中学数学丛书

中学数学中的定值问题

天津市数学会编

天津科学技术出版社

中学数学丛书

中学数学中的定值问题

陈 明 耀

责任编辑：黄立民

中学数学丛书
中学数学中的定值问题
陈明耀
*
天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道124号
天津新华印刷二厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本 787×1092毫米 1/32 印张 5 字数 102,000
一九八五年八月第一版
一九八五年八月第一次印刷
印数：1—20,800
书号：7212·8 定价：0.87 元

编者的话

《中学数学丛书》是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力，以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级，不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对本套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

一九八二年十月

目　　录

一、从两道高考题谈起

在1979年高考副题中有以下题目：

如图1-1，设圆O_1与圆O_2相交于A、B两点，C为弧$\overset{\frown}{ANB}$上（不包括A、B两点）任意一点，直线CA、CB分别与圆O_1相交于D，E两点，

求证：弦DE为定长．

在1980年高考副题中有以下题目：

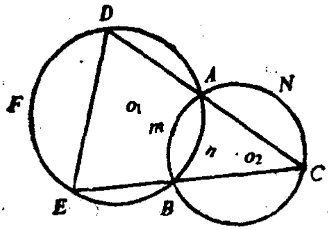

图1-1

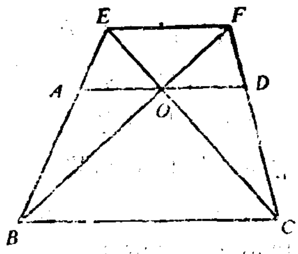

图1-2

如图1-2，$ABCD$是一个梯形，上底AD长为p，下底BC长为q，($q>p$) O为AD的中点，BA与CO的延长线交于E，CD与BO的延长线交于F．

(1) 证明：$EF\parallel BC$；

(2) 求EF的长，并说明当梯形的上、下底长度不变，只改变梯形的高度时，所求的EF的长度是不变的；

(3) 证明：

$$EF>\frac{p^2}{q}$$

其中第(2)小题与1979年的高考副题是同一类问题，这一类题特点是图形的一部分固定而另一部分可以变动，在图形的变动过程中，可以证明某些量（线段或它们的和、差、比、夹角等）往往恒等于某些常量，这样的问题就称为平面几何中的定值问题．

除了上述的问题之外，我们还经常遇到这样的问题．例如证明一个三角函数式或代数函数式为定值，某个图形经过定点，某些线段的和与差为定长，某条直线有定向，某个图形有定面积，诸如此类的问题很多，这些问题都是中学数学中经常遇到的问题，这些也都是定值问题．

一般地说："若在一个数学问题中存在着若干个量，它们之间有某种联系，当其中一个（或几个）量变化时，某一个量（或某些量之间的关系）不依赖这些量的变化而恒为一个常量，这样的问题统称定值问题．"

这类问题在现代数学中发展为不变量问题，在变的过程中找出不变的因素，而这恰恰说明事物的本质部分，因此这个问题正是目前现代数学研究中的基本课题之一．

青年学生对这类问题往往感到困难，原因是这类问题虽然以证明题形式出现，却又不知证明结果是什么，所以不知从何下手．正因为这样，定值问题较一般问题需要多思考一步，解这类问题也有利于巩固我们所学的基础知识，提高思维能力，所以值得我们花力气来探讨、寻找这类问题的解题规律．

练　习　一

1. 解1979年高考副题.

2. 解1980年高考副题的第（2）问.

二、有关平面几何的定值问题

【例 1】 在$\triangle ABC$中，AD为BC边上中线，P为BC边上任意一点，$PQR \mathbin{/\mkern-6mu/} AD$分别交$AB$、$AC$（或它们的延长线）于$Q$、$R$二点，则$PQ+PR$为定值.

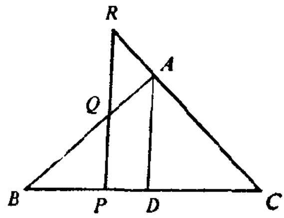

图 2-1

分析：首先要会分清这类问题中哪些元素是变动的，哪些元素是固定不变的，简单说要分清定动.

已知$\triangle ABC$，则这个三角形的三边、三角、三条高线、三条中线、三条角平分线也就固定了，定值就是要定在固定元素上. 而P是动点，PQR是条动直线，PQ、PR是能变动的线段.

然后寻找变动元素与固定元素之间的关系，简言之动中寻定，证明定值问题往往证题前要先求出定值的"值". 一般将动点选在某些特殊位置上，标出定值的"值"，然后推证动点在一般情况下所得结果都等于这个"值".

本题要证$PQ+PR$为定值，我们从图2-1中看到P为BC上任意一点，我们以P点在BC上运动的观点来分析，当P点越靠近D点，则PR线段长度逐渐变小趋向AD，而线段PQ却越变越大，也趋向AD. 当P达到D的位置，则$PQ+PR$正好

等于$2AD$，（当然也可以考虑P趋向B达到同样的结果）有了这个启示，可以把定值问题转化为一般的证明题，即只要证明P在BC上运动时都有$PQ+PR=2AD$即可。

证明：见图2-2延长AD到A'，使$A'D=AD$

连BA'，延长RP交BA'于Q'。

$\because$　$AD=A'D$，$BD=CD$，$\angle 1=\angle 2$

$\therefore$　$\triangle ADC\cong\triangle A'DB$。

则可推出

$BA'=AC$，$\angle 3=\angle 4$，

则　$A'B /\!\!/ AC$。

由已知$PQR /\!\!/ AD$，

$\therefore$　$AA'Q'R$为平行四边形。

则　$RQ'=AA'$，

即　$PR+PQ'=2AD$，

又$\because$　$QQ' /\!\!/ AA'$，

$\therefore$　$\dfrac{QP}{Q'P}=\dfrac{AD}{A'D}=1$，

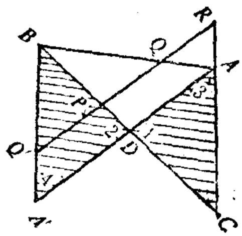

图 2-2

$\therefore$　$QP=Q'P$，

因此　$PR+PQ=2AD$。

即：$PQ+PR$为定值。

【例 2】 有两个同心圆，AB是一个圆的直径，P是另一圆上任一点，

求证：PA^2+PB^2是定值。

分析：本题有两种情况

1）P在小圆上，AB是大圆直径（设大圆的直径为$2R$）。

2）P在大圆上，CD是小圆直径（设小圆的直径为$2r$）。

因为证法类似，现只证1)，请读者模仿证2).

分清定动：此题固定元素是r、R，动元素是P、PA、PB.

动中寻定：如图2-3，可以设想，若P在D的位置上，则

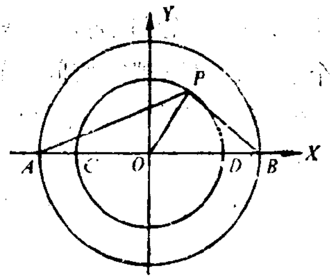

图 2-3

$$PA^2+PB^2=AD^2+DB^2$$
$$=(R+r)^2+(R-r)^2$$
$$=2R^2+2r^2.$$

下面，我们分别用平面几何法，三角法，解析几何法进行证明.

证法一：连OP，OP是$\triangle APB$边AB上的中线，由中线定理可得

$$PA^2+PB^2=2PO^2+2AO^2$$
$$=2r^2+2R^2\ （定值）.$$

证法二：如图2-4，

设 $\angle POA=\angle\alpha$,

由余弦定理

在$\triangle POA$中，

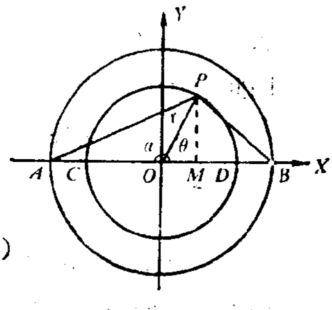

图 2-4

$$PA^2=R^2+r^2-2Rr\cos\alpha,\ （1）$$

在$\triangle PBO$中，

$$PB^2=R^2+r^2-2Rr\cos(180°-\alpha),\ （2）$$

即 $PB^2=R^2+r^2+2Rr\cos\alpha$，(2)′

由 (1)+(2)′ 可得

$$PA^2+PB^2=2R^2+2r^2 \text{（定值）}.$$

证法三：以同心圆的圆心为原点，AB为x轴建立直角坐标系.（见图2-4），则$A(-R, O)$，$B(R, O)$.

设 $PO=r$，$\angle POB=\theta$，则

P点的坐标为 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$，

$$\begin{aligned}PA^2+PB^2&=(r\cos\theta+R)^2+(r\sin\theta)^2+(r\sin\theta)^2\\&\quad+(R-r\cos\theta)^2\\&=2r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2R^2\\&=2r^2+2R^2 \text{（定值）}.\end{aligned}$$

【例3】二定圆相交于AB二点，过A引一任意割线CAD（如图2-5）.

求证：$\angle CBD$为定值.

分析：分清定动：二定圆相交于A、B，∴A、B位置固定，割线CAD是过点A可以变动的直线. $\angle CBD$是以点B为顶点而二边可以变动的角.

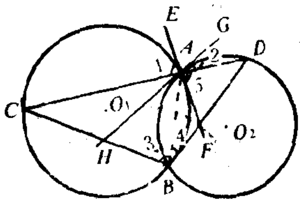

图2-5

动中寻定：我们研究$\angle CBD$能否和一个固定的角相等，我们知道公共弦AB分$\angle CBD$成$\angle 3$、$\angle 4$，若过A分别作圆O_1圆O_2的切线则$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，∵A点固定，过A作两圆的切线位置也是固定的，∴不管割线CAD如何变动，$\angle 1$、$\angle 2$随CAD固定而固定.

证法一：连AB，过A在二圆上各引一切线EF和GH，由弦切角等于类同弧上的圆周角，可得

$\angle 3 = \angle 1$，$\angle 4 = \angle 2$.

∴ $\angle CBD = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

$= \angle 5 + \angle 2 = \angle GAF$.

∵ 不管CAD位置如何，切线EF，GH固定．$\angle GAF$为定角，∴ $\angle CBD$是一个定值．

证法二：如图 2－6 过A作$C'D' \perp AB$分别交圆O_1、圆O_2于C'、D'，

连BC'、BD'则$\angle C'BD'$等于定值．

在$\triangle BC'D'$和$\triangle BCD$中

∵ $\angle C' = \angle C$，$\angle D' = \angle D$，

∴ $\angle C'BD' = \angle CBD$．这就证明了本题的结论．

【例 4】 在定圆的直径AB的延长线上有一定点C，引$CD \perp AC$，从A引一任意直线交CD于E交圆周于F．

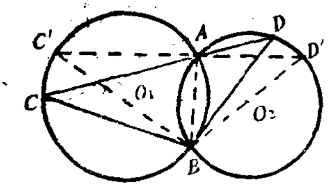

图 2－6

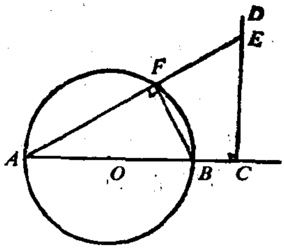

图 2－7

则$AE \times AF$是定值．

分析：如图 2－7，此题中圆O为定圆，C为定点，CD是垂直AB的定直线，AB、AC为固定线段，而直线AFE是动直线，F、E是动点，AE、AF是变化的线段，我们考虑到E点在CD上运动，若$E \to C$，则$AE \longrightarrow AC$，$AF \longrightarrow AB$.

则

$$AE \times AF \longrightarrow AC \times AB \text{（定值）}$$

证明：

连BF，则$\angle AFB = \angle R$.

$\because$ $\angle A$公用，

$\therefore$ $rt\triangle AFB \backsim rt\triangle ACE$.

$\therefore$ $$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}.$$

故 $AE \cdot AF = AB \cdot AC$（定值）.

以上这种考虑定值问题的方法是运动法，或称做特殊点法，它是寻求定值问题最常用的一种方法，它的思路是分清定动，动中寻定，然而由特殊证一般.

除上法外，在寻找定值时还常用计算法，此法应用到代数、三角、解析几何的知识。通常使用三角知识比较多. 寻找变动元素与固定元素的关系，通过计算直接得到所求的定值，同时也使结果得到论证. 如例 5 —例 9 .

【例 5】 圆O与圆O'相交于P、Q两点，过P点引任意两割线AB、CD与圆O交于A、C两点，与圆O'交于B、D两点.

求证：AC、BD两直线的交角为一定值.

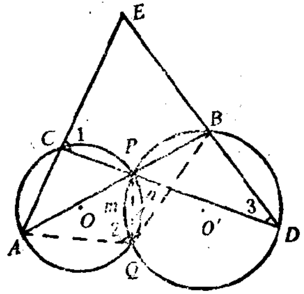

图 2 - 8

分析：如图2-8 圆O与圆O'相交于两点，这两点是定点，定点确定的弧，圆周角均为定值，而CD，AB为动直线，$\angle AEB$是变化的角. 很显然，把$\angle AEB$和有关定弧的圆周角结合起

来，问题很快就能解决.

证明：连AQ, BQ, PQ,

$\because$ P、Q为二定点，

故 $\overset{\frown}{PmQ}$与$\overset{\frown}{PnQ}$都为定弧.

$\therefore$ $\angle PAQ$、$\angle PBQ$都是定角.

即 $\angle AQB$为定值.

又 $\angle 1=\angle 2$,

$\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=\angle AQB$.

在$\triangle ECD$中，

$$\angle CED=180^\circ-(\angle 1+\angle 3)$$
$$=180^\circ-\angle AQB \quad (\text{定值})$$

【例 6】 如图 2-9，O为$\triangle ABC$内任一点，AO、BO、CO的延长线交BC、CA、AB于D、E、F.

求证：$\dfrac{OD}{AD}+\dfrac{OE}{BE}+\dfrac{OF}{CF}$是定值.

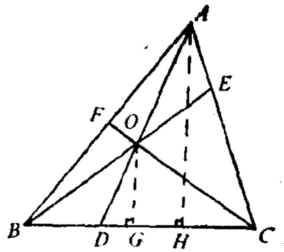

图 2-9

分析：因O为动点，$\therefore OD$、AD、OE，BE、OF、CF均为动线段，但已知三角形的面积不变，有关线段不变，所以可通过面积计算等方法，边计算，边证明.

证明：设$\triangle BOC$的面积为$S_{\triangle BOC}$，其它类同.

作$OG\perp BC$于G,

作$AH\perp BC$于H,

$\because$ $\triangle ODG\backsim\triangle ADH$,

$$\therefore \quad \frac{OG}{AH}=\frac{OD}{AD}.$$

$$\because \quad \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot OG}{\frac{1}{2}BC\cdot AH}=\frac{OG}{AH}$$

$$=\frac{OD}{AD} \qquad (1)$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{OE}{BE}, \qquad (2)$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{OF}{CF} \qquad (3)$$

由(1)+(2)+(3) $\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}$

$$=\frac{S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=1\text{(定值)}.$$

【例7】 由定圆O外一定点P引任意割线PAB(不过圆心),

求证：$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AOP$、$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOP$为定值.

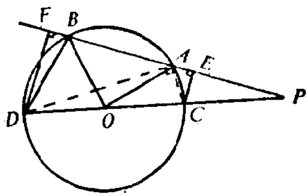

图 2-10

分析：圆O为定圆，P为圆O外一定点，则PC,PD固定，PAB为动射线. 故A、B是动点，$\angle AOP$、$\angle BOP$是可变

的角，要证得结论，必须想办法把$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AOP$，$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOP$和$PC$，$PD$联系起来，也可选定适当的坐标系，把问题转化为一个有条件的代数式或三角式后去解决．

证法一：如图 2-10设直线PO交圆于C和D，连BD、BC、AD、AC，

则$\triangle DBC$和$\triangle DAC$都是直角三角形，

$$\therefore\ \angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOP,\quad \angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOP,$$

$$\because\ \operatorname{tg}\angle BDC=\frac{BC}{BD},\quad \operatorname{tg}\angle ADC=\frac{AC}{AD}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AOP\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOP$$

$$=\operatorname{tg}\angle ADC\cdot\operatorname{tg}\angle BDC$$

$$=\frac{BC\cdot AC}{BD\cdot AD}.$$

过C和D向PB引垂线交PB于E，交PB的延长线于F，则$\triangle BEC\backsim\triangle DAC$，$\triangle DBC\backsim\triangle DFA$．

$$\therefore\ \frac{BC}{DC}=\frac{EC}{AC},\quad \frac{AD}{DC}=\frac{FD}{BD}$$

即 $BC\cdot AC=DC\cdot EC$，　$BD\cdot AD=DC\cdot FD$．

$$\therefore\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOF\ \operatorname{tg}\angle AOP=$$

$$\frac{DC\cdot EC}{DC\cdot FD}=\frac{EC}{FD}$$