北京大学数学丛书

抽样论

许宝騄 著

北京大学出版社

北京大学数学丛书

抽　样　论

许宝騄　著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书所述之抽样论，即所谓大规模调查抽样论，有很大的实用价值。本书篇幅很少，但却包括了各种抽样法的主要理论。叙述简明清晰，定理的证明浅显易懂。具有微积分和初等概率统计知识的读者均可读懂。

全书共分五章，包括：概论、随机抽样法、分层抽样法、二阶抽样法、以及集团抽样法和系统抽样法。

本书可供高等院校数学系高年级学生及研究生选修课的教材，亦可供从事抽样调查的实际工作者及数理统计工作者参考。

抽 样 论

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
新华书店北京发行所发行
国防科委印刷厂印刷
850×1168毫米 32开本 2.625印张 59千字
1982年4月第一版 1982年4月第一次印刷
印数1—32,000册

统一书号：13209·37 定价：0.42元

出 版 说 明

本书所述之抽样论，即所谓大规模调查抽样论，有很大的实用价值。常应用于人口调查，能源调查，社会经济调查，森林、草原、农田估产，昆虫计数等方面。在四个现代化建设中，我们的各项工作都应符合客观规律，不能主观盲目。这首先就要了解客观情况，进行调查研究。调查中如能正确使用抽样调查，将会收到事半功倍、多快好省的效果。

一九六〇年前后，北京大学数学系概率统计专门化的同学，曾从事这方面的实际工作。为此许宝騄教授写了“抽样论讲义”。该讲义的取材主要参考了 W·G·Cochran 著 “*Sampling Techniques*” 一书。许先生的讲义篇幅虽小，但却包括了各种抽样法的主要理论。内容叙述简明清晰，有关定理的证明均浅显易懂。具有微积分和初等概率统计知识的读者即可读懂。

本书前四章介绍了随机抽样、分层抽样、二阶抽样等一些基本的抽样方法，并介绍了相应的估值法的理论依据。这四章是根据许宝騄先生的讲义稍加整理而成。许先生在概论中提到集团抽样与系统抽样，但讲义后面的章节中没有这方面的内容。虽然这两种抽样法从数学理论上可视为二阶抽样的特例，但这两种抽样法简便易行，常为实际工作者采用。为便于实际工作者参考，由孙山泽同志参照前四章的体例，增写了第五章集团抽样法和系统抽样法。这一章的取材也参考了 “*Sampling Techniques*” 一书。

北京大学数学系概率统计教研室

一九八一年三月

说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期三学时研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

目　录

第一章 概　　论

抽样论亦称大规模调查抽样论，常用于人口调查、能源调查、社会经济调查、森林林木估积、草原及农田估产、昆虫数量估计等方面.

抽样调查有极大的实用价值．在正确理论指导下，合理地抽样既可获得可靠的高精度的信息，又可大大节约调查的人力、物力、财力、时间．特别地，当信息有很强的时间性时，旷日持久的全面调查将只能获得陈旧的信息，而毫无价值，因而必须进行抽样调查.

§1.1　问题的基本提法

设 π_N 是由 N 个有明确编号的个体 O_1，O_2，…，O_N 组成之有限总体（O_1，O_2，…，O_N 是抽象的个体，今后不妨以其号码 1，2，…，N 表之）．在 π_N 中每个个体对应一数量指标，依次为 Y_1，Y_2，…，Y_N，其中 N 是已知正整数．用各种抽样办法从 π_N 中抽取 n 个个体，测其数量指标，得 y_1，y_2，…，y_n（y_1，y_2，…，y_n 系 Y_1，Y_2，…，Y_N 的一部分）．据此估计总体 π_N 的下列数字特征①：

(i)　$\bar{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$　（或　$\tilde{Y}=\sum_{i=1}^{N} Y_i$）；

---

① 设想随机变量 Y，其可能值为 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_N\}$，

$$P\{Y=Y_i\}=\frac{1}{N},\quad i=1,2,\cdots,N$$

则 $EY=\bar{Y}$，$\mathrm{Var}(Y)=\sigma^2$，故称 $\bar{Y}$ 为 π_N 的期望，σ^2 为方差.

(ii) $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\bar{Y})^2$ $\left(或\ S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\bar{Y})^2\right)$;

(iii) $C^2=S^2/\bar{Y}^2$ （变异系数）.

并研究估计的误差及最小抽样数目等问题.

例 一块 100 平方公里的地方，是蝗虫的幼虫蝗蝻的出生地，今要调查蝗蝻本年的出生量以便开展治蝗工作，为此将这块地方设想分成 100000000 小块，每小块一平方米. 调查其中的 1000个小块，计算这些小块中蝗蝻数. 得1000个数据 $y_1, y_2, \cdots, y_{1000}$. 这里 $N=100000000$，该地块的蝗蝻总量为 $\bar{Y}=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{100000000}$，抽样数为 $n=1000$，测得的1000个样的指标即为 $y_1, y_2, \cdots, y_{1000}$，要据此估计 $\bar{Y}$.

§1.2 各种抽样法列举

（一）随机抽样法（亦称无限制抽样法）

在 π_N 的 N 个个体中机会均等地抽取第一个样，然后在剩下的$(N-1)$个个体中机会均等地抽取第二个样，……，最后，在所剩 $N-(n-1)$ 个个体中机会均等地抽取第 n 个样（即所谓等概无放回抽样），测每个样的指标. 我们称这种抽样法为随机抽样法. 被抽中之个体称为入样个体. 具体工作，可将 N 个个体与号码 1，2，…，N 建立对应，通过抽取对应的号码来实现.

（二）分层抽样法

将 π_N 先分成 K 组：$\pi_{N_1}, \pi_{N_2}, \cdots, \pi_{N_K}$. 称 π_{N_i} 为第 i 层. 把每一层看作一个小总体，对之抽取一组随机样本. 这 K 组样本合成 π_N 之分层样本.

当 π_N 中某些个体有明显差异时，则应将相近的个体归为一组，如此将 π_N 分成 K 组，采用分层抽样法取样.

（三）二阶抽样法

将 π_N 分成 K 组：$\pi_{N_1}, \pi_{N_2}, \cdots \pi_{N_K}$. 这些组称为 π_N 的第一性抽样单位，将它们看作 K 个个体进行抽样. 然后再对抽得之

组 π_{N_i} 内之个体抽样. π_{N_i} 中的个体称为 π_{N} 的第二性抽样单位.

当 π_N 中个体因数量太大，或其它技术上的原因，无法直接编号时，则可采用二阶抽样法，先按组编号，抽取若干组，再在抽得的组内将个体编号，抽取个体.

（四）多阶抽样法

设想(三)中第二性抽样单位仍不是 π_N 的个体，而是一小组，对它再作第三性抽样．余此类推.

（五）集团抽样法

将 π_N 分成 K 组：π_{N_1}，π_{N_2}，…，π_{N_K}．对这 K 个组进行抽样，对入样的 π_{N_i} 不再对其中的个体进行抽样，而是将其中的个体逐个观测．第 i 组 π_{N_i} 称为第 i 个集团.

（六）系统抽样法（又称机械抽样法）

选一正整数 K，将 π_N 中个体逐个排列如下：

$$
\begin{array}{cccc}
1, & 2, & \cdots, & K, \\
K+1, & K+2, & \cdots, & 2K, \\
2K+1, & 2K+2, & \cdots, & 3K, \\
\cdots\cdots & & &
\end{array}
$$

直至排到 N 为止

对号码 1，2，…，K 作随机抽样（常常只抽一个），若 i 入样，则 $K+i$，$2K+i$，$3K+i$，…皆入样.

以下各章将分别讨论各种抽样法.

第二章　随机抽样法

这一方法是等概地从总体 π_N 中无放回抽取 n 个样. 具体的实现，可将 π_N 的 N 个个体标以号码 1，2，…，N. 然后利用随机数表抽出 n 个不同的数码，或用计算机产生随机数来抽取 n 个不同数码. 用随机数表抽取的方法如下：设 π_N 是 $N=345$，要抽 $n=15$ 个样. 则从随机数表中任取的三列所构成的三位数中，依次取出不同的三位数，当数在 001—345 之间时，则该号码入样，当数在401—745之间时，则该数减去 400 的号码入样，其余的 000，346—400，746—999 不要. 当某号码已入样，而再次碰到该号码入样时，则只算一次. 例如，用下列随机数表取样：

随　机　数　表

65 54 73 88 44	76 68 47 93 11	14 95 72 94 14
95 84 67 58 37	62 18 03 23 61	60 88 44 62 99
05 63 05 42 44	63 44 78 98 09	25 58 00 57 12
36 05 60 21 12	26 61 99 62 44	83 09 78 74 84
53 45 44 36 44	78 74 09 25 58	00 57 12 38 46
05 60 21 13 26	61 99 62 44 76	73 55 63 86 00
58 22 57 86 27	63 43 45 60 74	16 72 73 79 50
79 59 69 50 72	47 26 95 60 88	44 83 09 79 49
69 39 80 45 69	92 93 38 12 57	00 58 16 23 54
56 32 36 22 58	69 50 72 47 26	61 99 87 90 83

77 93 81 16 61	05 97 78 84 43	59 76 16 76 91
29 63 99 16 65	60 82 94 19 25	98 28 24 57 05
61 10 39 10 58	48 81 77 60 31	45 17 09 62 16
34 31 36 56 98	31 26 20 03 27	63 09 56 36 16
35 16 11 17 56	31 58 25 87 90	05 29 87 77 34

则可先利用8，9，10列构成三位数．第一个数为844，舍去．第二个数为837，也舍去．第三个数为244，则244号入样．第四个为112，112号入样．第五个为644，减去400为244，由于244号已入样，故该数也舍去．如此继续，可得326号、227号、72号、169号、258号、261号、265号、58号、298号入样．8，9，10列随机数已取完，但入样号码仍不足15个，此时可转到另三列继续取．如利用18，19，20列，则继续得311号、158号、76号、74号入样．取满15个即停止．

实际工作中，有时从一个装有号码1—N的口袋中，摸出号码来实现抽样．

§2.1 预备定理

定义2.1 设$[Y_1, Y_2, \cdots, Y_N]$为总体之数量指标，经随机抽样测得$y_1, y_2, \cdots, y_n$，则称$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是来自总体$[Y_1, Y_2, \cdots, Y_N]$的随机样本．显然，任一y_i必等于总体中某一Y_{θ_i}．θ_i称为第i个入样号码．

定理2.1 令θ_i为随机抽样的第i个入样号码，$i=1,2\cdots,n$，则对任一组指定的号码$a_1, a_2, \cdots, a_n$（$1\leqslant a_i\leqslant N$，且$a_i\neq a_j$，当$i\neq j$），总有

$$P\{\theta_1=a_1,\theta_2=a_2,\cdots,\theta_n=a_n\}$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{N-n+1}=\frac{(N-n)!}{N!}$$

证明

$$P\{\theta_1=a_1,\ \theta_2=a_2,\ \cdots,\ \theta_n=a_n\}$$
$$=P\{\theta_1=a_1\}\cdot P\{\theta_2=a_2|\theta_1=a_1\}\cdots\cdot P\{\theta_n=a_n|\theta_1=a_1,\cdots,\theta_{n-1}=a_{n-1}\}$$
$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdots\cdot\frac{1}{N-n+1}$$

定理2.2 令 $\theta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为随机抽样的第 i 个入样号码. 对任意 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 及任意指定的号码 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m(1\leqslant k_j\leqslant n,\ j=1,\ \cdots,\ m;\ k_i\neq k_j$, 当 $i\neq j)$ 及 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m(1\leqslant\beta_j\leqslant N,\ j=1,\ \cdots,\ m;\ \beta_i\neq\beta_j$, 当 $i\neq j)$, 总有

$$P\{\theta_{k_1}=\beta_1,\ \theta_{k_2}=\beta_2,\ \cdots,\ \theta_{k_m}=\beta_m\}$$
$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\cdots\cdot\frac{1}{N-m+1}=\frac{(N-m)!}{N!}$$

证明 号码 1, 2, $\cdots$, n 中, 除去 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m$, 还余 $n-m$ 个, 记作 $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_{n-m}$. 于是

$$P\{\theta_{k_1}=\beta_1,\ \cdots,\ \theta_{k_m}=\beta_m\}$$
$$=\sum_G P\{\theta_{k_1}=\beta_1,\ \cdots,\ \theta_{k_m}=\beta_m,\ \theta_{l_1}=\gamma_1,\ \cdots,\ \theta_{l_{n-m}}=\gamma_{n-m}\}$$

这里$\sum\limits_G$表示对 $\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_{n-m}$ 求和, 且 $1\leqslant\gamma_j\leqslant N$, $j=1,\ \cdots,\ n-m$; $\gamma_i\neq\gamma_j$, 当 $i\neq j$; $\gamma_j\neq\beta_1,\ \cdots,\ \beta_m$. 由定理 2.1 知 $\sum\limits_G$ 内每一项皆等于$(N-n)!/N!$, 故

$$P\{\theta_{k_1}=\beta_1,\ \cdots,\ \theta_{k_m}=\beta_m\}$$
$$=\sum_G\frac{(N-n)!}{N!}=\frac{(N-n)!}{N!}P_{N-m}^{n-m}$$
$$=\frac{(N-n)!}{N!}\ \frac{(N-m)!}{[(N-m)-(n-m)]!}$$

$$=\frac{(N-m)!}{N!}$$

其中 P_{N-m}^{n-m} 表示由 $N-m$ 元中取 $n-m$ 元之排列数.

系 令 $m=1, 2, 3, 4$, 得

$$P\{\theta_i=\beta\}=\frac{1}{N} \quad (i=1, \cdots, n;\ \beta=1, \cdots, N)$$

$$P\{\theta_i=\beta_1,\ \theta_j=\beta_2\}=\frac{1}{N(N-1)} \quad (i\neq j;\ \beta_1\neq\beta_2)$$

$$P\{\theta_i=\beta_1,\ \theta_j=\beta_2,\ \theta_k=\beta_3\}=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}$$

(i, j, k 互不相等; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 互不相等)

$$P\{\theta_i=\beta_1,\ \theta_j=\beta_2,\ \theta_k=\beta_3,\ \theta_l=\beta_4\}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)(N-2)(N-3)}$$

(i,j,k,l 互不相等; $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 互不相等)

定理2.3 设 $u_1, \cdots, u_n$ 是来自 $(U_1, \cdots, U_N)$ 的随机样本, 且

$$\bar{U}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_i=0$$

则

(i) $E(\bar{u}^2)=\dfrac{N-n}{nN(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{N}\right)S_U^2$;

(ii) $E(\bar{u}^3)=\dfrac{(N-n)(N-2n)}{n^2N(N-1)(N-2)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$;

(iii) $$E(\bar{u}^4)=\frac{(N-n)[N^2-(6n-1)N+6n^2]}{n^3N(N-1)(N-2)(N-3)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4+\frac{3(n-1)(N-n)(N-n-1)}{n^3N(N-1)(N-2)(N-3)}\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)^2.$$

证明 证(i):

$$\bar{u}^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}u_i^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}u_iu_j$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}U_{\theta_i}^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}U_{\theta_i}U_{\theta_j}$$

故

$$E(\bar{u}^2)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(U_{\theta_i}^2)+\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}E(U_{\theta_i}U_{\theta_j})$$

由定理 2.2 之系，得

$$E(U_{\theta_i}^2)=\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2P\{\theta_i=\beta\}=\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2$$

$$E(U_{\theta_i}U_{\theta_j})=\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta U_\gamma P\{\theta_i=\beta,\ \theta_j=\gamma\}$$

$$=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta U_\gamma,\quad i\neq j$$

又由 $\bar{U}=0$ 得

$$0=(N\bar{U})^2=\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta\right)^2=\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta U_\gamma$$

$$=\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2+\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta U_\gamma$$

故有

$$\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta U_\gamma=-\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2$$

$$E(U_{\theta_i}U_{\theta_j})=\frac{-1}{N(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2$$

从而

$$E(\bar{u}^2)=\frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2-\frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2$$

$$=\frac{N-n}{nN(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2$$

证(ii):

$$\bar{u}^3=\frac{1}{n^3}\sum_{i,j,k}u_iu_ju_k$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}u_i^3+\frac{3}{n^3}\sum_{i\neq j}u_i^2u_j+\frac{1}{n^3}\sum_{i\neq j\neq k}u_iu_ju_k$$

由定理2.2之系及$\bar{U}=0$, 易证

$$E(u_i^3)=\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$$

对于 $i\neq j$

$$E(u_i^2u_j)=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta^2U_\gamma$$

而

$$0=\left(\sum_{\gamma=1}^{N}U_\gamma\right)\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)=\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3+\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta^2U_\gamma$$

所以

$$E(u_i^2u_j)=\frac{-1}{N(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$$

对于 $i\neq j\neq k$

$$E(u_iu_ju_k)=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{\beta\neq\gamma\neq\delta}U_\beta U_\gamma U_\delta$$

而

$$0=\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta\right)^3=\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3+3\sum_{\beta\neq\gamma}U_\beta^2U_\gamma+\sum_{\beta\neq\gamma\neq\delta}U_\beta U_\gamma U_\delta$$

$$=\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3-3\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3+\sum_{\beta\neq\gamma\neq\delta}U_\beta U_\gamma U_\delta$$

$$=-2\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3+\sum_{\beta\neq\gamma\neq\delta}U_\beta U_\gamma U_\delta$$

所以

$$E(u_iu_ju_k)=\frac{2}{N(N-1)(N-2)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$$

从而

$$E(\bar{u}^3)=\frac{1}{n^3}\frac{n}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3-\frac{3}{n^3}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$$

$$+\frac{2}{n^3}\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$$

$$=\frac{(N-n)(N-2n)}{n^2N(N-1)(N-2)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^3$$

证(iii)：

$$\bar{u}^4=\frac{1}{n^4}\sum_{i,j,k,l}u_iu_ju_ku_l$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}u_i^4+\frac{4}{n^4}\sum_{i\neq j}u_i^3u_j+\frac{3}{n^4}\sum_{i\neq j}u_i^2u_j^2$$

$$+\frac{6}{n^4}\sum_{i\neq j\neq k}u_i^2u_ju_k+\frac{1}{n^4}\sum_{i\neq j\neq k\neq l}u_iu_ju_ku_l$$

由定理2.2之系及$\bar{U}=0$，易证

$$E(u_i^4)=\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

对于 $i\neq j$

$$E(u_i^3u_j)=\frac{-1}{N(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

$$E(u_i^2u_j^2)=\frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)^2-\frac{1}{N(N-1)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

对于 $i\neq j\neq k$

$$E(u_i^2u_ju_k)=\frac{2}{N(N-1)(N-2)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

$$-\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)^2$$

对于 $i\neq j\neq k\neq l$

$$E(u_iu_ju_ku_l)=\frac{-6}{N(N-1)(N-2)(N-3)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

$$+\frac{3}{N(N-1)(N-2)(N-3)}\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)^2$$

从而

$$E(\bar{u}^4)=\frac{(N-n)[N^2-(6n-1)N+6n^2]}{n^3N(N-1)(N-2)(N-3)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

$$+\frac{3(n-1)(N-n)(N-n-1)}{n^3N(N-1)(N-2)(N-3)}\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)^2$$

定理2.4 设 $u_1,\cdots,u_n$ 是来自总体 $U_1,\cdots,U_N$ 的随机样本，且 $\bar{U}=0$，则

$$E(\bar{u}^2)=O\left(\frac{1}{n}\right);\qquad E(\bar{u}^4)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

证明 由定理2.3(i)

$$E(\bar{u}^2)=\frac{N-n}{n(N-1)}\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\leqslant\frac{1}{n}\sigma^2=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

此处 $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}(U_\beta-\bar{U})^2=\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2.$

由定理2.3 (iii)

$$E(\bar{u}^4)=\frac{(N-n)[N^2-(6n-1)N+6n^2]}{n^3N(N-1)(N-2)(N-3)}\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^4$$

$$+\frac{3(n-1)(N-n)(N-n-1)}{n^3N(N-1)(N-2)(N-3)}\left(\sum_{\beta=1}^{N}U_\beta^2\right)^2$$