抛物问题
GALERKIN 有限元法

(瑞典) 韦达·托梅 著
黄明游
刘海楼 译

吉林大学出版社

抛 物 问 题
GALERKIN 有限元法

(瑞典)韦达·托梅 著

黄 明 游
刘 海 楼 译

*

吉林大学出版社出版　吉林省新华书店发行

长春市第九印刷厂印刷

*

787×1092　32开　8.25印张　185,000字

1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷

印数：1—1,500册

统一书号：13323·2　　　定价：1.70元

内 容 介 绍

本书共分十四章，它系统、完整地阐述了抛物问题的有限元法及其数学理论。书中论及的有限元法包括 Galerkin 法、H^{-1} 方法、混合法、质量集中法以及简单的和基于 Padé 逼近的时间离散化方法；既讨论了光滑初值问题，也讨论了非光滑初值问题，还涉及到非线性和奇型的抛物问题；深入、细致地介绍了在L_2模、L_∞模以及负模意义下分析有限元法收敛性和建立理论误差估计的方法、技巧。

这本书具有由浅入深、内容新颖精炼的特点，可作为有关专业高年级学生和研究生课的教材，也是一本普及、提高有限元理论方法的很好的读物和参考书，可供具有大学数学水平的教师、研究生、科学工作者以及工程技术人员阅读。

序　　言

本书的宗旨是，以一个基本自给自足的形式，给出应用于抛物问题的Galerkin有限元法的数学概述。书内论题的选择并不表示详尽无遗，只能说是充分反映了著者近十多年来在这个领域内的工作。

本书的目的主要是适宜教学，所以，重点放在一些典型问题分析的思路和方法上，而不去纠缠方法的每个细节。本书总结了抛物问题有限元法的最近发展，对于所列的每个论题的更完整结果，给读者介绍了可参考的文献。

由于对抛物问题的Galerkin方法的陈述和分析，一般都基于相应的定常问题的结果，所以为了完整起见，在本书的内容中也包含了一些必要的椭圆问题的结果。

下边是本书内容的概要：

在作为导言的第一章里，我们针对有界域上，带有第一类齐次边界条件的热传导方程的典型初边值问题，考虑了最简单的Galerkin有限元法。我们采用了问题的标准弱形式，并且，首先用分片线性函数，然后再用更一般的分片多项式，去近似在区域的边界上满足齐次条件的函数。我们以这样的典型问题为例，给出了在能量和平方平均度量下的基本误差估计式。这里首先针对由单独离散空间变量所得到的半离散问题进行讨论，然后再对由进一步离散时间变量所得的通常的全离散格式进行讨论。

在紧接着的五章里，我们讨论了半离散近似情形的结果的某些扩展和推广，并给出了在一些不同度量下的误差估

计。首先，在第二章里，用椭圆问题的近似解算子表示半离散问题，这时不要求近似函数满足齐次边界条件。基于椭圆问题非标准弱陈述的 Nitsche 半离散方法，被选作为这样的一个例子。在第三章里，对齐次热传导方程情形，给出了更精确的误差估计。此时对于相应给定初值的解的光滑性，要求一个准确的描述，即是用本书中反复用到的函数空间 $\dot{H}^s(\Omega)$ 来表达，这个空间照顾到了其构成元素的光滑性和边界状况两方面的要求，我们同时证明了，半离散解算子对正的时间有类似于连续情形的光滑性质。并且，作为一个推论，证明了甚至当初值不光滑时，有限元解也有足够的收敛阶。在第四章中，将第二、第三章的结果推广到更一般的抛物方程。在第五章，对于一个简单情形，导出了一些按最大模的先验界和误差估计。在第六章，证明了一些负模估计，对一些情形同时证明了在特定点上收敛性（超收敛）的有关结果。

在其次的三章里，我们讨论了半离散问题的时间离散化。首先，在第七章里，研究了齐次热传导方程，并且对光滑和非光滑初值的两种情形给出了类似于前边的结果。这里讨论了对时间离散化的单步型方法，并且这种方法依赖于指数函数的有理逼近，标准的Euler方法和Crank-Nicolson格式作为特例。在第八章里，我们研究了非齐次热传导方程的全离散单步方法，这些方法在每个时间步要计算右端项在一固定的有限个点上的值。在第九章，我们应用 Galerkin 方法进行时间变量的离散化，在时间变量方向上寻求分片多项式形式的离散解。此时解在节点处可以是不连续的，时间方向的剖分也不一定是均匀的。在此方法中，右端项是取积分形式，而不是取在有限个点上的值。

在第十章里，讨论了标准 Galerkin 方法对非线性抛物方程的应用。给出了半离散问题的误差估计，其次我们特别关心的是，关于未知函数是线性的按时间步进的格式的陈述和分析。

在接着的三章里，我们考虑了标准 Galerkin 方法的各种变形。第十一章分析了所谓质量集中方法。在某些情形下，这种方法符合极大值原理。第十二章讨论了 H^1 和 H^{-1} 方法。其中第一个是基于一个 H^1 内积弱陈述的 Galerkin 方法，而第二个方法是使用了分别取自不同有限维空间的试探函数和检验函数。第十三章的逼近格式，是基于初边值问题的一个混合陈述。这时，解本身和它的梯度是分别在不同的空间里寻找。

最后的第十四章，考虑了一个奇型问题，这个问题是由 R^3 中一个球内的球对称问题通过极坐标变换得到的，我们将分别地讨论基于不同内积所定义的两种不同弱陈述的 Galerkin 方法。

在每章末尾都列出了参考文献。定理、引理和公式在每一章都是独立地编号，当不同章涉及同一文献时，在不同章分别列出。

这本书是在我多次授课的基础上形成的。其中包括我于 1977 年在澳大利亚 Queensland 大学、1980 年在法国巴黎第Ⅵ大学和 1982 年在中国吉林大学的讲学，当然，也包括我多年来在我所属大学——Chalmers 技术大学（瑞典哥德堡）所进行的教学。我愿意向我在这些大学里的学生和同事们表示感谢，感谢他们给予我的鼓励。我在这个领域内的大多数工作，是与 Cornell 大学（美国）的 J. H. Bramble, A. H. Schatz 和 L. Wahlbin 十余年来的合作密切相关的，所

以，在这里我愿意对他们的志同道合的合作表示谢意。同时也感谢美国国立科学基金会，在12个夏季期间对上述合作所给予的支持。

最后，我感谢Stig Larsson和聂义勇，他们仔细地阅读了整个书稿，并提出过许多改进的意见。还感谢Boel Engebrand，是她如此熟练地打印了此书。

韦达．托梅

于哥德堡，1983年12月

目　　录

第一章　标准GALERKIN方法

在作为引言的这一章里，我们考虑求热传导方程初边值问题近似解的标准 Galerkin 方法。

设 Ω 是 R^d 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域，考虑初边值问题

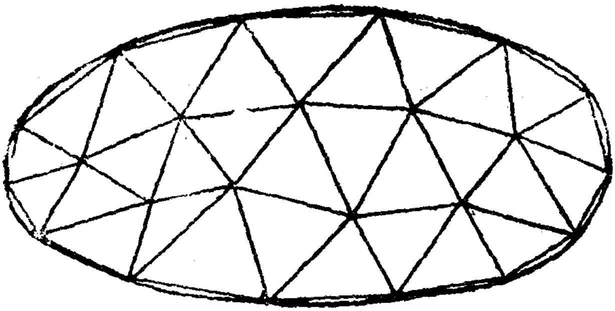
$$(1)\quad u_t - \Delta u = f, \quad 于\ \Omega\times[0,\infty)内,$$
$$u=0, \quad 在\ \partial\Omega\times[0,\infty)上,$$
$$u(x,0)=v(x), 于\ \Omega\ 内,$$

这里 u_t 表示 $\partial u/\partial t$. $\Delta = \sum_1^d \partial^2/\partial x_j^2$ 是 Laplace 算子。首先我们想用这样一个函数 $u_h(x,t)$ 去逼近 $u(x,t)$，对于每一个固定的 t，$u_h(x,t)$ 作为 x 的函数属于具有某种逼近性质的有限维线性空间 S_h。这个函数将是一个有限常微分方程组的解，被称之为半离散解。然后，再将方程(1)按时间变量进一步离散化，由此即可得到求问题(1)近似解的全离散格式。

在讨论微分方程问题之前，我们简单地介绍一下关于在 Ω 内光滑、在边界 $\partial\Omega$ 上为零的函数的逼近问题。为了具体起见，我们以平面凸域上分片线性函数去作逼近为例。

设 $\mathscr{T}_h$ 表示 Ω 的由互不相交三角形 τ 组成的三角剖分，其中任一三角形的顶点都不落在另外三角形的边的内部，并且所有三角形的并集所确定的多边形域 $\Omega_h\subset\Omega$，其边界顶点落在 $\partial\Omega$ 上（见图）。

设 h 表示剖分 $\mathscr{T}_h$ 中单元的最大边长。那么，h 是一个参数，它随着剖分的细密化而减小。我们将假定剖分中所



有的角有与 h 无关的下界，并且还常常假定剖分在下述意义下是拟一致的，即 $\mathscr{T}_h$ 中所有三角形的大小基本一致，这可以由要求 $\mathscr{T}_h$ 中的 τ 的面积有下界 Ch^2 来表达，其中 $C>0$ 与 h 无关。

现在用 S_h 表示在 Ω 的闭集 $\bar{\Omega}$ 上连续，在 $\mathscr{T}_h$ 中每个三角形内是线性的，并在 Ω_h 外为 0 的所有函数。设 $\{P_j\}_1^{N_h}$ 是 $\mathscr{T}_h$ 的内顶点，则 S_h 中的任一个函数由它在点 P_j 处的值唯一确定，且依赖于 N_h 个参数。令 φ_j 是 S_h 中在 P_j 点取值 1，而在其它顶点取值为 0 的"锥形函数"，则 $\{\varphi_j\}_1^{N_h}$ 形成 S_h 的一个基底，且 S_h 中每一个 χ 均可表成

$$\chi(x)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_j\varphi_j(x),\ \text{其中}\ \alpha_j=\chi(P_j).$$

对于给定的一个在 Ω 上光滑，而在 $\partial\Omega$ 上为 0 的函数 v，作为此函数的一个逼近，例如，可以取它在 S_h 中的插值 I_hv，I_hv 是通过要求它在内顶点上与 v 取值一致即 $I_hv(P_j)=v(P_j)$，$j=1,\cdots,N_h$，来确定的。我们需要关于这种插值的误差的一些结果。

以下，$\|\cdot\|$ 表示 Ω 上 L_2 模或平均平方模，$\|\cdot\|_r$ 表示

Sobolev 空间 $H^r(\Omega)=W_2^r(\Omega)$的模。这样，对于实值函数 v，

$$\|v\|=\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{1/2},$$

和对于正整数 r，

$$\|v\|_r=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant r}\|D^\alpha v\|^2\right)^{1/2},$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$，而$D^\alpha=(\partial/\partial\chi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial\chi_d)^{\alpha_d}$表示关于$x$的$|\alpha|=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i$阶任意导数.因此，上述和式包含$v$ 的所有阶数不超过 r 的导数，我们知道，对于 $H_0^1(\Omega)$中的函数v，即 v 和 $\nabla v=\mathrm{grad}v$ 属于$L_2(\Omega)$，并且在$\partial\Omega$上v取值为 0，$\|\nabla v\|$与$\|v\|_1$为等价模。

众所周知，对于刚才所定义的插值函数，如下之误差估计成立。即有

$$\|I_hv-v\|\leqslant Ch^2\|v\|_2,$$

和

$$\|\nabla I_hv-\nabla v\|\leqslant Ch\|v\|_2。$$

这里，正象我们以后总是这样认为的那样，不等式的陈述本身就假定了 v 足够的光滑，以使右端的模为有限。

现在来讨论 R^d 中更一般区域的情形。假设给定了$H_0^1(\Omega)$的一族有限维子空间 $\{S_h\}$，使对某一整数 $r\geqslant2$ 和充分小的 h，

$$(2)\quad \inf_{\chi\in S_h}\{\|v-\chi\|+h\|\nabla(v-\chi)\|\}\leqslant Ch^s\|v\|_s,$$

$$1\leqslant s\leqslant r,\quad v\in H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)。$$

前面那个分片线性函数的例子，相当于 $d=r=2$。对于一般情形象(2)这样的估计，常常可以利用 S_h 上的插值算子 I_h

(3) $\|I_h v - v\| + h\|\nabla(I_h v - v)\| \leqslant Ch^s\|v\|_s$,

$$1 \leqslant s \leqslant r,$$

来得到。对于$\partial\Omega$是曲线和$r>2$的情形，在边界附近存在困难，但上面的估计式，原则上可以通过映射曲边三角形为一个直边三角形（等参元）来证明。对此，我们不作详细的论述。

在假设(2)之下，逼近于函数和它的梯度的最佳逼近阶分别是$O(h^r)$和$O(h^{r-1})$。相应地对于热传导方程的解，下面我们试图得到上述逼近阶的近似解。

为了定义初边值问题(1)的最佳阶逼近解，首先把初边值问题写成弱形式：用在$\partial\Omega$上为0的光滑函数φ乘热传导方程，在Ω上积分，并对第二项应用Green公式，这样对所有如此之φ得到

$$(u_t, \varphi) + (\nabla u, \nabla\varphi) = (f, \varphi), \quad t \geqslant 0,$$

这里(v, w)表示$L_2(\Omega)$中的内积$\int_\Omega vw\,dx$。

然后可以设立这样的近似问题：对于每一个t，寻求$u_h(t) \in S_h$，使得

(4) $(u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla\chi) = (f, \chi)$,

对S_h中所有χ，$t \geqslant 0$，和初始条件

$$u_h(0) = v_h,$$

此处v_h是v在S_h中的某种近似。由于我们只对空间变量进行离散化，故所得问题叫做半离散问题。以后，为得到全离散格式，我们将把问题对时间变量进一步离散化。

用S_h的基底$\{\varphi_i\}_1^{N_h}$，半离散问题可叙述成：寻求表示式

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)\varphi_j(x)$$

中的系数$\alpha_j(t)$，使得

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha'_j(t)(\varphi_j,\varphi_k) + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k) = (f,\varphi_k),$$

$$k=1\cdots,N_h,$$

和

$$\alpha_j(0)=\gamma_j,\ \ j=1,\cdots,N_h,$$

其中 γ_j 为给定的初始近似 v_h 的分量。利用矩阵记号，这可以表示成

$$A\alpha'(t)+B\alpha(t)=\tilde{f},t\geqslant 0,\text{且}\ \alpha(0)=\gamma,$$

其中 $A=(a_{jk})$ 是以 $a_{jk}=(\varphi_j,\varphi_k)$为元素的质量矩阵，$B=(b_{jk})$是刚度矩阵，$b_{jk}=(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k)$，$\tilde{f}=(f_k)$是向量，$f_k=(f,\varphi_k)$，$\alpha(t)$是以 $\alpha_j(t)$为分量的未知向量，$\gamma=(\gamma_k)$。它们的维数都等于 S_h 的维数 N_h。

因为质量矩阵 A 是 Gram 矩阵，特别地，它是正定可逆的，上述常微分方程组可以写成

$$\alpha'(t)+A^{-1}B\alpha(t)=A^{-1}\tilde{f},\ t\geqslant 0,\ \alpha(0)=\gamma.$$

显然，对于正的 t，它有唯一解。

我们将证明半离散问题的解与连续问题解之间，有如下误差估计。

定理 1． 设 u_h 和 u 分别是（4）和（1）的解，则

$$\|u_h(t)-u(t)\|\leqslant\|v_h-v\|+Ch^r\left\{\|v\|_r+\int_0^t\|u_t\|_r ds\right\},t\geqslant 0.$$

当然，这里要求连续问题的解具有出现在右端的模所隐含的正则性，并且要求 v 在 $\partial\Omega$ 上为 0。再注意，如果（3）成立，且 $v_h=I_hv$，则右端第一项可用第二项控制。若 $v_h=P_0v$，这里 P_0v 是 v 到 S_h 上的 L_2—投影，则此论断仍然成立，因为这样选取的 v_h，是 v 在 S_h 中关于 L_2 模的最好的逼近。此种最佳阶逼近的 v_h 的另一种选择是将在下面定

义的投影。

为了证明定理 1，引进 S_h 上的所谓椭圆或 Ritz 投影 P_1，它是关于内积 $(\nabla v,\nabla w)$ 的正交投影，因此，

（5） $(\nabla P_1 u,\nabla\chi)=(\nabla u,\chi)$，$\chi\in S_h$.

实际上，$P_1 u$ 是相应的椭圆问题解 u 的有限元逼近。从已有的椭圆问题的误差分析中，我们引用如下的误差估计。

引理 1。对由（5）定义的 P_1，有

$$\|P_1 v-v\|+h\|\nabla(P_1 v-v)\|\leqslant Ch^s\|v\|_s,\quad 1\leqslant s\leqslant r,$$
$$v\in H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

证明。先估计梯度项，利用（5），有

$$\|\nabla(P_1 v-v)\|^2=(\nabla(P_1 v-v),\nabla(P_1 v-v))=$$
$$(\nabla(P_1 v-v),\nabla(\chi-v))\leqslant\|\nabla(P_1 v-v)\|\|\nabla(\chi-v)\|,$$
因此由（2），

$$\|\nabla(P_1 v-v)\|\leqslant\inf_{\chi\in S_h}\|\nabla(\chi-v)\|\leqslant Ch^{s-1}\|v\|_s.$$

对于 L_2 模估计，下面用对偶论证方法。设 φ 是 $L_2(\Omega)$ 中任意函数，取 $\psi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 为

$$-\Delta\psi=\varphi,\ 在\ \Omega\ 内，\ \psi=0,\ 在\ \partial\Omega\ 上，$$

的解。注意到先验不等式

$$\|\psi\|_2\leqslant C\|\Delta\psi\|=C\|\varphi\|,$$

则有

$$\begin{aligned}(P_1 v-v,\varphi)&=-(P_1 v-v,\Delta\psi)=(\nabla(P_1 v-v),\nabla\psi)\\&=(\nabla(P_1 v-v),\nabla(\psi-P_1\psi))\\&\leqslant\|\nabla(P_1 v-v)\|\|\nabla(\psi-P_1\psi)\|\\&\leqslant Ch^{s-1}\|v\|_s\cdot h\|\psi\|_2\leqslant Ch^s\|v\|_s\|\varphi\|,\end{aligned}$$

若选取 $\varphi=P_1 v-v$，即完成引理的证明。

现在来证明定理 1。主要的一步是比较半离散问题的解和精确解的椭圆投影。令

(6) $u_h-u=(u_h-P_1u)+(P_1u-u)=\theta+\rho$.

第二项由引理1容易估计，并有明显的估计式：

$$\|\rho(t)\|\leqslant Ch^r\|u(t)\|_r=Ch^r\left\|v+\int_0^t u_t ds\right\|_r$$

$$\leqslant Ch^r\left\{\|v\|_r+\int_0^t\|u_t\|_r ds\right\}.$$

为了估计θ，注意到

(7) $$(\theta_t,\chi)+(\nabla\theta,\nabla\chi)=(u_{h,t},\chi)+(\nabla u_h,\nabla\chi)$$
$$-(P_1u_t,\chi)-(\nabla P_1u,\nabla\chi)$$
$$=(f,\chi)-(P_1u_t,\chi)-(\nabla u,\nabla\chi)$$
$$=(u_t-P_1u_t,\chi),$$

或者

(8) $(\theta_t,\chi)+(\nabla\theta,\nabla\chi)=-(\rho_t,\chi),\chi\in S_h$.

上述推演中，我们利用了P_1的定义以及P_1与时间微分可交换这个不难确立的事实。由于θ属于S_h，在(8)中可以选取$\chi=\theta$，并得到

(9) $(\theta_t,\theta)+\|\nabla\theta\|^2=-(\rho_t,\theta)$.

由于第一项等于$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2$，而第二项是非负的，故得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2\leqslant\|\rho_t\|\|\theta\|.$$

于是有

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|\leqslant\|\rho_t\|,$$

积分以后，得到

$$\|\theta(t)\|\leqslant\|\theta(0)\|+\int_0^t\|\rho_t\|ds.$$

这里

$$\|\theta(0)\| = \|v_h - P_1 v\| \leqslant \|v_h - v\| + \|P_1 v - v\| \leqslant \|v_h - v\|$$
$$+ Ch^r \|v\|_r,$$
而
$$\|\rho_t\| = \|P_1 u_t - u_t\| \leqslant Ch^r \|u_t\|_r,$$
综合这些估计式，定理得证。

在上面的证明里，我们用到了（9）中 $\|\nabla\theta\|^2$ 是非负的事实。对于这一项作稍许细致地处理，可以证明：初值对误差的影响随 t 的增加按指数形式趋于0。实际上，若令 λ_1 为 $-\Delta$ 带有 Dirichlet 边界值的最小特征值，
则有
$$\|\nabla\chi\|^2 \geqslant \lambda_1 \|\chi\|^2, \quad \chi \in S_h.$$
从而由（9）推出
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \lambda_1 \|\theta\|^2 \leqslant \|\rho_t\| \|\theta\|,$$
或者
$$\frac{d}{dt}\|\theta\| + \lambda_1 \|\theta\| \leqslant \|\rho_t\|,$$
于是
$$\|\theta(t)\| \leqslant e^{\lambda_1 t}\|\theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|\rho_t(s)\| ds$$
$$\leqslant e^{\lambda_1 t}\|v_h - v\| + Ch^2\Big\{e^{-\lambda_1 t}\|v\|_2$$
$$+ \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|u_t(s)\|_2 ds\Big\}.$$
由于
$$\|\rho(t)\| \leqslant Ch^2 \|u(t)\|_2$$
我们结论
$$\|u_h(t) - u(t)\|$$

$$\leq e^{-\lambda_1 t}\|v_h - v\| + Ch^2\Big\{e^{-\lambda_1 t}\|v\|_2 + \|u(t)\|_2$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|u_t(s)\|_2 ds\Big\}.$$

我们将不去追求这种 t 充分大情形的分析。

下面，简单地来考察一下证明定理 1 的另一种途径，此途径是借助算子形式的 θ 方程。为此引进"离散 Laplace 算子 Δ_h，它被看作是由 S_h 到 S_h 的算子，并由下式所定义

$$(\Delta_h\psi,\chi) = -(\nabla\psi,\nabla\chi),\quad \psi,\chi\in S_h.$$

显然，用这个类似于 Green 公式的关系式可以完全确定 $\Delta_h\psi = \sum_{j=1}^{N_h} d_j\varphi_j$。这是由于 $\{d_j\}_1^{N_h}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{N_h} d_j(\varphi_j,\varphi_k) = -(\nabla\psi,\nabla\varphi_k),\quad k=1,\cdots,N_h,$$

以及这个方程组的系数矩阵是我们前边遇到的正定的质量矩阵。容易看出算子 Δ_h 是自共轭的，$-\Delta_h$ 是正定的。注意，Δ 同前面引用的其他算子具有如下关系

(10) $\quad \Delta_h P_1 = P_0\Delta.$

这是因为对于 $\chi\in S_h$，

$$(\Delta_h P_1 v,\chi) = -(\nabla P_1 v,\nabla\chi) = -(\nabla v,\nabla\chi)$$
$$= (\Delta v,\chi) = (P_0\Delta v,\chi).$$

现在，半离散方程可以写成：

$$(u_{h,t},\chi) - (\Delta_h u_h,\chi) = (P_0 f,\chi),\quad \chi\in S_h.$$

由于所有的左部内积因子都在 S_h 中，所以有

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = P_0 f.$$

利用(10)，关于 θ 可以得到

$$\theta_t - \Delta_h\theta = (u_{h,t} - \Delta_h u_h) - (P_1 u_t - \Delta_h P_1 u)$$
$$= P_0 f + (P_0 - P_1)u_t - P_0(u_t - \Delta u) = P_0(I - P_1)u_t$$