# 简明概率统计教程

陈克式　编著

天津科学技术出版社

责任编辑：庞兴忠


**简明概率统计教程**

陈克式 编著

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津武清永兴印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本850×1168毫米 1/32 印张12 字数302,000

1987年9月第1版

1987年9月第1次印刷

印数：1－43,00

书号：4212·33 定价：2.70元

ISBN 7-5308-0109-0 /F·3

# 目　录

## 概率论部分

## 数理统计部分

# 概率论部分

概率论是研究随机现象的规律性的科学。换言之，它是从量的侧面研究随机现象的统计规律性的数学学科。随着科学技术和科学管理技术的不断发展，概率论的理论与方法已广泛应用于工业、农业、医学、军事、科学技术和公用事业以及经济现代化管理中。在这部分内，将阐明概率论中的一些基本内容与方法。为了便于学习，将先介绍一些集合及排列、组合的知识。

## 第一章 预备知识

### §1 集合的概念

#### §1·1 什么是集合

集合论已成为近代数学各分支的基础。集合概念是现代数学最基本的概念。集合（有时简称为集）是如此基本的一个概念，以至很难用更简单的概念来规定它的定义。因此什么是集合，一般地只作描述性的说明。

凡具有某种特性的一些互不相同的事物构成的全体，就称为集合。而构成这个集合的每一个事物叫做该集合的元素（有时简称为元）。

这种集合的定义，就其本质来说主要包括以下两个意思：一构成集合的事物必须都具有某种特性；二集合是指具有这种特性

的事物的全体或总体。以圆为例，它的特性是圆周上每个点到圆心的距离都相等。即都等于圆的半径长；同时圆周是指具有这种特性的所有点的全体。下面是集合的例子：

【例 1】 我们把银河系看成一个集合。其中每一个星体都是银河系这个集合的元素。比如太阳、地球和月亮等都是银河系这个集合的元素。

【例 2】 某学院的全体学生；某车间一天生产的产品；自然数全体；全体整数；全体有理数，即形如：$\frac{p}{q}$的数的全体。其中 $p$，$q$是整数，并且$q \neq 0$；全体实数；全体复数等等都可以看成是一个集合。但是，如果所说的是："非常大的数"或者"与某点M邻近的点"，则这样的数或点不能构成为集合。因为我们不能据此确定某数或某点是否属于该集合。

从上述例子可以看出，集合是非常广泛而内容丰富的一个基本概念。有了集合这个概念后，我们对具有某种特性的一些事物的看法就有了一个根本的变化。即把一些个别的或单个的事物通过集合把它们汇合成一个整体——集合。

## §1·2 集合概念的两要素及集合的表示法

### 1.集合概念的两要素

（1）集合具有汇合作用 因为集合是若干个有限的或无限的确定而互异事物的全体。因此，集合具有将一些互异的对象汇集成一个整体的汇合作用。这就是定义中所说的"全体称为集合"，如中国大学生排球代表队队员的全体所构成的集合。这里是将有限个互不相同的一些队员通过集合把他们汇合成为一个整体——中国大学生排球代表队。又如，由 0 与 1 之间的一切实数所组成的集合，就是将无限多个互不相同的实数汇合成为一个整体。

（2）集合具有检查标准 因为集合的元素都具有某种特

性，所谓“某种特性”，是指我们有一定的规则或办法，据此可以对任一事，判断它是属于这个集合还是不属于这个集合。任何事物，或者属于这个集合，或者不属于这个集合。二者必居其一且仅居其一。

这点很重要，它告诉我们，一个命题是否能确定一个集合，就看它是否给了一个特性——检查标准。而这个检查标准必须是明确的，不许模棱两可，似是而非。

**2.集合的表示法**

我们常用大写字母A，B，C，…等表示集合，小写字母a，b，c，…等表示元素。由有限多个元素组成的集合，则称为“有限集合”或简称为“有限集。”否则称为“无限集”。当一个集合中的诸元素能与全体自然数构成一一对应关系时，则称这个集合是可数（列）集合。例如，全体奇数组成的集合就是可数的。无限集合中有很多是不可数的，如5—6之间的一切实数组成的集合就是不可数的。

为了以后研究问题时方便，把不含任何元素的集合，称为“空集”，本书上把空集记作V（或把空集记作$\phi$）。至少含有一个元素的集合，称为非空集。元素对集合的隶属关系用符号$\in$和$\overline{\in}$（或$\notin$）表示。如果元素a属于集合A的元素时，用符号$a \in A$来表示。如果a不是集合A的元素时，用符号$a \overline{\in} A$或$a \notin A$来表示。

**【例】** 设R是全体有理数的集合，则有

$$\frac{1}{3} \in R, \quad \frac{3}{5} \in R, \quad \sqrt{2} \overline{\in} R, \quad \pi \overline{\in} R。$$

元素是个抽象的字眼，它可以是指任何东西。这就是说集合可以由任何东西来构成。譬如一个集合可以是另一个集合的元素。但是为了不导致逻辑上的矛盾，我们规定“集合A不能是它自身的元素”，所以关系式

$$A \in A$$

恒不成立。

**3.集合的表示方法**

（1）直接列举法（或罗列法），用列举法表示集合时，是在括弧{ }内列出元素的全体或一些有代表性的元素，各元素之间用逗号“，”隔开。

【例1】 从1到10的所有奇数的集合，可以写成：

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$。

【例2】 全体自然数集合，可以写成：

$$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$。

【例3】 $S=\{1, \{2, 3\}, 4\}$

表示S是由三个元素组成的集合，有两个元素1和4，另一个元素则是由数2和3所组成的集合。

注意：当我们只讨论集合是由哪些元素组成时，这{ }里元素的书写顺序及其是否重复出现是无关紧要的。所以，

$$A=\{1, 2, 3\}=\{2, 1, 3\}$$
$$=\{3, 1, 2\}=\{1, 2, 2, 3\}$$。

（2）简明文字法，这种集合的表示法，就是在花括号{ }中，用简练而明确的文字说明该集合元素的范围。

【例4】 M={全体实数}，R={数轴上的全部点}，差旅费A={车、船、飞机费，宿费，行李费，市内交通费，其他费用}。

（3）构造式法，这种表示集合的方法是指明元素所具有的特性，我们在{ }中先写出一般元素符号x，然后画一竖线（或用一个冒号“：”），在竖线的后面写明x所满足的条件（或具备的性质）。

【例5】 所有大于2且小于或等于5的实数组成的集合为：

$$S=\{x|2<x\leqslant 5\}$$。

【例6】 方程$x^2-x-2=0$的解的集合可以写成：

$$A=\{x|x^2-x-2=0\}$$。

【例7】 B={x|x是京广铁路线上的编组站}，这里B表示

以京广线上所有编组站为元素构成的集合。

【例8】 $C=\{(x,\ y)\,|x^2+y^2\leqslant 1\}$

表示C是以单位圆内（包括圆周上）的所有的点为元素构成的集合（见图1-1）。

对于一个集合，我们常常可以用一个图来表示它，就象C那样。再例如图1·2表示集合A，即闭曲线内部表示集合A的所有的元素，图1·3表示两个集合A和B，而图中相重叠的那部分表示了既属于集合A又属于集合B的元素。

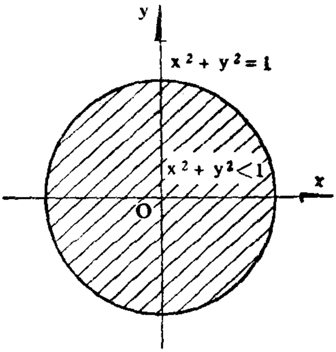



图 1·1

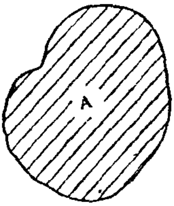



图 1·2

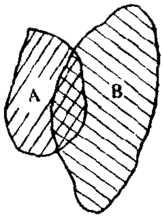



图 1·3

## §1·3 集合间的包含关系

在这一段里，我们将讨论集合与集合之间的一种关系。

譬如，一个集合的元素全部都是另一个集合的元素。象自然数集N中的每一个元素都是整数集M中的元素；自然数集N，整数集M，偶数集Q，…等等，都是一些有理数组成的集合。

定义 如果集合B的每一个元素都属于集合A，则称B为A的子集合，简称B为A的子集，或称A包含B。记作：

$B\subseteq A$。

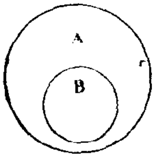
如果集合A包含B，并且A至少有一个元素不属于B，则称B是A的一个真子集，记作：

$B\subset A$

如果B不是A的子集，则记作：

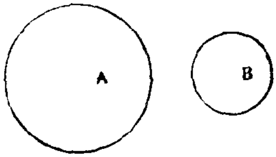
$B \not\subset A$。

（如下图1·4，1·5所示的那样）




$B \subset A$

图 1·4




$B \not\subset A$

图 1·5

这里我们用一个圆来表示一个集合，圆所含的点表示元素。这种用图解释集合概念的直观图形称为“维恩氏图解。”

【例1】 设

$A = \{$ 所有四边形 $\}$

$B = \{$ 所有平行四边形 $\}$

$C = \{$所有菱形$\}$

$D = \{$所有正方形$\}$。

则显然有：$D \subset C \subset B \subset A$。

【例2】 对任何集合A，总有$A \subseteq A$。

因为集合A的每一个元素当然都是它自己的元素。故由子集合的定义可知$A \subseteq A$。

我们规定空集V是任何集合的子集。这是因为，若V不是集合A的子集，那么V中至少有一个不属于A的元素，但是既然V不包含任何元素，当然也就找不到这样的元素，所以$V \subseteq A$的关系恒成立。这是空集的奇怪而重要的性质，后面还要用到这个性质。

【例3】 设集合$A = \{1, 2, 3\}$，则它共有8个子集：

$\varnothing$，{1}，{2}，{3}，{1，2}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}。

这里应注意：1，2，3是集合A的元素，而{1}，{2}，{3}是A的子集，两者应区别开来。也就是说1是A的一个元素，而{1}是包含单元素1的集合，它是A的一个子集。即$1\in A$，$\{1\}\subset A$。同样$2\in A$，$\{2\}\subset A$，$3\in A$，$\{3\}\subset A$。

定义，如果给定两集合A与B，若有

$$A\subseteq B \text{且} B\subseteq A$$

则称A与B相等，记作$A=B$，即两个集合A与B所含的元素完全相同。

若集合A与B所含的元素不相同，则称A与B不相等，记作$A\neq B$。

【例4】 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,2,1\}$。

则 $A=B$。

【例5】 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，

$$B=\left\{x \mid 5-x\geqslant 0\text{的正整数解}\right\}。$$

则显然有：$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，故$A=B$。

【例6】 设有A，B，C三个集合，如果$A\subseteq B$并$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

证明：设$x\in A$的任意元素，因为$A\subseteq B$，所以$x\in B$。又因为$x\in B$，而$B\subseteq C$，所以又有$x\in C$。由此可见，A的任何元素也都是C的元素，因此由包含定义可知$A\subseteq C$。

【例7】 对集合相等关系来说，也有如下性质：

（1）集合A为B的真子集的充要条件是

$A\subseteq B$，且$A\neq B$；

（2）对每一个集合A，总是有$A=A$；

（3）若集合$A=B$，则也有$B=A$；

（4）若集合$A=B$，$B=C$，则$A=C$。

以上几条性质的证明皆比较容易，读者可作为练习、自证。

为了说明记号$\in$，$\overline{\in}$，$\subset$，$\not\subset$，$=$的正确用法，设

$$A_1=\{a,\{a\}\},$$

$$A_2=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\},$$

$$A_3=\{a,\{b\}\},$$

$$A_4=\{\{\{a\}\},a,\{a\}\}。$$

则下面左边的法在概念上是错误的，右边的写法在概念上是正确的。

| 不 正 确 | 正 确 |
|---|---|
| $A_3\subset A_2$ | $A_1\subset A_2$ |
| $a\subset A_1$，$a\subset A_2$，$a\subset A_3$ | $a\in A_1$，$a\in A_2$，$a\in A_3$ |
| $\{a\}\in A_3$ | $\{a\}\in A_1$，$\{a\}\in A_2$，$\{a\}\overline{\in} A_3$ |
| $\{\{a\}\}\subset A_3$ | $\{a\}\subset A_3$ |
| $\{\{a\}\}\in A_1$ | $\{\{a\}\}\subset A_1$ |
| $\{b\}\subset A_3$ | $\{b\}\in A_3$，$\{\{b\}\}\subset A_3$ |
| $\{\{\{a\}\}\}\subset A_1$ | $\{\{a\}\}\in A_2$，$\{\{a\}\}\subset A_2$，$\{\{\{a\}\}\}\subset A_2$ |
| $A_1\neq A_2$ | $A_2\not\subset A_1$ |
| $A_1=A_3$ | $A_2=A_4$ |

定义，以一个给定的集合A的一切子集为元素而构成的集合叫做集合A的幂集合，记作Pow（A），即

$$\text{Pow}(A)=\{x|\ x\subset A\},$$

例如，设

$$A=\{a,b,c\},$$

则

$$\text{Pow}(A)=\{V,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}。$$

设给定有限集合A，它包含n个元素，则由A的任何一个元素构成的A的子集共有$C_n^1$个；由A的任何二个元素构成的A的子集共有$C_n^2$个，…；由A的任何$n-1$个元素构成的A的子集

共有$C_n^{n-1}$个，再考虑到空集是A的子集，集合A是它自身的子集，于是含n个元素的集合A的子集的个数总共有

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1=2^n,$$

也就是说含n个元素的集合A的幂集合Pow（A）共有$2^n$个元素。由此，集合A的幂集合还有一个记法就是$2^A$，$2^A$仅是一个记号，并不是2的A次方。

## §2 集合的运算

在这一节里我们将讨论集合论中比较简单的几种运算：

并、交、差、余以及对称差。这些运算，实质上就是一个集合与另一个集合按某种方式合并，或者一个集合用另外一个集合做某种形式的分解。

通过集合运算的讨论，我们可以发现，集合的运算与数的运算之间有着不少共同的规律性。但还应注意到它们之间也有很多不同之处。

### §2·1 集合的并集

**定义** 由两个给定的任意集合A与B的全部元素所组成的新集合C，称为集合A与B的并集合。记作：

$$C=A\cup B\ （或C=A+B）$$

新集合C还可表为：

$$C=A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$$

例如，设

$$A=\{0,\ 1,\ 2,\ a\},$$

$$B=\{a,\ b,\ c,\ \{0,\ 1,\ 2\}\},$$

则有

$$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ \{0,\ 1,\ 2\},\ a,\ b,\ c\}。$$

依集合的并的定义和子集的定义立即可知

关系式　$A \subset B$　成立的必要和充分条件是

$$A \cup B = B。$$

集合的并可以推广至有限多个集合的情形。设$A_1$，$A_2$，$A_3$，…，$A_n$为n个集合，它们的并的定义为：

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$$
$$= \{x \mid x \in A_1 或 x \in A_2 或 x \in A_3，\cdots，或 x \in A_n\}。$$

上式常略为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i。$$

集合的并可以推广至无穷多个集合的情形，设有集合$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…它们的并的定义为：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$
$$= \{x \mid x \in A_1，或 x \in A_2，\cdots，或 x \in A_n，\cdots\}。$$

上式常略为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A。$$

## §2·2　集合的交集

**定义**　由给定的任意两个集合A与B的全体公共元素所组成的新集合D称为集合A与B的交集合。记作：

$$D = A \cap B \quad（或 D = A \cdot B）$$

新集合D还可表为：

$$D = A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}。$$

例如，设

$$A = \{0，1，2\}，$$
$$B = \{1，2，3\}，$$
$$C = \{3，4，5\}，$$

则有

$$A \cap B = \{1，2\}，$$

$B \cap C = \{3\}$，

$A \cap C = V$（或$\phi$）

依集合的交的定义和子集的定义可知关系式

$A \subset B$　成立的必要和充分条件是

$A \cap B = A$。

集合的交可推广至两个以上乃至无穷多个集合的情形，设有n个集合$A_1$，$A_2$，$A_3$，…，$A_n$。则它们的交的定义为：

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$$
$$= \{x \mid x \in A_1 \text{且} x \in A_2 \cdots\cdots \text{且} x \in A_n\}。$$

上式常简记为：

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i。$$

设$A_1$，$A_2$，$A_3$，…为无穷个集合，则它们的交定义为：

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$
$$= \{x \mid x \in A_1 \text{且} x \in A_2 \cdots\}。$$

并简记为：

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i。$$

## §2·3　集合的差集

定义　设给定任意两个集合A与B，如果集合C的所有元素都属于A但不属于B，则称集合C是A关于B的差集合。记作：

$C = A \setminus B$（或$C = A - B = A - (A \cap B)$）

差集C还可表为：

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}。$$

【例1】　设

$A = \{$中小学教师$\}$，

$B = \{$小学教师$\}$，

则　　$C = A \setminus B = \{$中学教师$\}$。

例2．设

$$A=\{0,\ 1,\ 2\},$$

$$B=\{1,\ 2,\ 3\},$$

则 $C=A\setminus B=\{0\}$，

如 $D=B\setminus A=\{3\}$。

## §2·4 集合的余集

这里，我们给出余集合的运算，它是差集合运算的一种特殊情形。

定义，如果集合B是集合A的子集即 $B\subseteq A$，则我们称差集合 $A\setminus B$ 为B在A中的余集合（或补集合）。记作：

$$\overline{B}=A\setminus B。$$

集合B对集合A的补，也可简记为：$C_AB$。一个集合B对不同的（包含它的）集合求补将得到不同的补集。故关于一个集合的补，一般需说清楚是对那个包含它的集合求补的结果。如果未说明这一点，就意味着是对某一已约定的集合求补，我们称这个事先约定的集合为“万有集合”（或称“全空间集”，或“完全集合”）。所谓万有集合，是事先取定一个集，在我们所研究的问题中所涉及到的集合都是它的子集合，今后将万有集合（或全空间集）记为U（或Ω），显然万有集合U因所考虑的问题而异。

例如，设

A＝{x｜x是D校二班的学生}，

B＝{x｜x是D校二班的女生}，

C＝{x｜x是D校的女生}，

U＝{x｜x是D校的学生}。

集B对A求补，则得到

$\overline{B}$＝{x｜x是D校二班的男生}；

集B对C求补，则得到

$\overline{B}$＝{x｜x是D校二班之外的女生}；