今日数学

——随笔十二篇

〔美〕L.A.斯蒂恩 主编

马继芳 译

上海科学技术出版社

今 日 数 学

——随笔十二篇

〔美〕L. A. 斯蒂恩 主编
马继芳 译

上海科学技术出版社

MATHEMATICS TODAY

Twelve Informal Essays

Edited by

Lynn Arthur Steen

Springer-Verlag

New York Heidelberg Berlin

1978

今 日 数 学

——随笔十二篇

〔美〕L. A. 斯蒂恩 主编

马继芳 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 13.75　字数 305,000

1982 年 8 月第 1 版　1982 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—21,300

统一书号：13119·996　定价：(科四) 1.25 元

序

这本文集的目的在于向有才智的非数学家转述数学概念(特别是目前科学研究中已找到用途的那些概念)的一些性质、发展和应用。编辑动机早在1974年由美国数学学会、美国数学协会和美国工业与应用数学协会新组成的数学联合规划委员会(JPCM)讨论决定的。当时JPCM的九位委员是:芝加哥大学的S. M. 莱恩(主席)、普林斯顿大学的F. J. 小阿尔姆格伦、路易斯安那州立大学的R. D. 安德森、哈佛大学的G. E. 卡里尔、国际商业机器公司的H. G. 科恩、伦塞勒尔工学院的R. C. 迪普莱玛、贝克莱加州大学的R. C. 柯尔比、芝加哥大学的W. H. 克鲁斯卡尔和耶鲁大学的G. D. 莫斯托。

JPCM把编写此书作为它的第一个主要规划,并要求三个发起学会的上级机构数学科学讨论会(CBMS)向美国国家科学基金会申请支援。1974年12月,CBMS提出建议,1975年7月修正后,于1976年5月经基金会批准,随即开始编写此书。JPCM为此组成五人筹划指导委员会,作出规划方案。筹划指导委员会成员有:山打·巴尔巴拉加州大学的P. R. 哈尔莫斯、《科学》杂志的A. L. 哈蒙德、康乃尔大学的J. C. 基弗、《纽约时报》的H. 施瓦兹和纽约大学的J. T. 施瓦兹(主席)。在整个工作过程中,圣奥拉夫学院的L. A. 斯蒂恩担任主编兼调度,行政事务由CBMS负责。

筹划指导委员会感谢对此文集规划有贡献的人士。首先,此书的任何成功都要归之于每篇文章的作者。凡在规划

进行期间服务于JPCM的工作人员，都要感谢他们有益的建议与支持。L. 斯蒂恩作为主编兼调度，具有无比的热情与能力。CBMS的工作人员在取得规划的批准与执行方面，也都作出宝贵的贡献。斯普灵格出版社，特别是它的出版部及编辑部，在出版此书时紧密合作。最后，筹划指导委员会代表自身，也代表JPCM和CBMS，深深感谢美国国家科学基金会和它的普及局对规划的支持。

筹划指导委员会主席

J. T. 施瓦兹

1978年8月

目　录

今日数学

L. A. 斯蒂恩

甚至受过教育的人们
都不知我的学科存在，
这使我感到伤心！
——P. R. 哈尔莫斯

数学，的确是存在的。它是人类理性本能中固有的，在人类特性和人类历史中，它的地位绝不亚于语言、艺术或宗教。今天，数学正对科学和社会产生着翻天覆地的影响(但往往不引人注目)。许多抽象的数学概念，有的远在一百年前，曾促成例如电子学的革命，使我们的通讯手段及思想方法大为改观。没有“纯粹”数学的大量成果，既不会有计算机，也不会有无线电、电视、电话、人造卫星。数学科学较近的进展，曾有助于提高预报天气的能力，测量环境污染的影响，探索宇宙起源的奥秘和改进电子产品的设计。在工业社会的正常功能中，数学方法已是“此君不可一日无”了。

工业技术需要应用数学的方法，应用数学又需要纯粹数学核心的理论。从数理逻辑到代数拓扑，从数论到调和分析，这些纯粹数学的抽象结构无一不被当代应用数学家所广泛利用，纯粹数学的专门研究不受应用需要的影响几乎是没有的。源于科学技术的问题和猜想使理论犹如雨后春笋，迅速成长为难以穿越的密林。现代数学的原野上到处百花齐放、推陈

出新，有着解决问题及理解结构取之不尽、用之不竭的丰富源泉。

然而很多受过教育的人对这个源泉的存在或意义却视而不见。他们的关心集中在《为什么约翰尼不会做加法》或《害怕数学的人》上①，这是传统观念"我一点也不善于搞数学"的现代隐语。大多数人目睹严如酷吏的教师勒令学生拚命死记那些毫无意义、莫名其妙的东西，就会产生不正常的心理，坐失现代数学所提供的良机。

J. 伯恩斯坦最近在《纽约人》杂志上发表文章，描写科学家和非科学家谈话的困难。他发现，写好科学普及读物的必要条件是作者必须能"知其所云为何物"。生物学家、天文学家、化学家和物理学家，对愿意细心读书、兴趣广泛的门外汉讲他们本行里那些精采动人的东西时，都能引人入胜，极为成功。伯恩斯坦说，在和广大群众交谈中，数学家最不行，名列"倒数第一"！

"知其所云为何物"的数学家，当然并不缺乏。尽管从科普刊物上看不出这一点，其实老练的数学家比比皆是，几乎和经济学家或物理学家一样多，比起天文学家来要多好几倍。数学家和广大群众谈话时所面临的问题，是他们的学科中那些抽象难懂的词汇。分子、脱氧核糖核酸(DNA)、甚至黑洞都是有物质意义的东西，这使得化学家、生物学家和物理学家能从物质现实出发，作行之有效的谈话。对比之下，甚至用类比和隐喻都不能把生僻的数学词汇带入一般人的经验范围。

一个次要的问题是一般群众和数学界双方都安于孤立。害怕数学的群众多半宁愿避免多谈数学的困难，许多数学家也乐得不去引起群众的兴趣，因为这样就省得去用实例来说

① 这些都是反对新数学运动的书名。——译注

明现代数学里面“玄而又玄”的抽象概念，这是件困难甚至痛苦的工作。

并非所有数学家都如此，间或也有第一流的数学家曾向一般群众讲解他们工作的性质和意义（例子见书末参考文献）。但是，虽然这些通俗数学的经典著作仍然有用，却没有反映最近几十年数学使人目瞪口呆的大发展。七十年代的数学，不同于五十年代，更不同于三十年代。重要的是要在数学发展的漫长途程中指出每个年代所达到的高度，并举出现行著作的例子，作为新里程碑的标志，这就是本书的目的。

本书的十二篇论文出色地反映了进入本世纪最后四分之一的年代时数学科学的现状。我们不想系统地概括数学的全貌，只选出几个领域作细致深入的考查，以见纯粹数学与应用数学的分野。虽然许多重要的领域不得不从这一选集中略去，但所谈的课题的确包括了现代数学的方法、成就和挑战。

历　史

局外人理解现代数学的一部分困难，在于这个学科有如此漫长而复杂的历史。以概念和理论为根据的物理科学，至多只有几百年的历史；科学的生物学、医学、统计学和心理学中有许多出现得甚至更晚。然而数学却是以千年作为它的历史尺度的。古希腊就有过长足的进展：欧几里得逻辑的精湛，虽然现今在逻辑专家们眼里是简单的，但这已经是一道不易跨越的高栏，足以使将近半数的读书人“望洋兴叹”，他们的实际数学知识不能比这两千年前的老古董更新一点。读完高中数学课程的人，大约达到十七世纪中叶的数学水平；而大学一年级的微积分，也不过使一些学生的数学水平达到十八世纪而已。

在 L. 欧拉、P. S. 拉普拉斯和伯努利兄弟的年代里，近代物理刚刚诞生，化学仍在萌芽时期，象现在所知的生物学则想都没有想到。然而数学却已盛极一时：G. 莱布尼茨和 I. 牛顿的微积分已发展应用了一百年，并曾解决大量的数学问题。现在的美国人中，能学到一点超过十八世纪数学知识的，还不到百分之一。大多数人所学的东西，丝毫无助于改变他们对数学的印象：原型的欧几里得几何和牛顿的微积分是天衣无缝的教义，一劳永逸地解决了测量和运动的一切问题。

但在十九世纪和二十世纪初期，科学和数学都因发现了基本原理而迅速产生普遍性的理论，从此面貌一新。如生物学中的达尔文，物理学中的麦克斯韦，心理学中的弗罗伊德，这些伟人的成就，在数学中有高斯和黎曼与之匹敌；这些成就在科学和数学中都引起了革命。目前学科学的大学生就是从这个革命学起的，而多数学生的数学则到此为止。这个差距现已长达将近两个世纪，使得数学概念的普及十分困难。不仅是词汇，就连现代数学的动机和全部理性，都有赖于十九世纪的革命。除非对过去提出的挑战有起码的了解，否则对现代数学的成就就很难赏识。

十九世纪的数学

十九世纪，数学沿着两个显然相反的方向迅速成长。它把微积分这个工具改进为严格的分析体系，使数学物理强有力的理论成为可能；这些理论最终导致了量子力学、相对论的诞生，结果使对物质和空间的基本性质有更深入的了解。同时，十九世纪的数学，由于严格追问微积分和几何的逻辑，在无穷集合与非欧几何中发现了数学的新天地；这些理论最终导致二十世纪的数学家对本门学科基础更完善的理解。

可惊异的是，这两个主题——一个是应用的、具体的、对外有影响的，另一个是理论的、抽象的、内省的——来自相同的根源。根源之一是J.傅里叶的灼见：每一个数学函数，无论多复杂，总可以表示为某些简单的基本函数——即代表形成音乐中的纯音或光学中的纯色的那些函数——的和。傅里叶的建议来自分析非均匀加热的物体中热的分布，堪称数学史上最大胆最辉煌的概念之一。这个概念在傅里叶之前已被几位数学家发现过，不过傅里叶卓有成效的应用，有助于历史把他的名字和这个概念连在一起。

对傅里叶概念的研究持续了十九世纪的大部分时间，包括当时最大的数学家，如P.G.L.狄里克雷、黎曼、K.维尔斯特拉斯和G.康托尔。这些傅里叶的继承者们发现了是什么东西使这个方法能行（细心控制无穷级数的"收敛"）和什么原因使它失灵。理论物理学家沿着已发现的道路，用这个新工具来改造经典物理；数学家探索了傅里叶方法失效的千头万绪，终于发现无穷集合这个广大而又从未人知的世界。

十九世纪数学的另一伟大成就，是发现欧几里得几何并非唯一可能的几何。这个使人张皇失措的发现，无疑是K.F.高斯在十九世纪初期首先发现的，他是牛顿之后最大的数学家。高斯的发现一直未发表，可能是因为怕受嘲笑。公开发表归功于N.罗巴切夫斯基和J.鲍耶。这些"非欧"几何的关键在于发现欧几里得原来的第五公设（平行公设）不一定在各种几何中都正确；同样可以假设它是错的，因为在某些例子里它的确是错的。这个发现导致数学的多样化（英文mathematics这个字本身就是一个奇怪的复数名词）。过去只有一种几何，现在却有多种几何。最终会有多种代数而不是一种代数，多种数系而不是一种数系。进入二十世纪后，这个

多样化仍方兴未艾，它是上一世纪的发掘留下来的一份丰富遗产，不过有时使人为难。

十九世纪的主要成就，足以说明纯粹数学与应用数学之间巧妙的共生现象。傅里叶对传热问题的分析，最终导致康托尔高度抽象的无穷集论，而非欧几何纯粹抽象的研究导致相对论所必需的模型。从十九世纪其他的贡献中也发现同样的情形。群论、布尔代数和矩阵的产生，都是来自数学家需要澄清某些突出的理论争端而作的纯理论研究。然而这些理论曾广泛用于诸如原子物理、电机工程和经济学。另一方面，复分析（研究含有“虚”数 $i=\sqrt{-1}$ 的“复”变函数）是在数学物理中和傅里叶分析有密切关系而同时产生的，而现在复分析在解决纯而又纯的素数理论的难题中扮演主要角色。

十九世纪关于数学任务的信息是明确的：虽然数学是由纯形式的需要和科学事实的测定两方面共同形成的，但是，两个模型却产生出同样的结构。究竟是为数学而数学，还是为科学应用而研究数学，它所产生的问题，和解决问题所需要的结构，有一个共同的逻辑基础；它们主要是在表现的形式上不同。无怪乎哈尔莫斯看到大多数受过教育的人尚无足够的数学（或科学）经验来赏识这个数学研究和科学研究的重要范例要感到伤心了。

极端的抽象是真正的武器，
用以控制对具体事物的思维。
这个似乎矛盾的说法
现已完全成立。
——A. N. 怀特黑德

二十世纪的数学

博学多才的德国大数学家D.希尔伯特对1900年国际数学会议提出一项有力的挑战，包括23个尚未解决的问题，宣告数学进入二十世纪。这些问题对二十世纪前半期数学发展的方向产生了特殊的影响，凡是解决这些问题的人，立即受到热烈赞扬。但比这些问题更重要的，还是希尔伯特宣布的信念：在数学中没有不可知的东西。希尔伯特的论证——实际上是他一生的写照——是：提出问题和解决问题是数学的本质。在希尔伯特看来，永远不知是不可能的。在有创造力的数学家头脑里，纯粹思辩的工具足以解决任何明确的数学问题。

为了用资料证明他的立场，希尔伯特（和他遍天下的学生）着手制定计划，要为数学证明的步骤编码和形式化。他们有很好的理由相信形式化给数学带来的必然性，就和两世纪前牛顿定律带给力学的一样。但是，恰如量子力学破坏了牛顿的宿命论那样，1930年K.哥德尔的“不可判定性”结果破坏了希尔伯特的必然性。哥德尔证明了也许是思想史上最完善的成果之一：没有一个有意义的形式系统能够强化到足以证明或反证它所能提出的每一个语句。哥德尔证明了，用希尔伯特的话来说，在数学中总有一个不可知。

对二十世纪数学的另一个重大影响，是康托尔在十九世纪末把无穷集引入数学词汇。许多长期存在的问题，可以用集论提供的丰富语言来重新描述或重新解决。例如，关于微分方程解的稳定性问题（其中的解代表物体运动的轨迹），可以翻译为关于某些叫做面的点集的几何问题，从而帮助建立拓扑的浮现域。关于矩阵、群和集合的共同构造问题，在二十世纪引出了一门学科，现在普遍称为“近世”代数或“抽象”代数。

类似的方法用于十九世纪的分析时，引出了“抽象”分析，其中微积分的积分和导数用于无穷维空间。

这三门学科——代数、分析和拓扑——代表了现代数学家的共同修养。这些领域的定理、定义和方法，形成数学教育的经典：一个人不能阅读用代数、分析和拓扑的语言写的数学书，就不能自命真有数学知识。从二十世纪初期的这三个领域里产生了五花八门、难以相信的现代数学。

在数学科学的核心范围内，已有将近一百种可以辨认的分科。假如再加上应用数学，如统计数学、计算数学、运筹学和理论物理，则不同分科的数目将不下几百个。这些领域的研究，分布在大约1,500个用近100种语言出版的刊物上。光是1975这一年，《数学评论》索引的论文就超过了24,000篇。非数学家觉得这些全都很难懂，那是完全可以理解的；连许多数学家都如此。今天的数学已成为一个巨大、有力、复杂的企业，远远超出非专家的语言或直觉。

在叙述数学的进展时，
我既觉得兴致勃勃，
又有局促不安的感觉，
因为数学中幻想的成份太多，
在人类的智力攀登中，
数学不但是理性的阶梯，
也是神秘思想的阶梯。

——J. 布罗诺夫斯基

数 学 科 学

数学的世界可以看作以纯粹数学为核心的许多同心层组

成的。这个核心仍然被新概念、新结构和新理论搞得炽热。来自核心的概念,透过数学科学的外层,源源不断地以智慧的燃料供给更多应用的领域里某些难以想象的复杂问题。反过来,外层产生的问题——在纯粹数学与应用数学混合扩散的界面上——供给核心以新结构、新方法和新概念。

核心的数学是有特殊形式的科学。它既象自给的原子反应那样靠内能来哺育,也靠和人类问题密切接触的外层来提供新燃料。靠近核心的内层,使用精湛的技术来为外部的目的服务。内层的理论,多指向解决问题,而不是发现基本形式。远离核心的外层,多把数学当作比喻,而不是当作理论用:应用与技术完全融合,以致变成完全不同的学科。理论和问题透过各层间不明确的边界而互相促进,既丰富了数学,又丰富了科学。

在过去的四分之一世纪里,数学的世界已经从一个单独的学科发展为一群犬牙交错的学科,现在通称为"数学科学"。这门科学除核心领域如数论、数理逻辑、微分拓扑和代数几何外,还包括应用领域,如运筹学、统计学、计算科学、组合学和数学程序设计。数学模型在科学中的应用已扩散得如此广泛,以致在数理经济学、数理生物学、数理心理学和数理语言学各门中又有许多不同的学科(有各自的专门刊物)。甚至象政治科学和历史,都未尝不受数学势力膨胀的影响:例如最近(常有争论)把统计技术引入历史研究,曾产生一门特别新命名的"史衡学"(cliometrics)。人类的智力活动中,未受数学科学的影响而大为改观的领域,已寥寥无几了。

本书所选的论文,概括了数学科学的全貌。有五篇考查了传统领域的最新发展:一百年前提出的数学老问题仍在不断被解决。I. 里查兹在《数论》一文中讲了几个对百年老问题

的最近贡献：关于素数的模型和方程的整数解。J. 阿尔柏林在《群与对称性》一文中，说明了代数和几何中的对称模型——十九世纪开始研究的——是怎样把数学家引进全面分析有限群这个门槛的。有限群是数学的"基本粒子"之一。

以十九世纪概念为基础的新发展，这部分还包括其他三篇文章。R. 彭罗斯在《宇宙的几何学》一文中，说明了非欧几何这个荒谬的模型——在我们的三维空间里甚至不能如实表现出来的模型——可能是宇宙的"真实"模型。P. 汤姆森在《气象数学》一文中，描述了在气象学中使用数学方法的悠久历史，并表明大气流体动力学方程近似解法的最新改良是怎样揭示出可能存在预报的不确定性原理的。这个原理说：计算精确度的增加并不一定能增加天气预报的精确度。最后，K. 阿佩尔和 W. 黑肯在《四色问题》一文中，描述了人与机器的大协作导致百年的老大难题——在地图上需要用多少种颜色来区别不同的地区——最近以计算机为基础解决了。

第二部分的五篇论文主要介绍最近才产生的数学科学领域。每一篇都表明不仅新数学能推进科学某一方面的发展，而且数学还常能引出连最广博的普通常识也无法预料的惊人结论。例如，R. 格拉汉姆在《组合调度理论》一文中用数学的推理证明：在生产过程中增加人员会增加(而不是减少)完成工作所需的时间，并进而讨论组合数学的新概念，即为简单的调度问题提供数学模型。D. S. 穆尔在《实验数据的统计分析》一文中讨论了关于医疗实验的各种问题，表明在这个重要的人类事业中，数学用得如何广泛。穆尔说明，精心的统计设计如何能把医学研究中病人的危险减少到最低限度，并说明如何设计实验使某种错误结论的机会减少到零。

这部分最后三篇论文考察了现代应用数学中大不相同的

例子。M. 戴维斯在«什么是计算?»一文中证明：和哥德尔的不可判定性结果有关的某些极端抽象的概念，现在怎样在算法语言的分析中结出成果，使之能够判别问题的可解与不可解。J. 施瓦兹在«数学作为理解经济的工具»一文中，用博弈型经济模型的数学分析来证明：可能存在着经济状况，其中适当的集中干涉能同时改善每一个人的经济利益（而不是财富从一个集团转移到另一集团），用的方法是使经济远离"次最优平衡"。最后，F. 霍彭施太特在«生物种群学的数学方面»一文中，描述了用来研究生态学的某些数学方法，并证明了经济情况怎样能和生物事实互通声息，使一个物种的迅速灭绝成为对某种特殊生产最适宜的长远决策。

这些论文每一篇都既联系核心数学，又联系某方面的科学，引证许多数学的用途，是这些数学理论的创始者做梦也想不到的。这些例子很足以说明一句格言：无法预言哪些数学理论最终是有用的或怎样用法。这句格言的推论，似乎是矛盾的：需要用新数学来解决的问题，总是不能直接求解的。概念在数学球体内外层之间运动的过程不是直接的。本来和原问题无关的核心数学概念，可能成为它的解法所必需的。反之，应用问题所产生的概念，在获得自己的生命力以后，往往提供解决其他问题的方法而不是解决原问题。这种矛盾，在讨论纯粹数学和应用数学或基础研究和应用研究之间持续不断的激烈争论时，往往是会被忽略的要点。即使是那些急于求成的人，经过稍许反省即可看到基础研究的重要性。但是他们往往看不到：基本概念虽可应急征用，但不能奉命而生。耗资百万，多年实验，可以把 $E=mc^2$ 变成原子弹，但是世界上无钱能买爱因斯坦的头脑。强迫命令只能摧残艺术的创造力，数学也不例外。要想为将来的应用保证基本概念源源不