奥林匹克竞赛千题巧解

AOLINPIKE JINGSAI QIANTIQIAOJIE

主编　陈家昌　才裕平

長春出版社

修订版

初中数学

三年级

AOLINPIKE

奥林匹克竞赛千题巧解

初中数学三年级

主　　编　陈家昌　才裕平

本册主编　才裕平

本册主编　高长山　李素彩

　　　　　姜　慧　李景秋

長春出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克竞赛千题巧解·初中三年级数学/陈家昌，才裕平主编：才裕平等分册主编．—长春：长春出版社，1999.7（1999.9重印）（2000.1重印）（2001.1重印）（2001.5重印）

ISBN 7-80604-367-5

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①陈…②才…③才…　Ⅲ．数学课-初中-解题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第45294号

责任编辑：毕素香　　封面设计：王　帆

长春出版社出版

（长春市建设街43号）

（邮编 130061　电话 8569938）

长春市第四印刷厂印刷

新华书店经销

850×1168毫米 32开本　9.75印张　243千字

1999年7月第1版　2001年5月第5次印刷

印数：20001—23000册　定价：9.80元

《奥林匹克竞赛千题巧解》
数 学 编 委 会

前　言

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年),这是力量、灵活与美的竞赛。数学是思维的体操、科学的皇后,解数学难题的竞赛,同样被称为数学奥林匹克。

多年的数学竞赛实践证明,广泛深入地开展中学数学课外活动,科学合理的举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展,提高青少年数学素质的一个有力措施。

本书是根据九年义务教育教学大纲编写的,我们力图使书的内容源于现行课本,着眼于数学智力的开发,寓知识于趣味之中。

本书所选题目,由浅入深,循序渐进,知识内涵点多面广,互相渗透,纵横交错。主要包一元二次方程、函数、解三角形、圆四章。每章包括知识要点、例题、本章小结和测试题,书后精心设计了五套综合测试题并附参考答案,以便学生训练,提高解题能力和技巧。

限于篇幅,本书不可能对与之有关的问题面面俱到,对于某些没有涉及的问题,希望读者研究时丰富补充。

希望本书能成为青少年数学爱好者的良师益友。

由于我们的理论水平有限,此书一定会有很多欠缺之处,希望读者批评指正。

本书主编才裕平,副主编高长山,李素彩、姜慧、李景秋参加编著的还有高立东、陈春玲、王怀民、朱丽娅、齐艳萍、张和平等。

目　　录

第一章　一元二次方程

〔知识要点〕

1． 一元二次方程：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2，这样的整式方程叫做一元二次方程.

2． 一元二次方程的解法

(1)直接开平方法；(2)配方法；(3)公式法；(4)因式分解法.

3． 一元二次方程根的判别式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 在 $\triangle>0$ 时有两个不相等的实数根，在 $\triangle=0$ 时有两个相等的实数根，在 $\triangle<0$ 时没有实数根.

4． 可化为一元二次方程的方程

(1)解高次方程的基本思想是降次，把高次方程化为一次方程或二次方程.

(2)解分式方程的基本思想是去分母，把分式方程化为整式方程.

(3)解无理方程的基本思想是去根号，把无理方程化为有理方程.

(4)解多元方程的基本思想是消元，把多元方程化为一元方程.

〔例题〕

一、 一元二次方程

1． 解方程：$(5x-4)^2-(4x-3)^2=0$.

解法一　将方程左边利用平方差公式因式分解：

$$[(5x-4)+(4x-3)][(5x-4)-(4x-3)]=0$$

$$(9x-7)(x-1)=0$$

$\therefore 9x-7=0$ 或 $x-1=0$，$\therefore x_1=\dfrac{7}{9}$，$x_2=1$

解法二　移项后两边开平方得：$5x-4=\pm(4x-3)$，$5x-4=4x-3$ 或 $5x-4=-4x+3$，

解之得　$x_1=1$，$x_2=\dfrac{7}{9}$

2.　解方程　$x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{2}x+\sqrt{6}=0$.

解　将方程左边变形为

$$x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=0$$

即　$(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})=0$，

$\therefore x-\sqrt{3}=0$ 或 $x-\sqrt{2}=0$，$\therefore x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{2}$.

3.　解方程：$2x^2-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})x-4-\sqrt{15}=0$.

解　用求根公式，方程的系数为 $a=2$，

$b=-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$，$c=-(4+\sqrt{15})$

$$\triangle=[-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})]^2-4\times2\times[-(4+\sqrt{15})]=64$$

$$\therefore x=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})\pm\sqrt{64}}{4},$$

$$\therefore x_1=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+4}{2},\ x_2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-4}{2}$$

4.　解方程　$(7-4\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})x-2=0$.

解　原方程可变形为 $(2-\sqrt{3})^2x^2-(2-\sqrt{3})x-2=0$

令　$(2-\sqrt{3})x=y$，则 $y^2-y-2=0$，

解之得　$y_1=2$，$y_2=-1$. 当 $y=2$ 时，$(2-\sqrt{3})x=2$，

得 $x=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}$，当 $y=-1$ 时，$(2-\sqrt{3})x=-1$，

得 $x=\dfrac{-1}{2-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$,

$\therefore$原方程的解为 $x_1=4+2\sqrt{3}, x_2=-2-\sqrt{3}$.

5. 解方程:$(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$.

解 方程两边同乘以$(\sqrt{2}-1)$,得

$x^2+(1-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$,

即 $(x-\sqrt{2})[x-(\sqrt{2}-1)]=0$,

$\therefore x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}-1$.

6. 解关于 x 的方程 $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$ $(ab\neq 0)$.

解 方程左边分解因式,得$(ax-b^3)(bx-a^3)=0$,

$\therefore ax-b^3=0$ 或 $bx-a^3=0$, $\because ab\neq 0$,

$\therefore a\neq 0, b\neq 0$, $\therefore x_1=\dfrac{b^3}{a}, x_2=\dfrac{a^3}{\mathrm{b}}$.

7. 解关于 x 的方程 $(k+1)x^2-2(k-3)x+k=0$.

解 当 $k=-1$,即当 $k+1=0$ 时,原方程化为 $8x=1$,

$\therefore x=\dfrac{1}{8}$.当 $k\neq -1$ 时,即当 $k+1\neq 0$ 时,原方程为一元二次方程,其系数为:$a=k+1, b=-2(k-3), c=k$, $\triangle=[-2(k-3)]^2-4(k+1)k=-28k+36$,若 $-28k+36>0$,即当 $k<\dfrac{9}{7}$(且 $k\neq -1$)时,由求根公式得

$$x=\frac{2(k-3)\pm\sqrt{-28k+36}}{2(k+1)}=\frac{(k-3)\pm\sqrt{9-7k}}{k+1},$$

$$\therefore x_1=\frac{(k-3)+\sqrt{9-7k}}{k+1}, x_2=\frac{(k-3)-\sqrt{9-7k}}{k+1}.$$

若 $-28k+36=0$,即当 $k=\dfrac{9}{7}$时,方程有两个相等的实

根，$x_1=x_2=-\frac{3}{4}$.

若$-28k+36<0$，即当$k>\frac{9}{7}$时，方程无实根.

综上所述，当$k=-1$时，方程解为$x=\frac{1}{8}$.

当$k<\frac{9}{7}$且$k\neq-1$时，方程的根为$x_1=\frac{(k-3)+\sqrt{9-7k}}{k+1}$，$x_2=\frac{(k-3)-\sqrt{9-7k}}{k+1}$，当$k=\frac{9}{7}$时，方程的根为$x_1=x_2=-\frac{3}{4}$. 当$k>\frac{9}{7}$时，方程无实根.

8. 解关于x的方程$(m-5)^2x^2+(m-5)x-2=0$.

解 若$(m-5)^2=0$，即当$m=5$时，原方程变为$0x^2+0x-2=0$，此方程无解.

若$(m-5)^2\neq0$，即当$m\neq5$时，将原方程左端分解因式，得$[(m-5)x-1][(m-5)x+2]=0$，

$\therefore x_1=\frac{1}{m-5}, x_2=-\frac{2}{m-5}$.

综上所述，当$m=5$时，方程无解，当$m\neq5$时，方程的解为$x_1=\frac{1}{m-5}, x_2=\frac{-2}{m-5}$

9. 解方程：$kx^2+2(k-2)x+(k-3)=0$.

解 (1)当$k=0$时，原方程变为：$-4x-3=0$，$x=-\frac{3}{4}$.

(2)当$k\neq0$时，原方程为一元二次方程，它的系数为$a=k, b=2(k-2), c=k-3$，$\triangle=[2(k-2)]^2-4k(k-3)=-4k+16$，当$-4k+16\geqslant0$时，即$k\leqslant4$，且$k\neq0$时，

$x=\frac{-2(k-2)\pm\sqrt{16-4k}}{2k}$，$\therefore x_1=\frac{2-k+\sqrt{4-k}}{k}$，

$x_2=\dfrac{2-k-\sqrt{4-k}}{k}$,当 $k>4$ 时,方程无解.

综上所述,当 $k=0$ 时,方程的解为 $x=-\dfrac{3}{4}$.

当 $k\leqslant 4$ 且 $k\neq 0$ 时,方程的解为 $x_1=\dfrac{2-k+\sqrt{4-k}}{k}$,

$x_2=\dfrac{2-k-\sqrt{4-k}}{k}$,当 $k>4$ 时,方程无解.

二、一元二次方程根的判别式

10. 已知关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+1=0$,其中 m 为实数,当 m 为何值时,方程有实数根.

解 若 $m^2-1=0$,则 $m=1$ 或 $m=-1$,当 $m=-1$ 时,原方程为 $0x^2+0x+1=0$,无解.当 $m=1$ 时,原方程为 $2x+1=0, x=-\dfrac{1}{2}$.

若 $m^2-1\neq 0$,即 $m\neq\pm 1$ 时,原方程有实根的条件为

$\triangle=(m+1)^2-4(m^2-1)=-3m^2+2m+5\geqslant 0$

即 $(3m-5)(m+1)\leqslant 0$ $\qquad\therefore -1\leqslant m\leqslant\dfrac{5}{3}$

$\because m\neq\pm 1, \therefore -1<m\leqslant\dfrac{5}{3}$ 且 $m\neq 1$

综上所述,原方程有实根的条件是 $-1<m\leqslant\dfrac{5}{3}$.

11. 当 m 为何值时,关于 x 的一元二次方程 $(3m+1)x^2-2(3m+1)x+m+4=0$ 有两个相等的实数根?

解 要使方程有两个相等的实数根,必须

$$\begin{cases}3m+1\neq 0\\ \triangle=4[(3m+1)^2-(3m+1)(m+4)]=0\end{cases}$$

解之，得　$m=\frac{3}{2}$，所以，当 $m=\frac{3}{2}$ 时，原方程有两个相等的实数根.

12．当 a 为何值时，关于 x 的方程 $x^2+(a-1)x+(a+1)=0$ 有两个不等的实数根？

解　由 $\triangle=(a-1)^2-4(a+1)>0$，得 $a^2-6a-3>0$，解得 $a>3+2\sqrt{3}$ 或 $a<3-2\sqrt{3}$，所以，当 $a>3+2\sqrt{3}$ 或 $a<3-2\sqrt{3}$ 时，原方程有两个不等的实数根.

13．已知 a 是实数，且方程 $x^2+2ax+1=0$ 有两个不相等的实根，试判别方程 $x^2+2ax+1+2(a^2-1)(x^2-1)=0$ ①有无实根？

解　由已知方程 $\triangle=(2a)^2-4\times1\times1>0$ 得 $a^2-1>0$，$\therefore a>1$ 或 $a<-1$，整理方程①得 $(2a^2-1)x^2+2ax+2a^2-1=0$，其判别式 $\triangle'=(2a)^2-4(2a^2-1)(2a^2-1)=-4(a^2-1)(4a^2-1)<0$，$\therefore$ 方程①没有实根.

14．已知 a、b 为整数，$x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根；$x^2-(6-a)x+7-b=0$ 有两个相等的实数根；$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根，求 a、b.

解　由已知得 $a^2-4(3-b)>0$　(1)

$(6-a)^2-4(7-b)=0$　(2)

$(4-a)^2-4(5-b)<0$　(3)

由(2)得　$4b=28-(6-a)^2$　(4)

将(4)代入(1)得 $a^2-12+28-(6-a)^2>0$

解这个不等式，得　$a>\frac{5}{3}$　(5)

将(4)代入(3)得 $(4-a)^2-20+28-(6-a)^2<0$

解这个不等式，得　$a<3$　(6)

由(5)、(6)式得 $\frac{5}{3}<a<3$

由已知 a、b 为整数，$\therefore a=2$，将 $a=2$ 代入(4)，得 $b=3$，$\therefore a=2, b=3$.

15. 将 $\sqrt{2}x^2+(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{6}$ 在实数范围内因式分解.

解 方程 $\sqrt{2}x^2+(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{6}=0$ 的根是

$$x=\frac{-(2\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{13-4\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{-(2\sqrt{3}+1)\pm(2\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}},$$

即 $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,

$$\therefore \sqrt{2}x^2+(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{6}=\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\sqrt{2}x+1)(x+\sqrt{6}).$$

16. 将 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$ 在实数范围内因式分解.

解 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$，令 $4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)=0$，解之得 $x_1=\frac{3y-1}{2}, x_2=\frac{-y+3}{2}$，$\therefore 4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3=(2x-3y+1)(2x+y-3)$

17. m 为何值时，一元二次方程 $(5-m)x^2-6x+m+5=0$ 必有两个实根？

解 $\because$ 此方程有两个实根，$\therefore \Delta=(-6)^2+4(m-5)(m+5)\geqslant 0$，即 $m^2\geqslant 16$，$\therefore m\leqslant -4$ 或 $m\geqslant 4$ (1)

又 $\because$ 此方程是一元二次方程，

$\therefore$ 二次项系数 $5-m\neq 0$，即 $m\neq 5$ (2)

由(1)、(2)得 $m \leqslant -4$ 或 $m \geqslant 4$ 且 $m \neq 5$

18. 若关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 无实根,试判定关于 x 的方程 $(m-6)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的根的情况.

解 $\because$ 方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 无实根,

$\therefore \triangle=4(m+2)^2-4m(m+5)<0$,即 $-4m+16<0$,

$\therefore m>4$,对于方程 $(m-6)x^2-2(m+2)x+m=0$,
若 $m=6$,则它是一次方程,显然有且只有一个解.若 $m\neq 6$,则它是二次方程.而 $\triangle=4(m+2)^2-4m(m-6)=4(10m+4)$,$\because m>4$,$\therefore 4(10m+4)>0$ 即 $\triangle>0$,$\therefore$ 当 $m>4$ 且 $m\neq 6$ 时,此方程有两个不相等的实数根.

由上可知,当 $m=6$ 时,方程 $(m-6)x^2-2(m+2)x+m=0$ 有且只有一个实根,当 $m>4$ 且 $m\neq 6$ 时,方程 $(m-6)x^2-2(m+2)x+m=0$ 有两个不相等的实根.

19. 若 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$ 是关于 x 的完全平方式,则 $a=b=c$.

证明 原式 $=3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$,

$\because$ 原式是关于 x 的完全平方式,

$\therefore \triangle=4(a+b+c)^2-4\times 3(ab+bc+ca)=0$.

即 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$,

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$,

配方得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,

$\because (a-b)^2\geqslant 0, (b-c)^2\geqslant 0, (c-a)^2\geqslant 0$,

$\therefore a-b=b-c=c-a=0$,$\therefore a=b=c$.

20. 已知关于 x 的二次方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$,求证:当 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$ 时,这两个方程中至少有一个方程有实根.

证明　设这两个方程的判别式分别为$\triangle_1$与$\triangle_2$,则
$\triangle_1+\triangle_2=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)$,

$\because p_1p_2=2(q_1+q_2)$,

$\therefore \triangle_1+\triangle_2=p_1^2-2p_1p_2+p_2^2=(p_1-p_2)^2\geqslant 0$,

$\therefore \triangle_1\geqslant 0$ 和$\triangle_2\geqslant 0$ 中至少有一个成立.

即当 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$时,这两个方程中至少有一个方程有实根.

21.　已知关于 x 的方程 $x^2-4(m-1)x+3m^2-2m+2k=0$ 对于任意有理数 m 均有有理根,试求 k 的值.

解　$\because$原方程有有理根,$\therefore$此方程的判别式$\triangle$必为有理数的平方. 又$\triangle_1=16(m-1)^2-4(3m^2-2m+2k)=4(m^2-6m+4-2k)$,其中 4 为完全平方数,$\therefore$代数式 $m^2-6m+4-2k$ 对于任意的有理数 m 均为有理数的平方,$\therefore$关于 m 的二次方程 $m^2-6m+4-2k=0$ 必有两个相等实根,

$\therefore \triangle_2=(-6)^2-4(4-2k)=0$,解得　$k=-\dfrac{5}{2}$.

22.　已知 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根,不解这个方程,求 $x_1^2+x_2^2, x_1^3+x_2^3, x_1^4+x_2^4, x_1^5+x_2^5$.

解　由韦达定理可知 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, x_1x_2=\dfrac{c}{a}$,

$$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{a^2},$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$

$$=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}-\frac{c}{a}\right)=\frac{-b^3+3abc}{a^3},$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)$$

$$-2\cdot\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^5+x_2^5=(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1{}^2x_2^2-x_1x_2^3+x_2{}^4)$$

$$=(x_1+x_2)[(x_1{}^4+x_2{}^4)-x_1x_2(x_1{}^2+x_2{}^2)+(x_1x_2)^2]$$

$$=(-\frac{b}{a})(\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}-\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2-2ac}{a^2}+\frac{c^2}{a^2})$$

$$=-\frac{b^5-5ab^3c+5a^2bc^2}{a^5}.$$

23. 已知关于 x 的方程 $2x^2+3(m-1)x+m^2-4m-7=0$.

(1)求证:这个方程有两个不相等的实数根;

(2)m 为何值时,方程两根之积大于 -1.

证明 (1)$\because \triangle=[3(m-1)]^2-4\times2\times(m^2-4m-7)$ $=9m^2-18m+9-8m^2+32m+56=(m+7)^2+16>0$,

$\therefore$这个方程有两个不相等的实数根.

(2)由根与系数关系,得方程两根之积为$\frac{1}{2}(m^2-4m-7)$,于是由$\frac{1}{2}(m^2-4m-7)>-1$,得 $m^2-4m-5>0$,即 $(m-5)(m+1)>0$,$\therefore m>5$ 或 $m<-1$.即当 $m>5$ 或 $m<-1$ 时,方程两根之积大于 -1.

24. 当 k 为何值时,一元二次方程 $2(k+3)x^2+4kx+3k-6=0$的两根绝对值相等.

解 一元二次方程的两根的绝对值相等时有两种情形:当两根不相等时,则它们互为相反数;另一种情形是两根相等.对于第一种情形,k 要适合

$$\begin{cases}4k=0\\ \triangle=(4k)^2-4\times2\times(k+3)(3k-6)>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}k=0\\ -6<k<3\end{cases}$$

$\therefore k=0$;对于第二种情形,k 应适合

$$\begin{cases}2(k+3)\neq 0\\ \triangle=(4k)^2-4\times 2(k+3)(3k-6)=0\end{cases}$$

即$\begin{cases}k\neq -3\\ k^2+3k-18=0\end{cases}$,解得 $k=-6,k=3$,

所以,当 $k=-6,0,3$ 时,该方程两个根的绝对值相等.

25. 已知:一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 有两个整数解,如果 c 是这两个解的公约数,试证 c 也是 p、q 的公约数.

证明 设 α、β 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个整数解,则 $\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$,又 $\because c$ 是 α、β 的公约数,$\therefore \alpha=ca,\beta=cb$($a$、$b$ 是整数),而 $p=\alpha+\beta=ca+cb=c(a+b)$,$q=\alpha\beta=c^2ab=c(abc)$,$\because a,b,c$ 是整数,$\therefore a+b,abc$ 也是整数,$\therefore c$ 也是 p、q 的公约数

26. 确定方程 $x^2-\frac{15}{4}x+a^3=0$ 中 a 的值,要使它的一个根是另一个根的平方.

解 首先必须方程有根,因而 $\triangle=(-\frac{15}{4})^2-4\times 1\times a^3\geq 0$,即 $64a^3\leqslant 225$,$\therefore a\leqslant\frac{\sqrt[3]{225}}{4}$.设方程一个根为 x_0,则另一根为 $x_0{}^2$,由韦达定理,得

$$\begin{cases}x_0+x_0{}^2=\frac{15}{4} & (1)\\ x_0{}^3=a^3 & (2)\end{cases}$$

由(2)式得 $x_0=a$,将 $x_0=a$ 代入(1)式,得 $a+a^2=\frac{15}{4}$,

即 $4a^2+4a-15=0$,解之得 $a_1=-\frac{5}{2},a_2=\frac{3}{2}$,它们都在