# 代数結构

A. A. 阿尔貝脫

科学出版社

51.43
282

# 代 数 結 构

A. A. 阿尔貝脫 著

謝 邦 杰 譯

科 学 出 版 社

1 9 6 3

1963.3.14

A. A. ALBERT
STRUCTURE OF ALGEBRAS
American Mathematical Society
1939

## 內容簡介

本书除基本概念外，主要內容有：理想与冪零代数、Wedderburn 結构定理、单純代数、交叉乘积、循环半域、循环代数与$p$-代数、表示与黎曼矩陣、有理可除代数、代数的对合以及一些特殊結果等. 全书共分十一章，循序漸进地介紹了自本世紀初所发展起来而到四十年代达到高峯的关于結合代数的主要結构理論.

# 代 数 結 构

A. A. 阿尔貝脫 著
謝 邦 杰 譯

*

科 学 出 版 社 出版 (北京朝阳門大街 117 号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963年 2月第 一 版 书号：2674 字数：241,000
1963年 2月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
(京) 0001—3,650 印张：9 3/8

定价： 1.60 元

21:2/23
(3 2 3)

# 序　　言

綫性結合代数的理論，当决定所有有理可除代数的問題求到了解答的时候，也許就达到了它的頂点．自从那时以后，我一直希望或許可以写出一本相当完整的著作，来闡述这个解答以及其所依賴的代数理論，而这理論中就含有我自己的发現的主要部分．要实現这一意图，第一步必然是先写一个課本，所选用的內容要为后来的闡述提供适当的基础．这个課本已經出版，书名为“近世高等代数”．这本书完成不久，美国数学会的学术討論委員会随后就及时地邀請我把在会上所作包含有上面提到的闡述的那些講演写出来．

最可幸的是，在这时候已經有了可能对課題的早期部分給以新的論述，这不但簡化正規单純代数理論中的証明，甚至也簡化 Wedderburn 的結构定理的闡述．在略带古典性的前两章中这一点并不显示出来．此两章所包含的初步討論是关于綫性集合、直积、直和、一个代数的理想以及类似的課題，由于我們在这里所考慮的是涉及一个任意域上的种种代数，而且可能存在着不可离的扩张域，因而有必要作出一些增加和修改．但对于通常的基本定理所作的闡述，卽每个綫性結合代数等价于方陣的第一个代数而反等价于第二个这样的代数，在这里加以扩展，使其終于在 Wedderburn 結构理論的新論述中具有基础性的結果．这項結果固然要在第三章中出現对它的需要时才加以推导，但其証明頗为初等，也可以不加改变地安置在第一章里．

这一基础定理就是 R. Brauer 的关于正規可除代数及其反代数的直接乘积的結构的定理．把这定理和 J. H. M. Wedderburn 的两条定理合并起来，作为推广就得到第三及第四章始終用到的三条工具定理，从而为許多基本結果的証明得出了頗可令人注意

06157

的簡化．尤其在第三章中有关含根理想的代数結构的 Wedderburn 主要定理的証明基础得到了簡化，于是也得出定理本身．

本书的前三章固然的确含有不少新材料，但它們的主要內容显然是以較近代的形式来闡述 Wedderburn 的結构定理，这些定理是由 L. E. Dickson 所著有关本书論題的著作两个版次中首先陈述的．从这两版著作及其作者处，我获益很多，而作者就是我的先生，也是所有我的研究工作的启发者． 本书其余八章的內容主要是由 1926 年 Dickson 所著著作第二版写成以后推导出来的結果組成的． 这些結果主要是 R. Brauer, H. Hasse, E. Noether 和我自己的工作． 这些結果的闡述是从第四章开始的，这一章的內容为一个正規单純代数的单純子代数的交換子（子代数）理論，一个单純代数的自同构的研究，分裂域和指数簡化因子理論．

第五章包含了交叉乘积和它們的特殊情形——循环代数——的理論的基础． 在本章中也推导了方指数的理論，以及随之导出的正規可除代数的分解成质冪次的直因子．

第六章的內容为对循环系的交換羣的最近研究，此項研究在第七章中用于产生循环代数的直积的結构理論，和随之导出的循环域中范数的性质． 这一章以新近发展出来的 $p$-代数理論作为結束．

在第八章中闡述了代数的表示理論． 論述有略为新穎之处，在于一方面晚近的闡述使用了表示定理来求得有关代数的若干結果，但在本章中却用有关代数的諸定理本身来推导有关表示的結果．本章的陈述是从我对 Riemann 矩陣理論所作工作得到启发，并以介紹这个理論的推广（是 H. Weyl 和我自己的工作）作为結束．

在第九章中决定了有理可除代数的結构． 本章所研究的是从对 Hasse 有关 $p$ 进可除代数的理論的詳細闡述开始，然后把結果推广来导出关于有理可除代数的諸定理，而不求助于这类代数的整集合的理想論．我們相信这是第一次以眞正簡单的方式来作到的推广． 所用的方法非常合意，因为从前的論述所用的是一个篇幅巨大的理論的結果，而这些結果現在能够略去了． 当然有必要



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

假設从代数数論所得的某些存在定理而不加以証明．这些預設的定理都明确地指出来了，而且我希望在将来要写的一本有关代数数論和代数算术的著作中能把它們的証明包括进去．

对合单純代数的理論是联系着对 Riemann 矩陣的研究而起的，但現在已成为单純代数的理論的一个分支，其結构定理与那些有关一般单純代数的定理水平大致相同．在第十章中，为一般域上的代数和有理域上的代数两方面均推导出此項理論．所得結果也应用于决定所有广义 Riemann 矩陣的乘法代数的結构；在第十一章中可以看出，这一結果暗示着 Riemann 矩陣的主要問題的一个完全解答．

上面最后提到的一点只是末章中的一个項目，而这一章还包含了对若干特殊結果的闡明．特别是在这一章中对任意域上所有三次和四次正規可除代数的結构給出了新的推导．全书征引的来源，以及与本书論題有关的文献和一个范围广泛的书目都在本章中列出．

我的希望是，本书闡述所取的形式将使它可以用为講述綫性結合代数理論的課本，同样也可以达到把它用作青年代数学家的探源书的明显目的．如果本书在保持闡述完全正确而清楚上有所成就的話，有很多成分是由于 Sam Perlis 博士的工作，他在撰写本书的每一个阶段都用批判的眼光审讀了手稿，他不但有助于使闡述免除錯誤，还常常指出可以改进之处，結果使它更为清楚．对于他我要表示隆重的感謝．

Nathan Jacobson 教授对两条定理的証明作了建議，Morris Bloom 先生帮助編列书目，对他們的善意协助，我深为感謝；Saunders MacLane 教授和 Otto F. G. Schilling 博士听了某些証明的口头講述，提出了批評，应在此致謝．最后我要感謝 G. A. Bliss 教授，如沒有他的鼓励，这些講演的完成会大大推迟的．

A. A. 阿尔貝脫

芝加哥大学

1939 年 3 月 5 日

# 目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第一章 基本概念

**1. 記号.** 如序言中所述，我們的闡述是以作者的"近世高等代数"为基础并将用該书中的記号、定义和定理. 我們亦将用草写字母以及上书中所用的花体字母来表示元素的集合.

在"近世高等代数"中所用的引用記号在这里同样要用. 如定理 7.5 就指第七章的定理 5，方程(4.29)指第四章的方程(29). 对"近世高等代数"中的結果要进行許多引用，这就用下面的記法. 我們提到 AX 章，A4.9 节，定理 A6.5，方程(A5.28)，或者 A196 頁等卽指对我們的基础书的分别引用. 列在本书后面的书目中的文献就用它标题的数碼来进行引用.

**2. $\mathfrak{F}$ 上的綫性集合.** 代数的理論是一个域 $\mathfrak{F}$ 上的某种类型的有限阶綫性集合的一套理論. 在我們的闡明中，这个域 $\mathfrak{F}$ 将占有作为系数域的基础的基本地位，而我們就用符号 $\mathfrak{F}$ 来表明此意，且在整个书中不再重复說明这个事实. 在以后，域 $\mathfrak{F}$ 的特殊类型将要被考虑到，但是一直到我們另有說明之前，$\mathfrak{F}$ 总是任意的.

$\mathfrak{F}$ 上一个 $n$ 阶的綫性集合 $\mathfrak{A}$ 的概念就是 A2.11 节的普通概念. 故特别地，$\mathfrak{F}$ 上每个 $n$ 阶的綫性集合都等价于所有序列 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 的集合，而 $\alpha_i$ 在 $\mathfrak{F}$ 中，且使得

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + (\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\lambda = (\lambda\alpha_1, \cdots, \lambda\alpha_n),$$

其中 $\alpha_i$, $\beta_i$ 和 $\lambda$ 都属于 $\mathfrak{F}$. 我們将用 A2.11 节中所給出的綫性集合的記号和性質，而現在还将得到一些更多的結果.

仅含零的綫性集合 $\mathfrak{L}_0$ 就称为零集合. 我們将記为 $\mathfrak{L}_0 = 0$，而說 $\mathfrak{L}_0$ 有阶数零. 在下面設 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{F}$ 上阶数 $n > 0$ 的任意綫性集合. $\mathfrak{A}$ 的綫性子集合 $\mathfrak{A}_i$ 的和 $(\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_t)$ 定义为所有 $a_1 + \cdots + a_t$

的集合，而 $a_i$ 在 $\mathfrak{A}_i$ 中。 不难验証它是 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{F}$ 上的一个綫性子集合. 綫性集合的加法是一个結合的且是交换的运算.

$\mathfrak{A}$ 的两个綫性子集合的交集 $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ 是 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$ 的所有公共元素的集合. 它显然是 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{F}$ 上的一个綫性子集合. 再者，我們即将証明：$(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ 的阶数是 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 的阶数的和减去 $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ 的阶数.

$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_t)$ 的元素表为 $a = a_1 + \cdots + a_t (a_i \in \mathfrak{A}_i)$ 的形式是唯一的，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 的阶数是諸 $\mathfrak{A}_i$ 的阶数的和. 这个性质是眞的，当且仅当由 $a = 0$ 可推出每个 $a_i = 0$. 在这样的情形下，我們便說諸 $\mathfrak{A}_i$ 在它們的和 $\mathfrak{A}$ 中是互补的，而 $\mathfrak{A}$ 为諸 $\mathfrak{A}_i$ 的补充和，并記为

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_t. \tag{1}$$

我們对綫性集合的和，将不用符号＋，除非当它是一个补充和时. 注意(1)成立，当且仅当 $[\mathfrak{B}_i, \mathfrak{A}_{i+1}] = 0\ (i = 1, \cdots, t)$，此处 $\mathfrak{B}_i = (\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_i)$.

A2.11 节的习題考慮到 $\mathfrak{F}$ 上的一个綫性集合 $\mathfrak{A} = (u_1, \cdots, u_n)$ 与它的一个眞綫性子集合 $\mathfrak{B} = (v_1, \cdots, v_m)$ 而作出結論：在 $\mathfrak{F}$ 上 $\mathfrak{A} = (v_1, \cdots, v_n)$，此处 $v_{m+1}, \cdots, v_n$ 是在 $\mathfrak{A}$ 中. 这个結果虽其証明簡单却很重要，我們把它叙述如下：設 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{F}$ 上的一个綫性子集合. 則 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$，此处 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个綫性子集合，叫做 $\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中的一个补量. 注意 $\mathfrak{C}$ 不是唯一的，而特别地，$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}'$，此处

$$\mathfrak{C}' = (v'_{m+1}, \cdots, v'_n), \quad v'_i = v_i + b_i, \tag{2}$$

对 $\mathfrak{B}$ 中任何 $b_i$ 均然.

要証 $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ 的阶数是 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 的阶数的和减去它們的交集 $\mathfrak{D}$ 的阶数，如上我們先有 $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{C}_0$[1]. 于是 $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0)$. $\mathfrak{C}_0$ 的非零元素不得在 $\mathfrak{D}$ 中，因而不得在 $\mathfrak{B}$ 中. 这就推出 $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0) =$

---

1) 原文书在此的符号是 $\mathfrak{C}'$，这易与上面的 $\mathfrak{C}'$ 相混而誤解，故换为 $\mathfrak{C}_0$. 此外，$\mathfrak{C}_0$ 中的非零元素才不得在 $\mathfrak{D}$ 中，但原文书中并无“非零”二字，可能是作者一点疏忽处——譯者注.

$=\mathfrak{B}+\mathfrak{C}_0$,而我們所要的結果就是此事实的一个直接推論了.

$\mathfrak{A}$ 的元素 $b_1, \cdots, b_r$ 的一个集合說是产生 $\mathfrak{A}$ 的綫性子集合 $\mathfrak{B}$, 如果 $\mathfrak{B}$ 是由所有的 $\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_r b_r$ $(\lambda_i \in \mathfrak{F})$ 組成的. 于是 $\mathfrak{B}$ 的阶数为一整数 $m \leqslant r$, 而且实际上这些 $b_i$ 可以重排过使得在 $\mathfrak{F}$ 上 $\mathfrak{B}=(b_1, \cdots, b_m)$. 另外,設在 $\mathfrak{F}$ 上 $\mathfrak{A}=(u_1, \cdots, u_n)$ 从而

$$b_i=\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} u_j \quad (i=1, \cdots, r), \tag{3}$$

諸 $\lambda_{ij}$ 在 $\mathfrak{F}$ 中为唯一的. 于是 $m$ 就是綫性无关的 $b_i$ 的个数. 由 A67 頁,习題 5 知 $m$ 是矩陣 $L=(\lambda_{ij})$ 的秩. 同样,若 $r=n$,則 $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$,当且仅当 $m=n$,即方陣 $L$ 是滿秩的.

上面是我們最后的初步研究, 而現在我們就将开始对代数本身的討論.

**3. $\mathfrak{F}$ 上的代数.** $\mathfrak{F}$ 上 $n$ 阶代数的理論曾在 AX 章中从矩陣論的观点来討論过. 虽然得出的某些性質能被認为是重要的而且在后面还要用到, 但是我們并不把現在的論述放在这些討論的基础上而宁愿傾向于更抽象的討論[1].

$\mathfrak{F}$ 上有限阶的代数可定义为环, 而它又为 $\mathfrak{F}$ 上有限阶綫性集合[2]. 从 AII 章的綫性集合的定义来看,一个等价的但更公設化的定义可給出如下. 我們先用 AI, AII 章的公設来定义环和域, 然后作出下面的

**定义.** 設 $\mathfrak{F}$ 是一个域其单位元素为 1, $\mathfrak{A}$ 是一个环, 再設对 $\mathfrak{F}$ 的每个 $\alpha$ 及 $\mathfrak{A}$ 的 $a$ (純量乘积) $\alpha a=a\alpha$ 是在 $\mathfrak{A}$ 中. 于是我們說 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{F}$ 上一个 $n$ 阶代数, 如果对 $\mathfrak{F}$ 的每个 $\alpha$ 与 $\beta$, $\mathfrak{A}$ 的 $a$ 与 $b$ 我們有

I. $1a=a, \quad \alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a, \quad (\alpha a)(\beta b)=(\alpha\beta)(ab)$;

II. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a; \quad \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$;

---

1) 然而,如果現在的論述是被用来作为一教材,則 A10. 1—5 节的材料就应認为是重要的入門材料.

2) 这句話确切地說应当是: "$\mathfrak{F}$ 上有限阶代数可定义为 $\mathfrak{F}$ 上的有限阶綫性集合而为环且其乘法与純量乘法具有性質 $(\alpha a)(\beta b)=(\alpha\beta)(ab)$." 所以,严格說来,作者原来的这句話是有問題的——譯者注.

III. 在 $\mathfrak{A}$ 中有元素 $u_1, \cdots, u_n$ 存在使 $\mathfrak{A}$ 的每个元素 $a$ 能唯一表成此形式

$$a = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \tag{4}$$

其中 $\alpha_i$ 属于 $\mathfrak{F}$.

当按下面之約定而不引起混淆时，我們把 $\mathfrak{F}$ 上的 $n$ 阶代数 $\mathfrak{A}$ 簡称为代数. 同理，我們說 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ 是等价的，当我們意謂 $\mathfrak{F}$ 上 $n$ 阶的 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{F}$ 上 $n$ 阶的 $\mathfrak{A}'$ 按 A44 頁的定义是在 $\mathfrak{F}$ 上等价时.

两个代数 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ 簡称为互反代数，如果它們适合下面定义中的条件.

**定义.** 設 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ 是 $\mathfrak{F}$ 上 $n$ 阶代数，且設在它們中間有一个(1-1)对应 $a \longleftrightarrow a'$，使得对 $\mathfrak{A}$ 的每个 $a$ 与 $b$ 及 $\mathfrak{F}$ 的 $\lambda$ 有

$$(a+b)' = a' + b', \quad (\lambda a)' = \lambda a', \quad (ab)' = b'a',$$

則說 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ 在 $\mathfrak{F}$ 上是互反的.

我們通过把 $\mathfrak{A}'$ 写成 $\mathfrak{A}^{-1}$ 来表明 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ 是互反的这点特性. 这个記号在以后各章中常要用到. 注意在等价意义下 $\mathfrak{A}^{-1}$ 是由 $\mathfrak{A}$ 所唯一决定的.

$\mathfrak{F}$ 上一个代数 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{F}$ 上一个有限阶綫性集合，这个事实将要反复用到. $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{F}$ 上的一个子代数 $\mathfrak{B}$ 就是任一綫性子集合而它对定义 $\mathfrak{A}$ 的运算来說是一个代数. 故 $\mathfrak{A}$ 的一个綫性子集合 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个子代数，当且仅当 $\mathfrak{B}$ 的任二元素的积仍在 $\mathfrak{B}$ 中. 再者 $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ 当且仅当 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{A}$ 有同样的阶数.

**4. 代数的綫性子集合的乘积.** 設在 $\mathfrak{F}$ 上 $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_m)$ 与 $\mathfrak{C} = (v_1, \cdots, v_t)$ 都是代数 $\mathfrak{A}$ 的綫性子集合. 我們定义乘积 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{F}$ 上由这 $mt$ 个元素 $u_i v_j$ 所产生的 $\mathfrak{A}$ 的綫性子集合. $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 的阶数最多是 $mt$，且集合 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 为所有的有限和 $b_1c_1 + \cdots + b_rc_r$ $(b_i \in \mathfrak{B}, c_i \in \mathfrak{C})$ 所組成. 故这个乘积是与它的定义中所用的特别基底无关.

綫性集合的乘法运算是結合的但未必是可換的. 我們还有分配律

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{D} = (\mathfrak{B}\mathfrak{D}, \mathfrak{C}\mathfrak{D}), \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{D}\mathfrak{B}, \mathfrak{D}\mathfrak{C}), \tag{5}$$

此即乘法与加法的普通分配律. 讀者应驗証这点以及对乘法与形成 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 的交集 $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ 的运算的定律[1]:

$$[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\mathfrak{D} \leqslant [\mathfrak{B}\mathfrak{D}, \mathfrak{C}\mathfrak{D}], \quad \mathfrak{D}[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] \leqslant [\mathfrak{D}\mathfrak{B}, \mathfrak{D}\mathfrak{C}]. \tag{6}$$

若 $g$ 在 $\mathfrak{A}$ 中且 $\mathfrak{G} = (g)$ 是 $\mathfrak{F}$ 上由 $g$ 所产生的綫性子集合,則 $\mathfrak{G}$ 为所有元素 $\alpha g(\alpha \in \mathfrak{F})$ 所組成. 这推出 $\mathfrak{B}\mathfrak{G}$ 为所有 $bg(b \in \mathfrak{B})$ 所組成,从而我們定义

$$\mathfrak{B}g = \mathfrak{B}\mathfrak{G}, \quad g\mathfrak{B} = \mathfrak{G}\mathfrak{B}.$$

注意上面 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 的阶数是 $mt$,当且仅当 $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}v_1 + \cdots + \mathfrak{B}v_t$ 而 $\mathfrak{B}v_i$ 有阶数 $m$. 关于后一性质的一个准則将是很需要的而且可由以下定理給出:

**定理 1.** $\mathfrak{B}g(g\mathfrak{B})$ 的阶数即如 $\mathfrak{B}$ 的阶数, 当且仅当对 $\mathfrak{B}$ 的每个 $b \neq 0$ 有 $bg \neq 0$ ($gb \neq 0$).

因若命 $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_m)$,則 $\mathfrak{B}g$ 是由 $u_1 g, \cdots, u_m g$ 所产生. $\mathfrak{B}g$ 的阶数是 $m$,当且仅当这 $m$ 个元素在 $\mathfrak{F}$ 上是綫性无关的,即是 $\sum \alpha_i(u_i g) = (\sum \alpha_i u_i)g = bg = 0$ $(\alpha_i \in \mathfrak{F})$, 当且仅当諸 $\alpha_i = 0$. 但 $b = \sum \alpha_i u_i$ 是 $\mathfrak{B}$ 的零元素,当且仅当諸 $\alpha_i$ 全为零,因而定理即已証明.

**系.** 若 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C} = (v_1, \cdots, v_t)$ 分别是 $\mathfrak{F}$ 上 $m$ 阶与 $t$ 阶的綫性集合,則 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 的阶数是 $mt$, 当且仅当 $b_i$ 在 $\mathfrak{B}$ 中且不全为零时就有 $b_1 v_1 + \cdots + b_t v_t \neq 0$.

証明可从以上定理及其前之説明立即得出.

$\mathfrak{A}$ 的一个綫性子集合 $\mathfrak{B} \neq 0$ 对自己的乘积 $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ 早就定义了. 我們記 $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{\cdot 2}$ 而称它为 $\mathfrak{B}$ 的平方. 按归納法定义冪 $\mathfrak{B}^{\cdot k} = \mathfrak{B}\mathfrak{B}^{\cdot k-1}$. 用这个普通的冪比用即将定义的(直)冪常常少得多,所以我們要为另外这个冪保留此簡单的記号 $\mathfrak{B}^k$. 注意到 $\mathfrak{B}^{\cdot 2} \leqslant \mathfrak{B}$,当且仅当 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个子代数.

---

1) 此定律式中的左右两边的关系是"$\leqslant$"而不是"$=$". 这可由下例明之. 取 $\mathfrak{F}$ 上的一个 $m > 1$ 次全陣代数 $\mathfrak{A} = (e_{ij};\ i, j = 1, \cdots, m)$. 再取諸綫性子集合: $\mathfrak{B} = (e_{11}, \cdots, e_{m1})$, $\mathfrak{C} = (e_{11} + e_{12}, \cdots, e_{m1} + e_{m2})$, $\mathfrak{D} = (e_{11}, \cdots, e_{1m})$. 于是 $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\mathfrak{D} = \{0\} < [\mathfrak{B}\mathfrak{D}, \mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \mathfrak{A}$——譯者注.

如果 $\mathfrak{A}$ 是一个代数我們可作此冪叙列

$$\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{A}^{\cdot 2} \geqslant \cdots \geqslant \mathfrak{A}^{\cdot k} \geqslant \cdots. \tag{7}$$

这个叙列为 $\mathfrak{A}$ 的子代数(也可能有零集合在內)所組成，由于 $\mathfrak{A}$ 的阶数有限，故在叙列中必有某处为 $\mathfrak{A}^{\cdot k} = \mathfrak{A}^{\cdot k+1}$，从而对每个 $s \geqslant k$ 便有 $\mathfrak{A}^{\cdot k} = \mathfrak{A}^{\cdot s}$，所以或者 $\mathfrak{A}^{\cdot 2} = \mathfrak{A}$ 而我們就定义 $\alpha = 1$；或者有一个(唯一的)整数 $\alpha > 1$ 使 $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^{\cdot 2} > \cdots > \mathfrak{A}^{\cdot \alpha} = \mathfrak{A}^{\cdot s}$ 对每个 $s > \alpha$. 不管哪种情形我們都称 $\alpha$ 为 $\mathfrak{A}$ 的指数.

显然若 $\mathfrak{A}$ 有单位元素，則 $\mathfrak{A}^{\cdot 2} = \mathfrak{A}$. 我們的大多数的討論都是那些有单位元素的代数 $\mathfrak{A}$，因而这点应該估計到，即在前面少数几章以后，普通冪和指数的概念就比較次要了. 当我們研究正規单純代数时，虽然我們对另外的概念将用指数二字，但并无混乱，因为这些代数都有单位元素.

**5. 直积.** 設 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的子代数使得 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 的阶数是 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 的阶数的乘积. 再假定对 $\mathfrak{B}$ 的每个 $b$ 与 $\mathfrak{C}$ 的每个 $c$ 有 $bc = cb$，則我們称 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ 为 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 的直积，而对这个代数引进此記号

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}. \tag{8}$$

当 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{F}$ 上的域时，这就和 A7.4 节的概念一致了.

上之定义对我們的目的还不够充分概括. 然而要注意到，当我們将給出一个更概括的定义时，我們将常常打算作出 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ 而使上之定义为有效的. 让我們来进行如此的一段簡明陈述.

假定 $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ 在 $\mathfrak{F}$ 上，$\mathfrak{C} = (v_1, \cdots, v_m)$ 在 $\mathfrak{F}$ 上是任意的代数，不一定有单位元素，而且不一定不相同. 設 $u_i u_r = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha^{(ir)} u_\alpha$, $v_j v_s = \sum_{\beta=1}^{m} \delta_\beta^{(js)} v_\beta$ 分别是 $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 的乘法表. 于是我們定义此直积 $\mathfrak{A} = (w_{11}, \cdots, w_{ij}, \cdots, w_{nm})$ 为 $\mathfrak{F}$ 上代数，其乘法表为

$$w_{ij} w_{rs} = \sum_{\alpha=1,\cdots,n}^{\beta=1,\cdots,m} \gamma_\alpha^{(ir)} \delta_\beta^{(js)} w_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

如果我們把 $w_{\alpha\beta}$ 想成为符号的乘积 $u_\alpha v_\beta$，則可看出 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ 为所有有限項的和所組成，每項为 $\mathfrak{B}$ 的一元素与 $\mathfrak{C}$ 的一元素的符号的乘



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com