科 学 出 版 社

1962

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ И Я. Б. РУТИЦКИЙ
ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Физико-математической литературы
Москва 1958

內容簡介

以波兰数学家奥尔里奇通訊院士命名的空間的研究已有将近三十年的历史，但其成果大都散見于各种数学杂志上的論文中。本书是关于奥尔里奇空間理論的第一部专著，它系統地总结了著者从 1951 到 1958 的工作成就。特別值得提出的是作者們成功地把这种空間的一般理論应用于非綫性积分方程的研究。

凸函数和奥尔里奇空間

М. А. 克拉斯諾西爾斯基 著
Я. Б. 魯季茨基

吳从炘譯

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962 年 5 月第一版

书号：2516 字数：191,000

1962 年 5 月第一次印刷

开本：850×1168 1/32

(京) 0001—9,100

印张：7 5/16

定价：1.20 元

序

本专著共分四章。

第一章研究各种不同的凸函数类。这一章的主要内容直到目前为止还仅发表在各杂志上。作者认为本章内容即使不管书中的其它部分也还是有兴趣的。因为凸函数在数学的许多分支中有着广泛的应用。

第二章叙述奥尔里奇空间的一般理论,这种空间是空间 L^p 的直接推广。

在这里我们对奥尔里奇空间研究通常线性泛函分析所考虑的问题:完全性,可分性的条件,基的存在,等价的范数,列紧性的条件,线性泛函的性质等等。可以看到奥尔里奇空间有许多关系与空间 L^p 相似。

第三章研究定义在奥尔里奇空间的算子和泛函。

作者在讨论形如

$$\lambda\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y)f[\varphi(y)]dy$$

的非线性积分方程时,感到有应用奥尔里奇空间的必要,其中 $f(u)$ 是增加速度快于任意幂的函数。

对任何 $p > 1$,上述积分方程的右端所定义的算子并不映空间 L^p 到它自己内,因此借助非线性泛函分析的方法来研究这种积分方程出现了困难,而第二章和第三章的结果使我们能够来讨论相当广泛的非线性方程的类。

本书的最后一章研究了若干非线性的问题。

作者利用这个机会向希洛夫 (Г. Е. Шилов) 表示感谢,他的许多意见本书已经采用。

目 录

序..... iii

第一章 特殊类的凸函数

- § 1. N -函数 1
凸函数(1), 凸函数的积分表达式(3), N -函数的定义(5),
 N -函数的性质(6), N -函数的第二种定义(9), N -函数的复
合函数(10).
- § 2. 余 N -函数 11
定义(11), 楊格不等式(12), 例(13), 余函数的不等式(14).
- § 3. N -函数的比較 15
定义(15), 等价的 N -函数(15), N -函数的主要部分(16), 关
于等价性的一种判別法(17), 各种不同的类的存在(20).
- § 4. Δ_2 -条件 23
定义(23), Δ_2 -条件的判別法(24), 对余 N -函数的 Δ_2 -条件
(25), 例(27).
- § 5. Δ' -条件 29
定义(29), 满足 Δ' -条件的充分判別法(31), 余函数的 Δ' -条
件(33), 例(34).
- § 6. 較幂函数增加得快的 N -函数 35
 Δ_3 -条件(35), 余函数的估計式(36), 等价余 N -函数的构造
(37), 余函数的复合函数(39), Δ^2 -条件(40), 余函数的性质
(44), 余函数的 Δ^2 -条件的判別法(46), 再論 N -函数的复合函
数(49).
- § 7. 关于一类 N -函数 53
問題的提出(53), 类 \mathfrak{N} (53), 类 \mathfrak{N} (56), 余函数定理(58).

第二章 奥尔里奇空間

- § 8. 奥尔里奇类 60
定义(60). 琴生积分不等式(62). 类的比較(62). 奥尔里奇类的构造(63).
- § 9. 空間 L_M^* 66
奥尔里奇范数(66). 完全性(69). 特征函数的范数(70). 荷尔德不等式(71). Δ_2 -条件的情形(73). 平均收敛性(73). 刘克施姆布洛格范数(75).
- § 10. 空間 E_M 78
定义(78). E_M 的可分性(79). 类 L_M 相对于空間 E_M 的位置(79). 奥尔里奇空間可分性的必要条件(82). 关于范数的定义(83). 范数的绝对連續性(84). 范数的計算(85). 一个范数公式(88).
- § 11. 列紧性的判別法 90
瓦来-布桑定理(90). 斯捷克洛夫函数(91). 空間 E_M 的柯尔莫廓洛夫的列紧性判別法(93). 列紧性的第二种判別法(94). 空間 E_M 的黎斯 (F. Riesz) 的列紧性判別法(95).
- § 12. 基的存在 97
轉到确定在区間上的函数的空間(97). 哈尔函数(99). E_M 的基(100). 再論关于可分性的条件(102).
- § 13. 不同 N -函数定义的空間 105
空間的比較(105). 范数的不等式(107). 按范数收敛的一种判別法(109). 奥尔里奇空間內函数的乘积(112). 充分条件(115).
- § 14. 綫性泛函 119
 L_M^* 上的綫性泛函(119). E_M 上綫性泛函的一般表达式(123). E_N -弱收敛性(125). E_N -弱連續的綫性泛函(127). 泛函的范数和 $\|v\|_{(N)}$ (128).

第三章 奥尔里奇空間內的算子

- § 15. 綫性积分算子連續性的条件 131
問題的提出(131). 一般定理(131). 函数 $\varphi(u)$ 的存在(132). 滿足 Δ' -条件的 N -函数的一个性質(134). 連續性的充分条件
-

(140). 連續算子的分解(141).

§ 16. 綫性积分算子全連續性的条件 143

連續核的情形(143). 基本定理(144). 全連續性和 E_N -弱收敛性(146). 蔡年定理(149). 条件的比較(153). 全連續算子的分解(157). 关于場位型算子(158).

§ 17. 最简单的非綫性算子 160

卡拉太屋独里条件(160). 算子 f 的定义域(160). 关于連續性的定理(162). 算子 f 的有界性(165). 算子 f 的一般形式(167). 算子 f 連續性和有界性的充分条件(167). 算子 f 与 E_N -弱收敛性(168).

§ 18. 可微性. 范数的梯度 168

可微泛函(168). 函数 $\theta(x)$ 的可測性(169). 算子 f 的泛函(170). 綫性算子 f (171). 弗力許导数(172). 可微性的特殊条件(174). 輔助引理(178). 加脫梯度(178). 刘克施姆布洛格范数的梯度(179). 奥尔里奇范数的梯度(181).

第四章 非綫性积分方程

§ 19. 烏利孙算子 185

烏利孙算子(185). 烏利孙算子的有界性(186). 第一个更簡單的算子(188). 第二个更簡單的算子(189). 第三个更簡單的算子(190). 烏利孙算子全連續性的基本定理(191). 較弱的非綫性的情形(193). 哈梅士坦算子(196).

§ 20. 某些存在定理 197

研究的問題(197). 解的存在性(198). 正特征函数(201). 場位算子的特征函数(202). 歧点定理(204).

主要結果汇集 205

文献索引 216

参考文献 223

第一章 特殊类的凸函数

§ 1. N -函数

1. 凸函数. 实变量 u 的实值函数 $M(u)$ 称为凸的, 假如对于 u_1 和 u_2 的一切值满足不等式

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{M(u_1) + M(u_2)}{2}. \quad (1.1)$$

我们仅对连续的凸函数有兴趣. 条件 (1.1) 表明联结函数 $M(u)$ 的图形上任何两点的弦的中点恒位于图形的对应点之上.

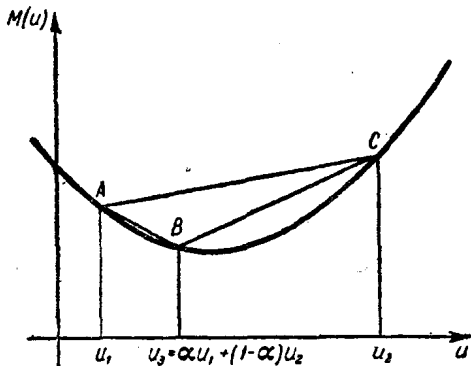


图 1

从几何上 (图 1) 易见所有的弦均位于函数的图形之上, 即对于一切 $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ 不等式

$$M[\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2] \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha)M(u_2) \quad (1.2)$$

恒成立. 这个不等式称为琴生不等式. 我们还可以用解析的方法来证明该不等式. 事实上, 假设不等式 (1.2) 不是对于 $[0, 1]$ 上的一切 α 均能满足, 那么连续函数

$$f(\alpha) = M[\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2] - \alpha M(u_1) - (1 - \alpha)M(u_2)$$

在 $[0, 1]$ 上的最大值 M_0 为正。我們把使得 $f(\alpha)$ 具有值 M_0 的自变量的最小值記为 α_0 。又假定 $\delta > 0$ 是这样的数，它使得区間 $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ 包含在 $[0, 1]$ 內。于是对点

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2,$$

$$u_2^* = (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2$$

应用不等式(1.1)并且轉到函数 $f(\alpha)$ 即得

$$f(\alpha_0) \leq \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0.$$

于是发生矛盾，因而不等式(1.2)获証。

如果 $u_1 \neq u_2$ ，則(1.2)中的等号成立，或者只有当 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 时，或者对于一切 $\alpha \in [0, 1]$ 。事实上，假設对某个 $\alpha_0 \in (0, 1)$ (1.2) 中的等号成立，即 $f(\alpha_0) = 0$ 。今証在此情况下对于一切 $\alpha \in [0, 1]$ 有 $f(\alpha) = 0$ 。容易看出，連續函数 $f(\alpha)$ 是凸的，因此它同样也滿足琴生不等式。假設对于某个 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 有 $f(\alpha_1) < 0$ ，(根据已經証明的結論 $f(\alpha)$ 不能为正)。为了确定起見，假定

$\alpha_1 < \alpha_0$ ，因为 $\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} \alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}$ ，則由琴生不等式

$$f(\alpha_0) \leq \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} f(1) = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) < 0.$$

这与 $f(\alpha_0) = 0$ 矛盾。

不等式(1.1)还可以再推广成如下的形式：对任何 $u_1, u_2, \dots,$

$u_n,$

$$\begin{aligned} M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}\right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{n} [M(u_1) + M(u_2) + \dots + M(u_n)]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

对形如 2^k 的一切 n ，只要連續应用(1.1)就能証明不等式(1.3)。較复杂的是任意 n 的情形。假設 m 是这样的数，它使得 $n + m = 2^k$ ，則

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + mu^*}{n + m}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+m} [M(u_1) + M(u_2) + \cdots + M(u_n) + mM(u^*)].$$

命 $u^* = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$, 即得(1.3).

設 $u_1 \leq u_3 \leq u_2$, 則

$$u_3 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} u_1 + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} u_2,$$

于是由不等式(1.2),

$$M(u_3) \leq \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} M(u_1) + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} M(u_2),$$

故得

$$\frac{M(u_3) - M(u_1)}{u_3 - u_1} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(u_2) - M(u_3)}{u_2 - u_3}. \quad (1.4)$$

所得到的不等式(參看圖1)表明弦 AB 的角系数小于弦 AC 的角系数, 而它又小于弦 BC 的角系数.

2. 凸函数的积分表达式.

引理 1.1. 連續凸函数 $M(u)$ 在每一点都有右导数 $p_+(u)$ 和左导数 $p_-(u)$, 并且

$$p_-(u) \leq p_+(u). \quad (1.5)$$

証. 由于(1.4), 当 $0 < h_1 < h_2$ 时

$$\begin{aligned} \frac{M(u) - M(u - h_2)}{h_2} &\leq \frac{M(u) - M(u - h_1)}{h_1} \leq \\ &\leq \frac{M(u + h_1) - M(u)}{h_1} \leq \frac{M(u + h_2) - M(u)}{h_2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

从这些不等式即可推出关系式

$$\frac{M(u) - M(u - h)}{h}$$

是非減的, 因而当 $h \rightarrow +0$ 时有极限 $p_-(u)$. 类似地, 关系式 $\frac{M(u + h) - M(u)}{h}$ 是非增的, 因而当 $h \rightarrow +0$ 时有极限 $p_+(u)$.

至于不等式(1.5)同样能由(1.6)推出.

引理 1.2. 連續凸函數 $M(u)$ 的右導數 $p_+(u)$ 是非減的右連續函數。

証. 假設 $u_1 < u_2$, 則當正數 h 充分小時

$$u_1 + h < u_2 - h,$$

于是由(1.4),

$$\frac{M(u_1 + h) - M(u_1)}{h} \leq \frac{M(u_2) - M(u_2 - h)}{h}. \quad (1.7)$$

取極限並利用不等式(1.5)即得

$$p_+(u_1) \leq p_+(u_2). \quad (1.8)$$

這樣, 函數 $p_+(u)$ 的單調性就証明了.

在證明引理 1.1 時曾經指出, 對於一切 $h > 0$

$$p_+(u) \leq \frac{M(u + h) - M(u)}{h}.$$

固定 h 並且取當 $u \rightarrow u_0 + 0$ 時的極限, 由函數 $M(u)$ 的連續性即得

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) \leq \frac{M(u_0 + h) - M(u_0)}{h}. \quad (1.9)$$

由於函數 $p_+(u)$ 的單調性, 不等式左端的極限是存在的. 再在(1.9)中取當 $h \rightarrow +0$ 時的極限, 得到

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) \leq p_+(u_0).$$

另一方面, 當 $u \geq u_0$ 時 $p_+(u) \geq p_+(u_0)$, 由此

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) \geq p_+(u_0).$$

因而

$$\lim_{u \rightarrow u_0 + 0} p_+(u) = p_+(u_0).$$

上述等式表明了函數 $p_+(u)$ 的右連續性.

引理証畢.

附注. 完全類似地可以證明 $p_-(u)$ 是非減的左連續函數.

引理 1.3. 凸函數 $M(u)$ 在任何有限區間內絕對連續且滿足李普希茲條件.

証. 考察任一區間 $[a, b]$. 假設 $a < u_1 < u_2 < b$. 由于

$$(1.4) \quad \frac{M(u_1) - M(a)}{u_1 - a} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(b) - M(u_2)}{b - u_2}.$$

从上述不等式即可推出

$$p_+(a) \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq p_-(b),$$

亦即对于區間 $[a, b]$ 內的一切 u_1, u_2 , 量 $\left| \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \right|$ 是有界的.

引理証毕.

定理 1.1. 任何满足条件 $M(a) = 0$ 的凸函数 $M(u)$ 可表为

$$M(u) = \int_a^u p(t) dt, \quad (1.10)$$

其中 $p(t)$ 是非減的右連續函数.

証. 首先注意函数 $M(u)$ 几乎处处有导数. 事实上, 由于 (1.7) 和 (1.5), 当 $u_2 > u_1$ 时

$$p_-(u_2) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1). \quad (1.11)$$

因为函数 $p_-(u)$ 是單調的, 所以它几乎处处連續. 假設 u_1 是函数 $p_-(u)$ 的連續点, 在 (1.11) 中取当 $u_2 \rightarrow u_1$ 时的极限, 即得

$$p_-(u_1) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1),$$

于是

$$p_-(u_1) = p_+(u_1).$$

因而几乎处处有

$$M'(u) = p(u) = p_+(u).$$

由于引理 1.3, 函数 $M(u)$ 绝对連續, 因此它就是 (例如参看 [38]) 自己的导数的不定积分.

定理証毕.

3. N -函数的定义. 函数 $M(u)$ 称为 N -函数, 如果它能够表为

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt, \quad (1.12)$$

其中 $p(t)$ 当 $t > 0$ 时为正, 又当 $t \geq 0$ 时是右連續的非減函数并且还满足条件:

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty. \quad (1.13)$$

簡言之, 上述条件表明, 函数 $p(t)$ 必須具有形如图 2 的图形, 而 N -函数的值就是相应的曲綫梯形的面积.

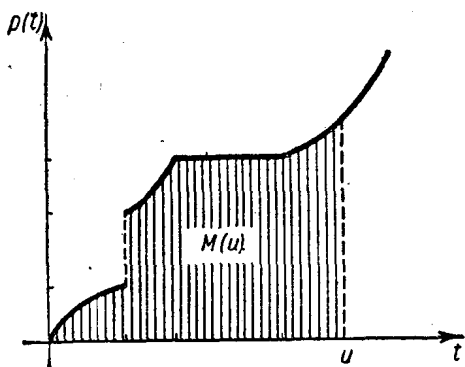


图 2

譬如函数

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha} \quad (\alpha > 1), \quad M_2(u) = e^{u^2} - 1$$

就是 N -函数的例子. 对于其中的第一个, $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$, 而对于第二个, $p_2(t) = M_2'(t) = 2te^{t^2}$.

4. N -函数的性质. 由表达式(1.12)可推出每一个 N -函数是連續的偶函数, 它在零点的值为零并且当自变量的值为正时还是增加的.

N -函数是凸的. 事实上, 如果 $0 \leq u_1 < u_2$, 則由于 $p(t)$ 的单調性

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \int_0^{\frac{u_1 + u_2}{2}} p(t) dt \leq \int_0^{u_1} p(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t) dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t) dt \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left[\int_0^{u_1} p(t) dt + \int_0^{u_2} p(t) dt \right] = \\
& = \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)].
\end{aligned}$$

在 u_1, u_2 任意的情况下

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) & = M\left(\frac{|u_1 + u_2|}{2}\right) \leq M\left(\frac{|u_1| + |u_2|}{2}\right) \leq \\
& \leq \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)].
\end{aligned}$$

在(1.2)中假设 $u_2 = 0$, 可得

$$M(\alpha u_1) \leq \alpha M(u_1) \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (1.14)$$

条件(1.13)的第一个等式表明

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0. \quad (1.15)$$

从(1.13)的第二个条件又可推出

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty, \quad (1.16)$$

因为当 $u > 0$ 时

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u} \int_0^u p(t) dt \geq \frac{1}{u} \int_{\frac{u}{2}}^u p(t) dt \geq \frac{1}{2} p\left(\frac{u}{2}\right).$$

我們指出, 对 N -函数而言, (1.14) 中仅当 $\alpha = 0, 1$ 或 $u_1 = 0$ 时等号成立. 事实上, 假设 $u_1 \neq 0$ 并且对于某个 $\alpha \in (0, 1)$ (1.14) 中的等号成立, 则由 2 頁所証明的結論在 (1.14) 中对于一切 $\alpha \in [0, 1]$ 等号成立. 于是对于一切 $\alpha \in [0, 1]$

$$\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

在此等式中取当 $\alpha \rightarrow 0$ 时的极限, 得到

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

这与(1.15)矛盾.

由此可見

$$M(\alpha u) < \alpha M(u) \quad (0 < \alpha < 1, u \neq 0). \quad (1.17)$$

由上述不等式可推出函数 $\frac{M(u)}{u}$ 当 u 为正值时是严格增加的

$$\frac{M(u')}{u'} < \frac{M(u)}{u} \quad (0 < u' < u). \quad (1.18)$$

为了証明这个断言,只須在(1.17)中命 $\alpha = \frac{u'}{u}$.

我們所得到的性質已經完全足以描述 N -函数的图形了(图 3). 性質(1.15)表明橫軸与 N -函数的图形在原点相切. 而性質(1.18)和(1.16)給出联結原点与 N -函数图形上的动点的弦之角系数的变化特征. N -函数的图形可能包含間断点和直綫段. 間断点对应于函数 $p(t)$ 的間断点,而直綫段对应于函数 $p(t)$ 的常数区間.

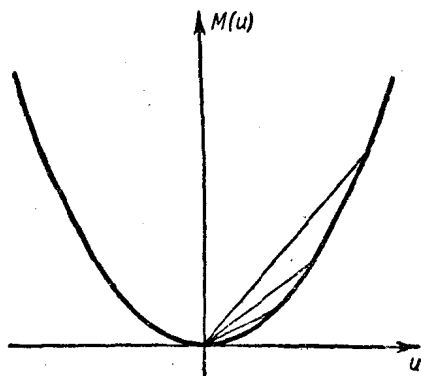


图 3

当自变量为非負值时, N -函数 $M(u)$ 的反函数記为 $M^{-1}(v)$ ($0 \leq v < \infty$). 这个函数是凹的,因为由不等式(1.2)当 $v_1, v_2 \geq 0$ 时

$$M^{-1}[\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2] \geq \alpha M^{-1}(v_1) + (1 - \alpha)M^{-1}(v_2).$$

从 N -函数 $M(u)$ 的右导数 $p(u)$ 的單調性可推出不等式

$$\begin{aligned}
 M(u) + M(v) &= \int_0^{|u|} p(t) dt + \int_0^{|v|} p(t) dt \leq \\
 &\leq \int_0^{|u|} p(t) dt + \int_{|u|}^{|u|+|v|} p(t) dt = \\
 &= \int_0^{|u|+|v|} p(t) dt = M(|u| + |v|). \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

假設 $a = M(u)$, $b = M(v)$ 是任意非負的數, 則由 (1.19) 又得到

$$M^{-1}(a + b) \leq M^{-1}(a) + M^{-1}(b). \quad (1.20)$$

5. N -函數的第二種定義. 使用以下的定義有時是很方便的. 連續凸函數 $M(u)$ 稱為 N -函數, 假如它是偶函數並且滿足條件 (1.15) 和 (1.16). 今証這個定義與前面的定義等價. 顯然我們只須証從 N -函數的第二個定義可以推出把它表為 (1.12) 形式的可能性.

由於 (1.15) $M(0) = 0$, 因此由函數 $M(u)$ 的偶函數性和定理 1.1, 能把它表為

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

的形式, 其中 $p(u)$ 是當 $u > 0$ 時非減的右連續函數 (函數 $M(u)$ 的右導數). 因為當 $u > 0$ 時

$$p(u) \geq \frac{M(u)}{u},$$

則當 $u > 0$ 時 $p(u) > 0$, 並且由 (1.16)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} p(u) = \infty.$$

另一方面, 當 $u > 0$ 時

$$M(2u) = \int_0^{2u} p(t) dt > \int_u^{2u} p(t) dt > up(u),$$

因而

$$p(u) < \frac{M(2u)}{u}.$$

因此由 (1.15)

$$p(0) = \lim_{u \rightarrow 0} p(u) = 0.$$

6. N -函数的复合函数. 两个 N -函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的复合函数 $M(u) = M_2[M_1(u)]$ 仍然是 N -函数. 事实上, 函数 $M(u)$ 有右导数(当 $u > 0$ 时)

$$p(u) = p_2[M_1(u)]p_1(u),$$

其中 $p_1(u)$, $p_2(u)$ 是 N -函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的右导数. 函数 $p(u)$ 右連續、非減且滿足条件(1.13), 因为函数 $p_1(u)$ 和 $p_2(u)$ 滿足这些条件.

其逆亦真: 任何 N -函数 $M(u)$ 都是两个 N -函数的复合函数 $M(u) = M_2[M_1(u)]$.

如果 $M_1(u)$ 为一給定的 N -函数, 則函数 $M_2(u)$ 由等式

$$M_2(u) = M[M_1^{-1}(|u|)] \quad (1.21)$$

唯一地确定, 其中 $M_1^{-1}(v)$ 是 $M_1(u)$ 的反函数.

这样一来, 为了将 $M(u)$ 表成复合函数的形式, 必須找出这样的 N -函数 $M_1(u)$, 使 $M_2(u) = M[M_1^{-1}(|u|)]$ 也是 N -函数.

因为当 $u > 0$ 时

$$p_2(u) = \frac{p[M_1^{-1}(u)]}{p_1[M_1^{-1}(u)]},$$

所以欲使 $M_2(u)$ 是 N -函数, 必須且只須函数 $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ 非減、右連續并且滿足条件(1.13), 因为連續函数 $M_1^{-1}(v)$ 单調且与 v 一齐趋近于零和无穷.

这样, 如果我們找到了非減、右連續并且滿足条件(1.13)的函数 $p_1(u)$, 使 $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ 同样是非減、右連續并且滿足条件(1.13)的函数, 那么函数

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} p_1(t) dt$$

和由等式(1.21)所定义的 $M_2(u)$ 都是 N -函数, 并且等式 $M(u) = M_2[M_1(u)]$ 成立.

作为函数 $p_1(u)$ 特別可以取

$$p_1(u) = [p(u)]^{\epsilon_0} \quad (0 < \epsilon_0 < 1).$$