010967
013
9:1

高等学校教材

高等数学

(1981年修订本)

上册

同济大学数学教研室 主编

人民教育出版社

本书第二版是由同济大学数学教研室，参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《高等数学教学大纲》修订而成的。第一章函数、极限、连续各节几乎重写，其余各章作了不少更动，并对习题也作了补充。本书修订稿仍由陆子芬教授任主审，参加一起审稿的还有盛骤、孙玉麟等同志。

原线性代数、概率论两章未列入本书第二版，编者参照《工程数学教学大纲》修订后，将各用《工程数学——线性代数》和《工程数学——概率论》名义出版单行本。

本书分上、下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数，书末还附有积分表和习题答案。

本书说理浅显，叙述详细，例题较多，便于教学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员的自学用书或参考书。

责任编辑 丁鹤龄

高等学校教材

高等数学

（1981年修订本）

上册

同济大学数学教研室 主编

*

人民教育出版社出版

四川省新华书店重庆发行所发行

重庆新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 14.875 字数 358,000

1978年3月第1版

1981年11月第2版 1982年5月第1次印刷

印数 775,501—936,000

书号 13012·0662 定价 1.10元

第一版前言

本书分上、下两册．上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数，下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论．各章配有习题，书末附有习题答案．

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书．

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驺，上海交通大学王嘉善，上海纺织工学院巫锡禾，上海科技大学蔡天亮，上海机械学院王敦珊、周继高，上海铁道学院李鸿祥等同志．

本书由上海海运学院陆子芬教授主审．参加审稿的还有大连工学院刘锡琛，合肥工业大学万迪生、何继文，成都电讯工程学院冯潮清，西北工业大学王德如，浙江大学盛骤、孙玉麟，太原工学院徐永源、张宝玉，上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志．

审稿同志都认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢．

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编　者

一九七八年三月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　变量与函数

一、常量与变量

在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

任何一个变量，总有一定的变化范围. 例如，某天的最高温度是 14°C、最低温度是 4°C，那末，这一天的气温 T 的变化范围就是 4°C 到 14°C，即变量 T 的变化范围是 4 至 14.

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围.

下面我们引进各种区间的名称和记号.

设 a 与 b 是两个实数, 且 $a<b$. 那末, 满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 记为 $[a, b]$; 满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间, 记为 (a, b); 满足不等式

$$a<x\leqslant b \quad 或 \quad a\leqslant x<b$$

的一切实数 x 的全体叫做半开区间, 分别用记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示. 在以上各种情形中, a 和 b 叫做区间的端点, 而 $b-a$ 叫做区间的长度.

在数轴上来说, 区间是指介于某两个点之间的线段上点的全体. 这两点就是区间的端点. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示.

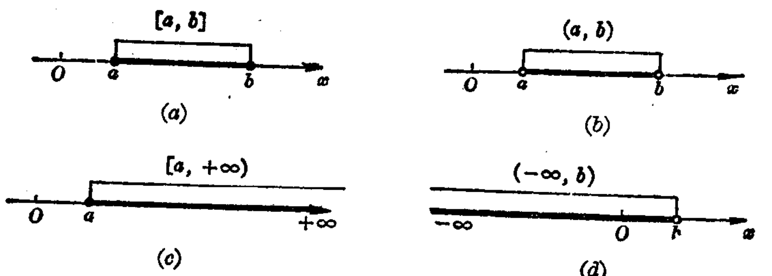

图 1-1

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点的场合, 我们就简单地叫做“区间”, 且也使用“圆括弧”来表示.

除了上述那些有限区间外, 还有一类区间叫做无限区间:

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体(图 1-1(c)), 有时也写作 $a\leqslant x<+\infty$;

$(-\infty, b)$ 表示小于 b 的实数的全体(图 1-1(d)), 有时也写作 $-\infty<x<b$;

$(-\infty, +\infty)$表示全体实数，有时也写作 $-\infty<x<+\infty$.

注意，$+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们不是数，仅仅是记号.

以后，我们还要用到与区间有关的邻域概念.

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径. 上述绝对值不等式与不等式

$$-\delta<x-a<\delta$$

等价，因此有

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

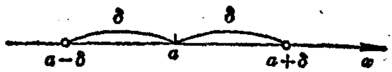

图 1-2

从而，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间$(a-\delta, a+\delta)$. 所以说，点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心，而长度为 2δ 的开区间(图 1-2).

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情形(多于两个变量的情形以后在第八章再讲)举出几个例子.

例 1 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道，它们之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那末 s 与 t 之间的相依关系由公式

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那末当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定 s 的相应数值.

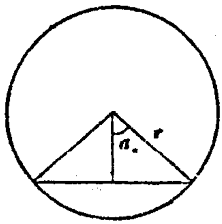

图 1-3

例 3 设有半径为 r 的圆，考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n. 由图 1-3 容易看出，$S_n=2nr\sin\alpha_n$，其中 $\alpha_n=\pi/n$. 所以内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 之间的相依关系由公式

$$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

给定. 当边数 n 在 3, 4, 5, … 等自然数中任意取定一个数值时，由上式就可确定周长 S_n 的相应数值.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，就叫 y 是 x 的函数.

变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域. 通常 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y=f(x)$、$y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等等来表示. 这里字母 "f"、"φ"、"F" 表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用的. 但如果同时考

察几个不同的函数时，为了避免混淆，就不要用同一个字母来表示不同的函数.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有确定的值和它对应，那末就称函数在 x_0 处有定义. 因此函数的定义域也就是使函数有定义的实数的全体.

函数是由定义域及对应法则所确定的. 因此研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如例 1 中，函数的定义域为无限区间 $(0, +\infty)$，因为半径 r 可以取任何正数. 又如例 3 中，函数的定义域为不小于 3 的一切自然数，因为正 n 边形的边数 n 可以是 3、4、5、… 等自然数中的任何一个.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定：函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$，函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

自变量取定义域内的某一值时，函数的对应值叫做函数当自变量取该值时的函数值. 如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都只有一个确定值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 例 1、例 2 和例 3 中的函数都是单值函数. 下面，我们给出一个多值函数的例子.

例 4 在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2,$$

当 x 在闭区间 $[-r, r]$ 上取定一个数值时，由上式可以确定 y 的一个值(当 $x=\pm r$ 时)，或确定 y 的两个值(当 $-r<x<r$ 时). 所以 y 是 x 的多值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

在函数定义中，并没有要求自变量变化时函数一定要变，重要的是：当自变量 x 在定义域中任取一数值时，函数有确定的值和它对应. 因此，我们可以把常量当作函数来看待，即常量是这样一个函数，它对于自变量的一切值来说，函数值都是相等的.

三、函数的表示法

在函数的定义中，关于用什么方法来表达函数，并没有加以限制. 常用的表达函数的方法有以下三种.

1. 公式法 用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫做公式法. 前面例 1 至例 4 都是用公式法表示的函数. 公式法的优点是简明准确，便于理论分析. 但公式法表示的函数不够直观，并在有些实际问题中遇到的函数关系，很难甚至不能用公式法表示.

2. 表格法 在实际应用中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如平方表、对数表、三角函数表、三角函数对数表等等. 用此表示函数的方法叫做表格法. 表格法的优点是可以直接从自变量的值查到对应的函数值. 但表中所列数据往往不完全，同时用表格法表示的函数不便于进行理论分析.

3. 图示法 对于函数 $y=f(x)$，在其定义域内取一个 x 值时，对应地就有一个 y 值. 在平面直角坐标系 xOy 中以这一对 x、y 值为坐标定出一个点 $M(x, y)$. 一般当 x 变化时，点 M 就在平面上运动并描成一条曲线（图 1-4）. 这条曲线叫做函数 $y=f(x)$ 的图形.

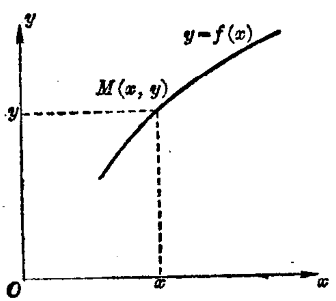

图 1-4

反过来说，如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于 y 轴的直线

至多只有一个交点，那末这条曲线表示一个单值函数，当自变量值等于曲线上点的横坐标时，对应的函数值即等于该点的纵坐标．因此函数也可由坐标平面上的曲线来表示．这样表示函数的方法叫做函数的图示法．用温度自动记录仪描下来的温度变化曲线(图 1-5)，它表示了温度 T 与时间 t 的函数关系，这就是用图示法表示函数的例子．图示法的优点是鲜明直观，但不便于作理论分析．

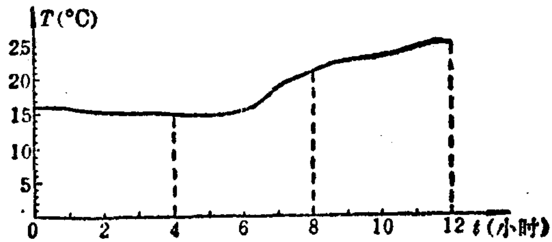

图 1-5

以后我们所讨论的函数，常用公式法表示．我们指出，用公式法来表示函数时，有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数，即所谓分段函数．例如

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1+x, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

是确定在区间 $[0,\ +\infty)$ 上的一个函数，当自变量 x 取闭区间 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数值 y 由公式 $y=2\sqrt{x}$ 确定；当 x 取区间 $(1,\ +\infty)$ 内的数值时，y 由公式 $y=1+x$ 确定．它的图形如图 1-6．

又例如
$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

是确定在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的一个函数，它的图形如图 1-7．

在不同范围用不同式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与

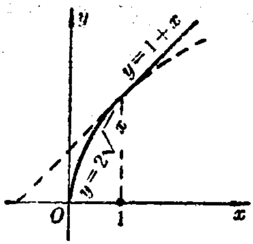

图 1-6

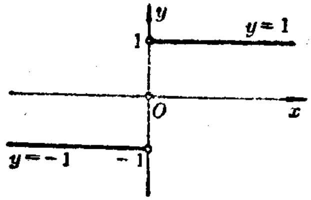

图 1-7

函数的定义并无矛盾，而且有现实的意义．在自然科学及工程技术中，经常会遇到分段函数．例如在恒温下，气体压力 P 与体积 V 的函数关系，当 V 不太小时依从波义耳-马利奥脱定律；当 V 相当小时，函数关系就要用房特瓦定律来表示，即

$$P=\begin{cases}\dfrac{k}{V}, & \text{当 } V\geqslant V_0;\\[2ex] \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & \text{当 } V<V_0\end{cases}\quad(k、\alpha、\beta、\gamma \text{ 都是常量}).$$

四、函 数 记 号

前面说过，y 是 x 的函数可用

$$y=f(x),\ y=\varphi(x),\ y=F(x)$$

等等来表示．例如，如果我们用 $f(x)$ 表示由式子

$$2x^2+5$$

所表达的函数，就是

$$f(x)=2x^2+5.$$

这时，记号"f"表示这样的对应法则：与 x 对应的函数值，是由括号内的 x 值平方后乘以 2 再加上 5 而得到的．

如果函数由 $y=f(x)$ 表示，则当自变量取某一个定值 x_0 时，对应的函数值用记号

$$f(x_0)\quad 或\quad y|_{x=x_0}$$

表示．它的确定只要将 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x，就得到 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$．

例如，对于函数 $f(x)=2x^2+5$ 来说，

当 $x=0$ 时，　　$f(0)=2\cdot0^2+5=5$；

当 $x=1$ 时，　　$f(1)=2\cdot1^2+5=7$；

当 $x=-2$ 时，　　$f(-2)=2\cdot(-2)^2+5=13$；

当 $x=x_0$ 时，　　$f(x_0)=2x_0^2+5$．

例 5　求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的函数值．

解　把 $\frac{\pi}{2}$ 代 $\sin x+\cos x$ 中的 x，进行计算，得函数值

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1+0=1.$$

例 6　求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=2$，$x=x_0+1$，$x=x_0+h$ 各点处的函数值．

解

$$f(2)=2^2-3\cdot2+5=4-6+5=3;$$

$$\begin{aligned}f(x_0+1)&=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5\\&=x_0^2+2x_0+1-3x_0-3+5\\&=x_0^2-x_0+3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5\\&=x_0^2+2hx_0+h^2-3x_0-3h+5\\&=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).\end{aligned}$$

例 7　求函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$ 在点 $x_1=0$ 和点 $x_2=-1$ 处的函数值，并比较函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小．

解　$f(x_1)=f(0)=\frac{2\cdot0-1}{0^2+1}=-1$，

$$f(x_2)=f(-1)=\frac{2\cdot(-1)-1}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}.$$

由此可见，　　$f(x_1)>f(x_2)$．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c