待定系数法

余元庆编著

上海教育出版社

待 定 系 数 法

余元庆编著

上海教育出版社

待 定 系 数 法

余元庆编著

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　江苏宜兴印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2.75　字数 62,000

1963年6月第1版　1979年3月第8次印刷

印数 190,001—410,000 本

统一书号：7150·1406　定价：0.24元

編者的話

待定系数法是数学中的一种重要方法．在数学中，有許多問題的解决，都要借助于这种方法．例如，代数里关于“綜合除法”法則的推导，就要用到待定系数法．

这本书里，对待定系数法和它的应用，作了比較詳細的闡述．在第一章里，首先举例說明什么是待定系数法，然后对待定系数法的理論根据，作了詳細的闡述，最后还列举了待定系数法在解各类問題中的应用．在这基础上，本书的第二章和第三章里，还分别介紹了“对称函数”和“部分分式”的知識．学习这些知識，都要联系到待定系数法．

这本书里的內容都是代数里的有用知識，掌握这些內容，对于提高解題能力很有帮助，对于进一步学习高等数学也很有利．

这本书力求写得浅显易懂，讀者只要具备了二次方程等数学知識，就能够閱讀．但是对于一些重要的理論知識，以及各种有用的解題方法，也尽可能作詳細的叙述，不使遺漏，以便不同程度的讀者，讀了这本书以后，在数学理論知識和解題能力方面，都能够有所提高．

学好数学，多做练习是一个重要关鍵．本书里举了較多的例題，并且編选了一定数量的练习題，企图通过这些例題和习題来說明一些思考問題的方法，使讀者对于解題方法，不仅能够知其然，而且能够知其所以然．为了便于讀者自己检驗，书里的一些练习題都附有答案，較难的題目，还附有提示．讀者演題时，最好先自己思索，把題解出后再看答案和提示，这样就比較容易提高解題能力．

余元庆　1963年2月于北京

目　　录

一 待定系数法

待定系数法是数学中的一种重要方法．利用待定系数法可以解許多問題．在这一章里，将要説明待定系数法的意义和原理，以及它在代数里的各种应用．

§1．什么叫做待定系数法

我們先来看一个簡单的問題．

問題：a、b、c 是什么数时，多項式 x^3+ax^2+bx+c 和 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 恒等？

我們用符号"≡"(讀做恒等于)来表示恒等①．这个問題就是：

已知：$x^3+ax^2+bx+c\equiv(x-1)(x-2)(x-3)$． (1)

求：系数 a、b、c．

因为 $x^3+ax^2+bx+c\equiv(x-1)(x-2)(x-3)$ 是决定系数 a、b、c 的值的根据，所以解这个問題，应該先想一想恒等式的定义．

(1) 是恒等式，就是說，不論用任何数值代替 (1) 中的 x，(1)的左右两边的值总相等．因此，每用一个数值代替(1)中的 x，就得到一个含有未知数 a、b 和 c 的方程．因为(1)中含有 a、b、c 三个未知的系数，所以我們只要用三个不同的数值代替(1)

① $A\equiv B$ 也可以写成 $A=B$，例如，$(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2$ 也可以写成 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$．本书中遇到需要着重說明是恒等式的地方都用"≡"号，以提起讀者注意．

中的 x，就可以求出 a、b、c 的值．根据这样的想法，我們就得出了下面的解法：

分別用 0、1、-1 代替(1)中的 x，得

$$\begin{cases} c=-6, \\ 1+a+b+c=0, \\ -1+a-b+c=-24. \end{cases}$$

解这个方程組，得 $a=-6$, $b=11$, $c=-6$.

要检驗 $a=-6$, $b=11$, $c=-6$ 是不是問題的解，可以把 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 展开．由乘法，得

$$(x-1)(x-2)(x-3)\equiv x^3-6x^2+11x-6.$$

$x^3-6x^2+11x-6$ 和 $x^3-6x^2+11x-6$ 当然恒等．

这个問題还可以根据下面的定理来解．

定理　如果

$$\boldsymbol{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}$$
$$\boldsymbol{\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n,}$$

那末

$$\boldsymbol{a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots\cdots,\ a_n=b_n.}$$

这个定理的証明在 § 2 里再讲．

根据这个定理的解法是：

$$x^3+ax^2+bx+c\equiv(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$\equiv x^3-6x^2+11x-6.$$

比較对应項的系数，得 $a=-6$, $b=11$, $c=-6$.

现在我們再来看几个例子．

例 1　m、n 是什么数时，多項式 $x^4-5x^3+11x^2+mx+n$ 能够被 x^2-2x+1 整除？

在这个問題里，除了系数 m、n 是未知数，商式是什么也是不知道的．因此，先要假定商式，然后根据能整除的除法中被

除式恒等于商式乘以除式的关系来确定 m 和 n 的值. 因为 $x^4 \div x^2 = x^2$, $n \div 1 = n$, 所以我們可以假定商式是 $x^2 + lx + n$, 式中的 l 和 n 都是待定的系数.

解 設商式是 $x^2 + lx + n$, 那末

$$\begin{aligned} & x^4 - 5x^3 + 11x^2 + mx + n \\ \equiv & (x^2 + lx + n)(x^2 - 2x + 1) \\ \equiv & x^4 + (l-2)x^3 + (n - 2l + 1)x^2 + (-2n + l)x + n. \end{aligned}$$

比較对应項的系数, 得

$$\begin{cases} l - 2 = -5, \\ n - 2l + 1 = 11, \\ -2n + l = m. \end{cases}$$

解这个方程組, 得 $l = -3$, $n = 4$, $m = -11$.

答: $m = -11$, $n = 4$.

例 2 已知多項式 $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ 是一个完全平方式, 求它的平方根.

因为所給多項式是四次多項式, 所以它是一个二次三項式的平方. 又因 $x^4 = (x^2)^2$, 所以我們可以假定所給的多項式恒等于 $(x^2 + px + q)^2$, 式中 p 和 q 是待定的系数.

解 設 $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$

$$\begin{aligned} & \equiv (x^2 + px + q)^2 \\ & \equiv x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2. \end{aligned}$$

比較对应項的系数, 得

$$\begin{cases} 2p = -6, & (1) \\ p^2 + 2q = 13, & (2) \\ 2pq = -12 & (3) \\ q^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

从(1)得 $p = -3$, 代入(2)得 $q = 2$. 把 $p = -3$, $q = 2$ 代入

(3)和(4)都能适合．所以

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4\equiv(x^2-3x+2)^2.$$

因此，所求的平方根是$\pm(x^2-3x+2)$．

注 这里由方程(1)、(2)、(3)、(4)所組成的方程組是关于p、q的二元二次方程組．方程組里未知数只有2个，但是方程却有4个．从(1)、(2)所組成的方程組里，解出p和q以后，必須代入方程組的其它两个方程里去检驗是否适合．只有当所求出的p、q的值能满足这两个方程时，才能认为是原方程組的解．

例3 求証多項式 ax^3+bx^2+cx+d 是完全立方的必要和充分条件是 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$．

应該分两步来証．先証明这个条件是必要的，这就是說，先要証明如果多項式ax^3+bx^2+cx+d是完全立方，那末$b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$．再証明这个条件是充分的，这就是說，第二步还要証明如果 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$，那末多項式ax^3+bx^2+cx+d是完全立方．

要証明条件是必要的，可以先假定所給的多項式恒等于$(lx+m)^3$，式中l和m是待定的系数，然后根据恒等式的性质，推导出 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$．

要証明条件是充分的，只要根据 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$把所給的多項式化成某一个一次式的立方就可以了．

証明 設

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d&\equiv(lx+m)^3\\&\equiv l^3x^3+3l^2mx^2+3lm^2x+m^3.\end{aligned}$$

比較对应項的系数，得

$$\begin{cases}a=l^3, & (1)\\ b=3l^2m, & (2)\\ c=3lm^2, & (3)\\ d=m^3. & (4)\end{cases}$$

从(1)和(4)，得$l=\sqrt[3]{a}$，$m=\sqrt[3]{d}$，代入(2)和(4)，得

$$b=3\sqrt[3]{a^2d},\quad c=3\sqrt[3]{ad^2}.$$

反过来，如果 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$，那末

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv ax^3+3\sqrt[3]{a^2d}\,x^2+3\sqrt[3]{ad^2}\,x+d$$

$$\equiv(\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{d})^3.$$

因此，多项式ax^3+bx^2+cx+d是完全立方的必要和充分条件是 $b=3\sqrt[3]{a^2d}$，$c=3\sqrt[3]{ad^2}$.

注 这里在証明条件的必要性这一步时，我們从待定的系数 l 和 m 必須滿足(1)、(2)、(3)、(4)这 4 个方程出发，由此找出了已知系数 a、b、c、d 之間所存在的关系，事实上这就是要从这 4 个方程所組成的方程組中消去未知数 l 和 m. 这种方法通常也把它叫做**消去法**.

象上面所举的这些例題中的解題方法，叫做**待定系数法**（或者**未定系数法**）. 这个方法的特点是先假定一个恒等式，其中含有待定的系数，然后根据恒等式的性质列出几个方程，解这个方程組，求出各待定系数的值，或者从方程組中消去这些待定系数，找出原来那些已知系数間所存在的关系，从而把問題解出.

在詳細地研究这种方法以前，讀者可以先仿照着例題中的解法做一些练习.

练　习

1. 已知 $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ 能被 x^3+3x^2+9x+3 整除，求 p、q、r 的值. 〔答：$p=2$，$q=3$，$r=3$.〕

2. 已知多项式 $x^6+6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27$ 是一个完全立方式，求它的立方根. 〔答：x^2+2x-3.〕

3. 求 $ax^{2m}+bx^my^n+cy^{2n}$ 能被 px^m+qy^n 整除的条件.

〔答：$aq^2-bpq+cp^2=0$.〕

〔**提示** 設商是$\frac{a}{p}x^m+\frac{c}{q}y^n$. 先用待定系数法求出必要的条件，再証明这个条件也是充分的.〕

4. 已知多项式 ax^3+bx^2+cx+d 能被 x^2+p 整除，求証 $ad=bc$.

5. 用待定系数法証明二次三項式 ax^2+bx+c 是完全平方的条件是 $b^2-4ac=0$.

§2. 待定系数法的根据

在§1里已經讲过，待定系数法的根据是

定理 如果

$$\begin{aligned}&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\\ \equiv\ &b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n,\end{aligned}$$

那末

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\cdots\cdots,\ a_n=b_n.$$

现在来証明这个定理.

要証明这个定理，需要先証明几个預备定理. 这几个預备定理都是多項式的重要性质.

为了說明簡单起见，我們用符号 $f(x)$ 表示多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$，并且用符号 $f(\alpha)$ 表示 $x=\alpha$ 时 $f(x)$ 的值. 例如，設 $f(x)\equiv5x^3-3x^2+x-4$，那末 $f(2)=5\cdot2^3-3\cdot2^2+2-4=26$.

定理一 如果多項式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

在 $x=\alpha$ 时的值是零，那末一定可以得到另一个多項式

$$g(x)\equiv a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1},$$

使

$$f(x)\equiv(x-\alpha)g(x).$$

証明 因为 $f(\alpha)=0$，所以

$$f(x)\equiv f(x)-f(\alpha)\equiv a_0(x^n-\alpha^n)+a_1(x^{n-1}-\alpha^{n-1})$$
$$+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-\alpha).$$

根据公式 $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots\cdots+b^{m-1})$①
可得

$$f(x)\equiv(x-\alpha)[a_0(x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha^{n-1})$$
$$+a_1(x^{n-2}+\alpha x^{n-3}+\cdots\cdots+\alpha^{n-2})+\cdots\cdots+a_{n-1}].$$

用 $g(x)$ 表示方括号內的多項式，就得

$$f(x)\equiv(x-\alpha)g(x).$$

这个定理叫做**因式定理**，以后我們經常要用到它.

定理二 如果多項式

$$\boldsymbol{f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}$$

在 $\boldsymbol{x=\alpha_1}$、$\boldsymbol{\alpha_2}$、……、$\boldsymbol{\alpha_k}$（$\boldsymbol{k\leq n}$，$\boldsymbol{\alpha_1}$、$\boldsymbol{\alpha_2}$、……、$\boldsymbol{\alpha_k}$ 两两不等）时的值都是零，那末一定可以得到另一个多項式

$$\boldsymbol{\phi(x)\equiv a_0x^{n-k}+p_1x^{n-k-1}+\cdots\cdots+p_{n-k},}$$

使

$$\boldsymbol{f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_k)\phi(x).}$$

証明 因为 $f(\alpha_1)=0$，所以，根据定理一可得

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)\phi_1(x), \tag{1}$$

式中

$$\phi_1(x)\equiv a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}.$$

用 α_2 代替(1)中的 x，得

$$f(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)\phi_1(\alpha_2).$$

因为 $f(\alpha_2)=0$，$\alpha_2-\alpha_1\neq0$，所以 $\phi_1(\alpha_2)=0$. 因此，根据定理一可得

$$\phi_1(x)\equiv(x-\alpha_2)\phi_2(x),$$

① 这个公式用乘法就可以証明.

式中

$$\phi_2(x)\equiv a_0x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\cdots\cdots+c_{n-2}.$$

由此可知

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\phi_2(x).$$

继續推下去，就得

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_k)\phi(x),$$

式中

$$\phi(x)\equiv a_0x^{n-k}+p_1x^{n-k-1}+\cdots\cdots+p_{n-k}.$$

定理三　如果使多项式

$$\boldsymbol{f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}$$

的值是零的 $\boldsymbol{x}$ 的值多于 $\boldsymbol{n}$ 个，那末

$$\boldsymbol{a_0=a_1=\cdots\cdots=a_n=0.}$$

証明　設 α_1、α_2、……、α_{n+1} 是两两不等的数，并且 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots\cdots=f(\alpha_{n+1})=0$.

因为 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots\cdots=f(\alpha_n)=0$，所以，根据定理二可得

$$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n).\tag{1}$$

用 α_{n+1} 代替(1)中的 x，得

$$f(\alpha_{n+1})=a_0(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n).$$

因为 $f(\alpha_{n+1})=0$，$\alpha_{n+1}-\alpha_1\neq0$，$\alpha_{n+1}-\alpha_2\neq0$，……，$\alpha_{n+1}-\alpha_n\neq0$，所以 $a_0=0$.

因此，

$$f(x)\equiv a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n.$$

因为 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots\cdots=f(\alpha_{n-1})=0$，所以，根据定理二又可得

$$f(x)\equiv a_1(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{n-1}).\tag{2}$$

用 α_n 代替(2)中的 x，得

$$f(\alpha_n)=a_1(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$$

因为 $f(\alpha_n)=0,\ \alpha_n-\alpha_1\neq 0,\ \alpha_n-\alpha_2\neq 0,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n-\alpha_{n-1}\neq 0$，所以 $a_1=0$.

继續推下去，可得 $a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=0$.

从定理三可以得出

推論 如果

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\equiv 0,$$

那末

$$a_0=a_1=\cdots\cdots=a_n=0.$$

现在我們来証明本节开头提出的这个定理.

定理四 如果

$$\begin{aligned}&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\\ \equiv\ &b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n,\end{aligned}$$

那末

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots\cdots,\ a_n=b_n.$$

証明 把所給多項式右边的各項移到左边，得

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(a_n-b_n)\equiv 0.$$

根据定理三的推論，得

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots\cdots=a_n-b_n=0.$$

所以

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots\cdots,\ a_n=b_n.$$

定理三的推論和定理四，对于含有一个以上的变数的多項式也能成立①．例如，如果

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f\equiv 0,$$

---

① 根据定理三的推論，利用数学归納法可以証明：如果一个含有任意个变数的多項式恒等于零，那末它的所有的系数都等于零．根据这个定理，就可以得出：如果两个含有任意个变数的多項式恒等，那末它們的对应項的系数分别相等．

那末
$$a=b=c=d=e=f=0;$$
如果
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$
$$\equiv a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f',$$
那末
$$a=a',\ b=b',\ c=c',\ d=d',\ e=e',\ f=f'.$$

上面这些定理的逆定理，都是成立的．例如，如果 $x-\alpha$ 是多項式 $f(x)$ 的一个因式，那末
$$f(x)\equiv(x-\alpha)g(x),$$
因此，
$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)g(\alpha)=0.$$
这就証明了定理一的逆定理是成立的．

上面这些定理以及它們的逆定理，在解題时很有用．下面举几个例子．

例 1 求証 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 有因式 $x+y+z$．

多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$，可以把 y 和 z 看成是常数，这样它就是关于 x 的多項式，就是 $f(x)=x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3)$．由此可以应用定理一来証明．

因为 $x+y+z=x-(-y-z)$，所以要証明 $x+y+z$ 是多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的因式，只要証明在 $x=-y-z$ 时，多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的值是零就可以了．

証明 在 $x=-y-z$ 时，
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-(y+z)^3+y^3+z^3+3(y+z)yz=0,$$
所以 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 有因式 $x+y+z$．

例 2 求証多項式 $f(x)\equiv x^4-2x^3-x+2$ 能被 x^2-3x+2 整除．

这个問題就是要証明多项式 $f(x)$ 有因式 $(x-1)(x-2)$. 根据定理二可以知道，这只要証明 $f(1)=f(2)=0$ 就可以了.

証明 因为 $f(1)=1-2-1+2=0$, $f(2)=16-16-2+2=0$, 所以 $f(x)\equiv(x-1)(x-2)\phi(x)$. 因此，多项式 $f(x)$ 能被 $(x-1)(x-2)$, 就是 x^2-3x+2 整除.

例 3 求証:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv1.$$

要証明这个恒等式，只要証明它的左右两边的差恒等于零就可以了. 这可以根据定理三来証明.

証明 設 $f(x)\equiv\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

$$+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1.$$

因为 $f(x)$ 的次数不超过 2，而有 $f(a)=f(b)=f(c)=0$, 所以 $f(x)\equiv0$. 因此，

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv1.$$

练　习

1. 求証 $(a+b)^3+(a+c)^3+(a+d)^3+(b+c)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$ 有因式 $a+b+c+d$.

2. 求証 $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$ 有因式 abc.

〔**提示** $a=a-0$.〕

3. 求証 $(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$ 能被 $(y+z)(z+x)(x+y)$ 整除.

4. 求証 $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除.

〔**提示**　如果証明了$\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x-1}$能被$x-1$整除，那末就可以証明 $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ 能被$(x-1)^2$ 整除．由此可知，这个問題可以从分解 $nx^{n+1}-(n+1)\ x^n+1$ 的因式着手．〕

5. 証明余数定理：如果被除式是 $f(x)$，除式是 $x-a$，那末余式是 $f(a)$．

〔**提示**　設商式是Q，余式是R，那末$f(x)\equiv Q(x-a)+R$，式中 R 是一个常数．〕

6. 求証：$x(x+1)(x+2)(x+3)+1\equiv(x^2+3x+1)^2$．

7. 求証恒等式：

(1) $$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv x^2;$$

(2) $$\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}$$
$$+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}\equiv 1.$$

8. 求証拉格朗奇公式：

$$f(x)\equiv f(\alpha_1)\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}$$
$$+f(\alpha_2)\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}$$
$$+\cdots\cdots+f(\alpha_{n+1})\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)},$$

式中 $f(x)$ 是 x 的 n 次多項式，α_1、α_2、……、α_{n+1} 是两两不等的数．

§3．用一个多項式的各次幂表示另一个多項式

在代数中，有时需要用一个多項式的各次幂来表示另一个多項式（参閱第 60 頁）．例如，把多項式 x^3-x^2+2x+2 表示成 $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 的形式．