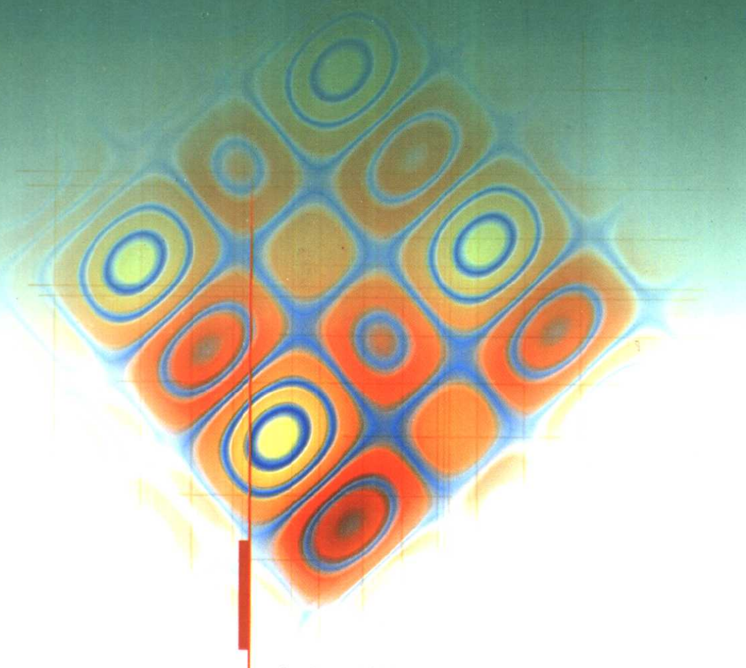
高等数学学习指导与习题解析

黄光谷 邹亚清 谭代富 方文波 编



（上册）

华中科技大学出版社

高等学校数学辅导教材

高等数学学习指导与习题解析

（上　册）

黄光谷　邹亚清
谭代富　方文波　编

华中科技大学出版社
（华中理工大学出版社）

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解析(上册)/黄光谷 等编
武汉:华中科技大学出版社，1999年8月
ISBN 7-5609-2000-4

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①黄… ②邹… ③谭… ④方…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-题解
Ⅳ. O13

高等数学学习指导与习题解析(上册) 黄光谷 邹亚清 谭代富 方文波 编

责任编辑:李立鹏
责任校对:童兆丹
封面设计:刘 卉
监 印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

印 刷:核工业三〇九印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:16.875 字数:428 000
版次:1999年8月第1版 印次:2001年5月第4次印刷 印数:16 001—21 000
ISBN 7-5609-2000-4/O·189 定价:19.80元

内容提要

本书是高等学校（主动式教学法教学改革）数学系列教材之主教材《高等数学Ⅰ》的辅导教材，内容以教育部（原国家教委）所颁本科《高等数学课程教学基本要求》为依据，上册包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程共六章．各章按讲编写，与主教材配套，便于程序化教学与自学；各讲包括内容提要、答疑辅导、典型例题、教与学建议、补充与提示、习题选解几个部分；各章末安排了习作课，含内容小结、释疑解难、题型归类、课堂练习、课外作业（及答案与提示）几部分；书末安排了期末复习课三次，含知识要点、范例分析、自测题（及答案），总复习题解答和期末试题（及答案）三套．

本书可供各工科、理科、农林、财经本科或专科各专业《高等数学》课程作为教、学参考书，还适宜作为自学辅助课本、教师上课与习作课和复习课的讲义，和备考及“考研”的复习资料．本书内容具有通用性，对于使用各种版本《高等数学》或《数学分析》教材的读者，都适用．例如，本书的编排是与同济大学编的《微积分》教材不谋而合的．本书可与《微积分》教材配套使用．

本套书是湖北省教育委员会审定的A类《湖北省普通高等学校1997年省级教学研究项目》．

序　言

我们即将进入 21 世纪，面临信息时代（或工业革命后时代、计算机革命时代）．其特点是信息爆炸，通常以十年为单位度量；计算机迅速发展、日益普及；数学的应用向一切领域渗透，科技及各行业日益数学化、数字化．我们必须进行教育改革以适应时代的发展．

高等学校传统的数学教材有许多优点，对培养人才起了很大的作用．但反思一下，传统的高校数学教材和教学越来越形式、抽象，多见定义、定理、证明、计算、推导，少见与周围世界及各实际问题和其他学科的密切联系，内容老化，培养学生能力和素质不够，不便于自学．通过数学教学开发智力、达到开发头脑全面考虑科学系统的功能就更差了，这也是一个国际性的问题．目前的高校数学教育对培养绝大多数的非数学专业的人才来说是远远不够的，高校数学教育必须进行改革．

由黄光谷教授等编写的《高等学校数学序列教材》，顺应了转变教学思想、更新教学内容、改进教学方法、改革创新教材的新形势，他们立足于多年教学实践、探索、改革的基础之上，有深厚的群众基础、素材基础、经验基础和写作基础．这些老师在退休前，边教学、边写作、精心设计、大胆创新、团结协作，克服了种种困难，终于完成了这项系统工程，这套著作将为百年树人，改革教材作出巨大的贡献．

这套教材分为三个梯级：主教材、教学指导书、习题解答，它们互相配合呼应，形成一个大系统和整体，便于自学，构成大三级循环．中三级循环为新课、习作课与复习课，小三级为每讲的内容、

思考题与习题．大、中、小三个梯级循环，配合默契，学生不愁学不好，不愁能力和素质不增强．虽减少了课时，但能提高教学的质与量．

这套教材注意继承传统教材的优点，并实行主动式教学法，本着循序渐进、学而时习之的教学原则，注意调动学生学习的主观能动性，力求处理好传授知识与培养能力和提高素质的关系，注意培养学生思考、归纳、分析、综合、钻研、类比、判断、选择、联想、应用、建模、创新等各种方法和能力；让学生在分析问题、解决问题中学会选择方法、检验结果、寻找原因、转换观点等一系列实在的本领，提高学生的素质和数学修养．

这套教材既注意了传授必要的基础知识，又注意介绍建模、数学软件等新概念、新方法和新知识，以适应当今科技迅速发展的形势．在编写格式方面，大胆采用了按讲编写的新方式，既便于教与自学及规范化管理，还可为后续工程——制作音像教材（音像制品和电子书籍等）提供脚本或素材，便于电化教学之用．总之，这套教材构思好、编排新、适用面广，将会在数学教育界引起很大的反响．

编写这套教材是改革数学教育的一种尝试．由于前无借鉴和时间仓促等原因，和任何新生事物一样，它也会存在一些不足之处，这将会随着试用、修改而日臻完善．我相信这套几百万字教材的出版，定能受到广大师生和教育工作者的欢迎和好评，它们将为高等学校数学教材的百花园又增添一组奇葩．

华中理工大学教授　林化夷

1999 年 3 月于武汉

前 言

国家要实现"现代化,要参与21世纪的世界性竞争,关键是人才的培养;而人才培养的关键是教育．数学教育是教育事业的重要组成部分,改革数学教育的关键之一是教材的改革．有什么样的教材,就决定了教师采用什么样的教学方式和方法．传统数学教材有逻辑严谨、系统性强等许多优点,对培养人才起了很大的作用．但由于历史的局限性,是有须改进之处的．

本套(新编)高等学校数学系列教材,共三类六门18种,是覆盖高等数学、工程数学等主要基础课程的教材,注意了吸收各门传统教材的优点,又力求转变教育思想,体现教改精神,以适应21世纪科技与信息迅猛发展的新形势,着眼于培养具有知识面广的较高数学修养(或素养、素质)的人才,具有现实的意义

本套教材在内容上以国家教委新颁《高等学校工科数学课程教学基本要求》为依据,提倡主动式教学法,力求处理好传授数学知识与培养各种能力和提高素质的关系,把培养学生获取知识、解决问题的能力与开拓、创新的精神作为教材的重要任务之一,变被动式的灌输知识(注入式)为主动的参与、钻研与力行(即主动式、启发式教学法),实行教与自学双向教学

这套教材总的构思是:按讲编写,循环配合;培养能力,便于自学;提高素质,减少课时,便于备课和电化教学。其中三类书之间既互相配合呼应,又各分工不同,各显特色;主教材减少课时、内容少而精、便于教与自学;主教材所配习题及习题解答则用来巩固教材内容,更多地提供方法、加大信息量;教学指导书则用来加深理解、开拓视野、扩大知识面,并介绍有关新概念、新方法和新知识

使用这套教材时，应以主教材为蓝本，主教材的每一讲，原则上是两学时的教学内容，使用时可更换和补充证法和例题；有些讲编入的内容较多，可从中挑选、讲授主要内容；其余内容或简单例题可留给学生自学．有些讲的内容比较简单，可以合并两讲为一讲以节约教学时数，加强习作课或另补本专业建模等教学内容．教材中所配习题，可点半数左右作为课后作业，其余由学生选做．

教学指导书中所列习作课，应纳入教学日历、作为教学内容的一个重要组成部分．习作课也是一种数学实验课，应引起重视，以便培养学生解题、思考、应用等各种能力．上习作课应注意引导，启发思维，做到讲练结合．至于教学指导书中所列复习课，各专业可视教学时数是否充裕，或者纳入教学计划，或者由学生自学．教学指导书中的其余内容，均可留给学生自学．

习题解答书与教学指导书是学生自学的两根拐杖，应让学生学习"摸着石头过河"，应教育学生先自做习题，自己思考；遇有困难，再看解答，并读懂弄通．不要怕学生照抄解答，反正这几门数学课程的考试一般是闭卷考试，在考场上是抄袭不到的，不要"因噎废食"——不准学生看习题解答书．习题解答书全由学生自学．

新编这套教材是改革现行高校数学教材的一种尝试．由于我们水平有限、资料有限、见识有限，加上时间仓促，书中可能存在一些错误、缺点或不妥之处，恳请各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改．

编写这套书，得到武汉纺织工学院和华中理工大学出版社等单位的大力支持和关心，在此我们表示衷心的感谢！

本书编委还有穆汉林、唐强、王洪山、杜宗林等老师，李美珍、李杨、黄小青、杜立等同志做了部分工作，特此致谢！

编　者

1999 年 11 月于武汉

目　　录

第一章　函数、极限、连续

引　言

读者要开始学习高等数学了．与初等数学比较而言，高等数学的内容多而难，进度快．为了迅速地掌握这些内容，并培养能力，提高素质，这就要提倡自学，实行教与自学双向教学，读者在学习过程中应抓好如下五个环节：

(1)课前预习(前一天通读下次要讲的内容)；

(2)认真听讲(提倡超前的动脑思维)；

(3)课后复习(弄懂每一个细节，并适当看一些参考书，帮助并加深理解该讲的内容)；

(4)完成作业(要独立完成，可以讨论或询问，但切忌抄袭)；

(5)及时小结(总结所学内容、归纳方法、写出体会等)．

只要坚持不懈地抓好这五个环节，是可以学好高等数学的．打好了高等数学课程的基础，并掌握了它的一系列思考方法，会得益非浅，再学习其它课程会得心应手．

高等数学课程的主要任务是研究函数的一系列分析性质：求函数的极限，函数的连续性、可微性(求导数与微分等)、可积性(求各类积分及其应用等)，函数展开成级数，研究函数的性态与作图，解微分方程求函数式，等等．其中，极限方法是主要工具，连续函数是主要研究对象．由此看来，本章内容是后续各章的基础，而下面第一讲(函数知识)又是基础的基础．

第一讲　函数复习

一　内容提要

读者在初等数学课程里已经系统地学习了函数的概念、各种初等函数的性质及图象等知识，这里只作扼要复习和补充．

1．函数定义

定义 1　用数集上的自变量与因变量之间的对应关系来定义（略，详见教材）．

定义 2　（用点集与对应来定义）设 D 是 X 轴（即一维空间 R）上的一个点集，如果对于每个点 P（或 X）$\in D$，变量 y 按照一定的规则变化，f 总有确定的值与它对应，则称 y 是变量 x 的（一元）函数或点 P 的函数，记为

$$x \to y \quad \text{或} \quad y = f(x), \quad y = f(P).$$

利用点函数，很容易把函数概念推广到二维、三维乃至 n 维空间中去，来定义多元函数．

2．函数的初等性质

主要指有界性、单调性、奇偶性、周期性等，此处略，详见教材．

3．复合函数

简言之，即函数的函数，记为 $y=f(\varphi(x))$，其中 f 称为外函数，φ 称为内函数，还可推广至多次复合的情形．

4．反函数

$y=f(x)$ 的反函数（即逆映射）记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $y=f^{-1}(x)$．把原来的函数 f 叫做直接函数（别误为原函数）．应注意：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象在同一坐标系中是重合的；但 $y=f(x)$（即 $x=f^{-1}(y)$）与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在同一坐标系中

关于直线 $y=x$ 成轴对称(一般而言不一样).

5. 基本初等函数与初等函数(略)

6. 其它一些常用的函数

(1)双曲函数(略,见教材 I [1]).

(2)依赖于参(变)数的函数,$y=f(x,t)$,需指出哪一个是自变量,哪一个是参变量. 在研究中,常固定参数,视参数为常数(如 a、b、c 等)一样地对待.

(3)幂指函数:$y=[u(x)]^{v(x)}$,常变形为复合指数函数.

$$y=e^{v\ln u} \quad 或 \quad y \triangleq \exp(v\ln u)$$

来进行研究. 这里 $e^f \triangleq \exp f$.

(4)分段函数:$y=|x|$,$y=\operatorname{sgn}x$,等等(略).

(5)取整函数:$y=[x]$,其图形为阶梯曲线. 显见

$$x-1<[x]\leqslant x, \quad [x]\in Z;$$

$$n>[x]\Longleftrightarrow N>x(n\in N).$$

此外,还有用描述法表达的狄利克莱函数 $y=D(x)$,用积分、级数或微分方程表达的函数,等等(略).

二　答疑辅导

1. 什么样的函数存在(单值)反函数?

答 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W,即 $f(D)=W$,若对应规则 f 使 D 与 W 之间构成“一一对应”关系

$$D\longleftrightarrow W,$$

即$\forall\ x_1$、$x_2\in D$,且 $x_1\neq x_2$,则有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,那么 $y=f(x)$必有单值反函数 $x=f^{-1}(y)$或 $y=f^{-1}(x)$,事实上,此时必存在着单值对应 $y\rightarrow x$(否则矛盾).

2. 如果函数 $f(x)$在某有穷区间上的每一点都有定义(取有限的函数值),能否由此推出该函数一定有界?

答 不能,反例:$f(x)=1/x$,　$x\in(0,1)$. 显见当 x 充分接

近于 0 时，$f(x)$ 可以取任意大的值，即无界，例如，需 $f(x)>10000$，只需取 $0<x<0.0001$.

3. 在复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义中，要求内函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值集合非空，且全部或部分包含在外函数 $y=f(u)$ 的定义域之中，为什么要附加这些限制条件？

答 因为不是任何两个函数都能构成复合函数，只有当 $x\in D$，$D_1\subset D$ 通过中间变量 $u=\varphi(x)$ 使 y 有确定的值与之对应时，才可以构成以 D_1 为定义域的复合函数．而当

$$\varphi(D)=\varphi \quad \text{或} \quad \varphi(D)\cap E=\varphi$$

（E 为 $f(u)$ 的定义域），这时不能通过 u 使 y 有确定的值与 $x\in D$ 相对应，就不能构成复合函数．

例如，

$$\begin{cases} y=u^2; \\ u=\sqrt{-x^2} \quad (x\neq 0); \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\arcsin u \quad (|u|\leqslant 1); \\ u=x^2+2 \quad (x\in \mathrm{R}) \end{cases}$$

都不能构成（实值的）复合函数．

又如 $y=\ln u\,(u>0)$，$u=x-1\,(x\in\mathrm{R})$，虽能构成复合函数

$$y=\ln(x-1),\quad x\in(1,+\infty),$$

但其定义域 $D_1=\{x\,|\,x\in(1,+\infty)\}\subset D=\{x\,|\,x\in\mathrm{R}\}$，且 $D_1\neq D$，即复合函数的定义域变小了，它比内、外函数的定义域都要小一些．

三　典型例题

1. 求函数的定义域与值域

例 1 设 $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{3-x}+1$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ 的定义域．

解 先求出 $f(x)$ 的定义域 D_1，解不等式

$$\frac{3+x}{3-x}>0\Longrightarrow\begin{cases}3+x>0;\\3-x>0,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}3+x<0;\\3-x<0,\end{cases}$$

得 $$D_1=\{x\mid |x|<3\}.$$

次求 $f(3/x)$ 的定义域 D_2． $u=3/x$ 应满足

$$|3/x|<3 \Rightarrow |x|>1.$$

于是，$f(x)+f(3/x)$ 的定义域

$$D=D_1\cap D_2=\{x\mid 1<|x|<3\}=(-3,-1)\cup(1,3).$$

注 这类题不必去求函数 $f(3/x)$ 的表达式，否则较繁琐．

例 2 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$； (2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 (1)【可用求其反函数定义域的方法来求直接函数的值域】本题易解出反函数

$$x=\frac{y+3}{2-y}\text{，其定义域 } y\neq 2,$$

故直接函数的值域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)【利用不等式求值域】 当 $x=0$ 时 $y=0$；当 $x\neq 0$ 时，

$$y=\frac{2}{x+1/x}.$$

(i)若 $x>0$，由 $x+1/x\geqslant 2$，从而 $0<y\leqslant 1$；

(ii)若 $x<0$，由 $x+1/x\leqslant -2$，从而 $-1\leqslant y<0$.

综上知，所求值域为 $[-1,1]$.

2. 求函数的表达式或函数值

例 3 设 $f(e^{x-1})=3x-2$，求 $f(x)$.

解法一(凑元法) $\because$ $x-1=\ln e^{x-1}$,

$\therefore$ $$3x-2=3(x-1)+1=3\ln e^{x-1}+1,$$

即 $$f(e^{x-1})=3\ln e^{x-1}+1,$$

$\therefore$ $$f(x)=3\ln x+1 \quad (x>0).$$

解法二(变元法) 令 $u=e^{x-1}$，则 $x=\ln u+1$,

$\therefore$ $$f(u)=3(\ln u+1)-2=3\ln u+1 \quad (u>0),$$

$\because$ $$f(x)=3\ln x+1 \quad (x>0).$$

例 4 若 $f(x)=x^2+\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，且 $f(2)=4.627$，求

$f(-2)$的值.

解 $\because$ $f(2)=2^2+\lg(2+\sqrt{5})=4.627$

$$\Longrightarrow \lg(2+\sqrt{5})=0.627,$$

$\therefore$

$$f(-2)=4+\lg(\sqrt{5}-2)=4+\lg\frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

$$=4-\lg(\sqrt{5}+2)=3.373$$

3. 函数性质的讨论

例 5 试证 $f(x)=\lg x/x$ 在$[1,+\infty)$上有界.

证 $\forall x\in[1,+\infty)$,有 $\lg x/x\geqslant 0$,且 $x<10^x$,

$\because$

$$\lg x<x\lg 10\Longrightarrow \lg x/x<1,$$

$\therefore$

$$0\leqslant \lg x/x<1,\quad x\in[1,+\infty),$$

故 $f(x)=\lg x/x$ 在$[1,+\infty)$上有界.

例 6 设 $y=f(x)$和 $x=\varphi(t)$都是增函数,证明复合函数 $y=f(\varphi(t))$也是(t 的)增函数.

证 由题设,当 $t_1<t_2$ 时,

$$\varphi(t_1)\leqslant\varphi(t_2)\Longrightarrow f(\varphi(t_1))\leqslant f(\varphi(t_2)).$$

注 类似地可证得表 1-1 中其它类型复合函数的单调性.

表 1-1

函　数	$f(x)$	$\varphi(t)$	$f(\varphi(t))$
单调性	增	增	增
	增	减	减
	减	增	减
	减	减	增

例 7 证明在关于原点对称的区间上有定义的函数 $f(x)$都能表示成一个奇函数与偶函数之和.

证 $\because$ $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\triangleq f_1+f_2,$

而

$$f_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x),$$

$$f_2(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-f_2(x),$$