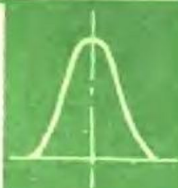


计量技术丛书

测量数据处理

陕西机械学院 李福利 编



30.15

机械工业出版社

内 容 简 介

本书是计量技术与管理专业自学与函授的大学专科教材。全书共分绪论、测量误差的基本性质、误差的合成、测量数据的处理和最小二乘原理及其应用等五章,系统地阐述了测量误差的基本概念和基本理论,讨论了各类误差的性质、传递规律以及测量数据的处理和精度评定的方法,通俗易懂。为便于初学者自学,书中还对概率与统计的基本概念作了简要介绍。

本书可供中等以上文化程度的从事计量测试与管理工作的工程师、管理干部、技术工人和计量行业中专以上学校的师生参考,也可供有关的实验技术人员、科研工作者参考。

计量技术丛书

(第四分册)

测量数据处理

陕西机械学院 李福利 编

责任编辑: 贡克勤

封面设计: 田淑文

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南里一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

通县曙光印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $10^{1/2}$ ·字数242千字

1988年6月北京第一版·1988年6月北京第一次印刷

印数 00,001—7000·定价: 3.80元

ISBN7-111-00561-9/TG·146

“计量技术”丛书编委会

主 编：柏永新

副主编：唐家驹 童 竞

编 委：（按姓氏笔划为序）：

冯炳华	任金铭	刘毓兰
许开君	许泽鹏	李 信
李大成	李斌之	李福利
陈素明	林霁栋	杨国珍
杨致忠	赵瑞生	赵念念
柏永新	高宗海	郭桂珊
夏道智	唐家驹	童 竞
傅庭和	穆志坚	

序 言

我国社会主义四个现代化建设事业的蓬勃发展,要求加快现代化计量科学技术的发展。同时,计量科学技术的进步又有力地促进我国各行业、企业进行的技术改造,使它们尽快地转到现代化技术和现代化管理的基础上来。因此,为了满足各行业、各部门对具有现代计量科学知识的人才的需要,加速人才培养,并提高现有企事业单位计量测试人员的技术水平,我们在陕西机械学院领导的鼓励和支持下,组织我院精密仪器工程系和自动控制系统具有丰富教学实践经验的二十名教师,并聘请了陕西省计量局具有丰富工作经验的工程师编写了这套“计量技术”丛书。考虑到计量科学是一门基础性的应用科学,涉及的专业学科有十大类一百四十多项,其内容十分丰富,丛书不可能面面俱到,全面论述。按多数计量测试工作的实际需要,我们编写的丛书比较全面地论述了计量测试中所遇到的机械学,光学,电学和误差理论与数据处理等方面的基础知识,并对长度、温度、力学、电磁和理化等五个方面计量的各种原理、方法和应用技术进行了系统地阐述。这套丛书共包括以下九个分册:

1. 计量机械基础(第一分册)
2. 计量光学基础(第二分册)
3. 计量电学基础(第三分册)
4. 测量数据处理(第四分册)
5. 长度计量技术(第五分册)
6. 温度计量技术(第六分册)
7. 力学计量技术(第七分册)
8. 电磁计量技术(第八分册)
9. 理化计量技术(第九分册)

这套丛书是针对具有中等以上文化程度的在职计量技术和管理人员而编写的,可作为他们的自学和函授教材或有关培训班教材,也可作为大专院校有关专业的教材或参考书。

由于我们水平有限,丛书可能存在不少缺点和错误,我们衷心欢迎广大读者批评指正。

“计量技术”丛书编委会

1987.7

前 言

误差理论与数据处理是计量科学和实验科学的主要基础理论之一，它几乎涉及所有的科学技术领域，是科学技术工作者，特别是计量测试行业的科学技术工作者必备的知识 和技能。当前，世界范围的技术革命和我国现代化建设的迅猛发展，促进了误差理论的进一步完善和数据处理技术的提高，同时也使普及和推广这方面的知识和技能成为极其紧迫的任务，因此近年来国内许多高等院校的有关专业都已把误差理论与数据处理作为一门独立的必修课程加以讲授。

为了满足计量测试技术工作者的需要，在计量技术丛书编委会的组织下，特编写了这本《测量数据处理》教材。考虑到广大自学者的实际情况和函授教育的特点，书中力求以中等文化水平为起点，尽量避免繁琐的数学推导，在内容的选取上注意突出重点和结合实际。为便于自学，在第二章中对概率与统计的基本概念单独作了介绍。这部分内容浅显易懂，对于已学者，仅是一次复习，对于初学的读者，也不难理解和掌握。此外，各章之后都附有一定数量的习题，便于读者练习，以加深对内容的理解。

本书由计量技术丛书编委会审查定稿。柏永新教授、唐家驹副教授对本书的编写提出不少宝贵意见，童竞副教授负责审阅了全部书稿，并作了许多具体的指导。在编写过程中，编者还得到天津大学陈林才教授的大力支持，编者在此一并表示谢意。

由于本人水平有限，加之时间仓促，书中定有不少错漏之处，诚恳希望读者予以指正。

编 者

1987年12月于陕西机械学院

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 误差的定义及表示法	1
一、误差的定义	1
二、误差的表示法	1
§ 1-2 误差的来源和分类	3
一、误差的来源	3
二、误差的分类	5
§ 1-3 测量的准确度	7
§ 1-4 不确定度	7
习题	8
第二章 误差的基本性质	9
§ 2-1 概率论与数理统计的基本概念	9
一、随机事件和概率	9
二、随机变量及其概率分布	13
三、随机变量的数字特征	20
四、大数定律和中心极限定理	22
五、样本及其分布	23
六、参数估计	26
§ 2-2 随机误差	30
一、正态分布	30
二、算术平均值	33
三、标准偏差	36
四、测量的极限误差	41
五、权与不等精密度测量	44
§ 2-3 系统误差	49
一、系统误差对测量结果的影响	49
二、系统误差的发现	50
三、系统误差的消除	56
§ 2-4 粗大误差	58
一、防止粗大误差的方法	58
二、判断粗大误差的准则	59
习题	68
第三章 误差的合成	70
§ 3-1 误差合成的基本概念	70
一、什么是误差合成	70
二、单项误差的确定方法	70

三、 误差传递的基本规律	71
§ 3-2 已定系统误差的合成	72
一、 直接测量中已定系统误差的合成	72
二、 间接测量中已定系统误差的合成	73
§ 3-3 随机误差的合成	76
一、 直接测量中随机误差的合成	76
二、 间接测量中随机误差的合成	84
§ 3-4 未定系统误差的合成	86
一、 直接测量中未定系统误差的合成	86
二、 间接测量中未定系统误差的合成	88
§ 3-5 综合误差	90
一、 直接测量结果的综合误差	90
二、 间接测量结果的综合误差	92
习题	94
第四章 测量数据处理	96
§ 4-1 直接测量的数据处理	96
一、 等精密度直接测量列的数据处理	96
二、 不等精密度直接测量列的数据处理	100
§ 4-2 间接测量的数据处理	102
一、 函数误差的分配	102
二、 最有利测量条件的确定	104
习题	111
第五章 最小二乘原理及其应用	112
§ 5-1 概述	112
§ 5-2 最小二乘原理	112
§ 5-3 等精密度测量线性参数最小二乘估计	114
一、 正规方程组	114
二、 精密度估计	117
§ 5-4 不等精密度测量线性参数最小二乘估计	122
一、 正规方程组	122
二、 精密度估计	123
§ 5-5 组合测量的数据处理	125
§ 5-6 一元线性回归	131
一、 概述	131
二、 回归直线的求取	132
三、 回归方程的检验	136
四、 回归直线的简便求法	145
五、 化曲线回归为直线回归的问题	147
习题	150
附表	152
参考文献	187

第一章 绪 论

在认识世界和改造世界的活动中，人类总是不断地对自然界中许许多多的量值进行测量和研究。由于测量设备、测量方法、环境条件以及人的认识能力等，都不能做到绝对完善，因而任何一个测量结果都要受到不同程度的歪曲，表现为测量结果与被测量的真值之间存在一定的差值，这个差值就是测量误差。

测量的实践表明，误差的存在具有普遍性和必然性。随着科学技术的发展和人们认识水平的提高，虽可将误差控制在愈来愈小的范围，但始终不能完全消除它。因此，有必要对误差的来源、性质和规律进行深入的研究，以便能及时发现误差的存在，采取减小误差的措施，正确处理数据，有效地提高测量精度，以及在最经济的条件下得到所需精度的测量结果。

§ 1-1 误差的定义及表示法

一、误差的定义

广义地说，误差是错误值与正确值之差。错误值含有误差，例如测量值、仪器的示值以及近似计算值等。正确值不含有误差，例如被测量的真值。

在测量中，测量值与真值之差，称为测量误差（简称误差），即

$$\text{测量误差} = \text{测量值} - \text{真值} \quad (1-1)$$

所谓真值，是指一个量在被测量时，其本身所具有的真实大小。真值并不是一个永恒不变的量值，它与该量被测量时所处的时间、地点、环境、状态等条件有关。例如，一根丝杠的真实长度，在不同的温度或不同的放置状态（水平或垂直）下有不同的值。重力加速度在地球不同纬度处有不同的值。为便于比较测量结果，需要规定某些标准测量条件，例如，在长度测量中，把20°C规定为标准温度。

真值不仅具有时间和空间的意义，而且是一个理想的概念。由于测量误差不可根除，所以除某些特定情况（如三角形三内角之和为180°，一整圆的圆心角为360°等称为理论真值）外，真值一般是无法得到的。因此实际测量中往往用约定真值来代替真值。约定真值通常是指相对高一级精度的测量结果，也称为实际值。例如，某普通电压表对某一直流电压的测量值为100.2V，若在此之前该电压已由精度更高的电压表测得为100.04V，则后者可视为该电压的约定真值，而此普通电压表的测量误差为0.016V。

测量误差的大小决定测量的精度，误差愈小，测量值愈接近真值，因而测量的精度愈高；误差愈大，测量值愈偏离真值，因而测量的精度愈低。

二、误差的表示法

为便于应用，测量误差有多种表示方法。

（一）绝对误差

以式（1-1）定义的误差叫做绝对误差。

绝对误差的特点是与测量值有相同的量纲,其值可以为正值,也可以为负值。当被测量大小相同时,常采用绝对误差来评定测量精度。

例1-1 用两种方法测量实际值为200g的标准砝码,测量值分别为199.96g和200.2g,试比较两种测量方法的精度。

解 该砝码的实际值即为约定真值,故两种测量方法的绝对误差为

$$\delta_1 = 199.96\text{g} - 200\text{g} = -0.04\text{g}$$

$$\delta_2 = 200.2\text{g} - 200\text{g} = 0.2\text{g}$$

因 $|\delta_1| < |\delta_2|$,故第一种方法的测量精度高。

(二) 相对误差

绝对误差与被测量的真值之比称为相对误差。因为真值不易获得,所以也常近似地表示为绝对误差与实际值(或测量值)之比,即

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{实际值(或测量值)}} \quad (1-2)$$

相对误差是无名数,没有量纲,常用百分数(%)表示,其值也可以为正值或负值。当被测量大小不同时,须采用相对误差来比较测量精度。

例1-2 用某一测量方法测量 $L_1=100\text{mm}$ 的尺寸,测量值为100.01mm,而用另一方法测量 $L_2=10\text{mm}$ 的尺寸,测量值为9.995mm。试问哪一种测量方法的精度高?

解 对于前一种测量方法,相对误差为

$$r_1 = \frac{\delta_1}{L_1} = \frac{100.01\text{mm} - 100\text{mm}}{100\text{mm}} = \frac{1}{10000} = 0.01\%$$

对于后一种测量方法,相对误差为

$$r_2 = \frac{\delta_2}{L_2} = \frac{9.995\text{mm} - 10\text{mm}}{10\text{mm}} = -\frac{5}{10000} = -0.05\%$$

显然 $|r_1| < |r_2|$,故前一种方法的测量精度高。

(三) 引用误差

引用误差是仪器仪表上某刻度点的示值误差与仪器仪表满量程值之比。

$$\text{引用误差} = \frac{\text{示值误差}}{\text{满量程值}} \quad (1-3)$$

这是一种简便实用的相对误差,常用在多档和连续分度的仪表中。通常以全部刻度点中引用误差最大的一个百分数的分子来命名仪器仪表的准确度等级。

比如,电工仪表规定七种准确度等级。

最大引用误差(≤)	0.1%	0.2%	0.5%	1.0%	1.5%	2.0%	2.5%
仪表准确度等级	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5

例1-3 检定某满量程值为100V的电压表,当表针指到50V时,实际输入的标准电压为51.3V,并且此刻度点的示值误差最大,试确定该电压表的准确度等级。

解
$$\text{最大引用误差} = \frac{\text{最大示值误差}}{\text{满量程值}} = \frac{50\text{V} - 51.3\text{V}}{100\text{V}} = -1.3\%$$

因 $1 < |-1.3| < 1.5$,故此电压表的准确度为1.5级。

§ 1-2 误差的来源和分类

一、误差的来源

产生误差的原因是多方面的,了解和掌握误差的来源,对减小和消除误差,以提高测量精度,或者进行误差的计算,以选择测量方法和评定测量精度,都有重要的意义。在分析误差来源时,尤其要注意对那些影响较大的误差因素做到不遗漏,不重复。

(一) 装置误差

测量装置是标准器具、仪器仪表及其附件(包括附属工具)的总称。因测量装置本身不完善和不稳定引起的测量误差称为装置误差。

1. 标准器具的误差

标准器具是指仪器本体以外的为测量提供标准量值的器具。例如标准量块、标准电阻、标准砝码等。

当标准器具按其标称值(名义值)使用时,标称值误差影响测量结果;按实际值(检定后的值)使用时,检定误差影响测量结果;标准器具的量值不稳定时,其量值的变化影响测量结果。

2. 仪器仪表误差

(1) 设计原理方面:采用近似的实际机构来代替理论上要求的机构;或者用等分度的刻度代替理论上要求的不等分度的刻度所引起的测量误差,称为原理误差。例如,采用正弦或正切机构设计的测微仪表盘按线性刻度和固体压力传感器按线性定标都会带来原理误差。

图1-1为采用正弦机构的测微仪结构原理图。当测头有位移量 S 时,借助于臂长为 a 、半径为 R_1 的杠杆齿轮带动半径为 R_2 的轴齿轮,再通过与该轴齿轮固连的半径为 R_3 的扇形齿轮带动半径为 R_4 的轴齿轮和固定在它上面长为 l 的指针一起迴转,由指针在表盘上指出相应的数值。

由图可知,测头位移量 S 与杠杆臂转角 φ 成正弦关系,而 φ 角又经机构放大为指针转角 α ,故 S 与指针末端理论位移量 $\overline{AB}$ 之间的传动关系是非线性的。因此从理论上说,表盘应做成非均匀刻度,但为了使表盘容易制造和便于读数,采用了均匀刻度,于是便产生了原理误差。可以证明,此项原理误差 ΔS 大小为

$$\Delta S = -\frac{1}{6}a\varphi^3$$

(2) 制造与安装方面:仪器仪表零部件的制造和安装不正确,例如仪器上的标尺刻划不准确,分划板安装偏心,导轨不直,螺旋副有空程,等臂天平两臂长不等,光学零件和电子元器件的参数不准或性能不好等,都会引起测量误差。

(3) 调整与使用方面:仪器仪表在使用前或使用过程中未调整到正确位置或状态,例如横纵向导轨不垂直,工作台不水平,零位没对准以及使用中的变形、配合件之间的间隙与摩擦的无规则变化、漂移现象等,也都会引起测量误差。

(4) 阿贝误差:如果要使量仪得出正确的测量结果,则必须将仪器的标尺安放在被测件测量线的延长线上,这个原则就叫做阿贝原则。违反阿贝原则所产生的误差叫做阿贝误差,阿贝误差是长度测量中的一项重要的重要的仪器误差。

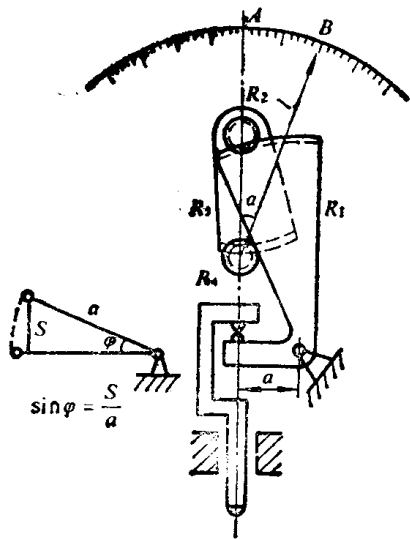


图 1-1

起的测量误差，称为方法误差。例如，用影像法测量螺纹牙型角时，得到的是法向牙型角，这与牙型角的定义不符；用接触法测量长度时，测量力造成被测表面的弹性压陷变形；以及被测对象的安装、定位和瞄准方式不正确等，所有这些因素引起的测量误差，都叫方法误差。

(三) 环境误差

因环境条件偏离测量所要求的标准条件而导致测量装置和被测量值的变化所引起的测量误差，称为环境误差。环境条件包括温度、湿度、气压、振动、照明、重力加速度、电磁场、空气含尘量等。

温度误差是长度测量中最重要的环境误差。测量规定标准温度为 20°C ，但实际上由于各种原因，被测件的温度和测量中与被测件相比较的标准件的温度都与标准温度有偏差，被测件与标准件因材料不同线膨胀系数也有差异，这些都要引起测量误差。当温度偏差（或实际温度）已知时，温度误差可按下述公式计算：

$$\begin{aligned}\Delta L &= L\alpha_p(t_p - 20^{\circ}\text{C}) - L\alpha_N(t_N - 20^{\circ}\text{C}) \\ &= L[(\alpha_p - \alpha_N)(t_p - 20^{\circ}\text{C}) + \alpha_N(t_p - t_N)]\end{aligned}\quad (1-4)$$

式中 L ——被测件的长度；

t_p 、 t_N ——被测件与标准件的实际温度；

α_p 、 α_N ——被测件与标准件的线膨胀系数。

使温度保持在某一数值，往往代价很高，有时也无此必要。因此常常是将温度控制在某一范围，此时则需要按下列公式计算相应的温度误差限：

$$\Delta L = L\sqrt{(\alpha_p - \alpha_N)^2(t_p - 20^{\circ}\text{C})^2 + \alpha_N^2(t_p - t_N)^2}\quad (1-5)$$

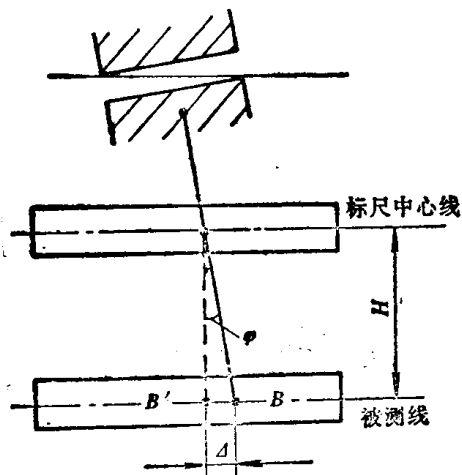


图 1-2

式中， t_p 、 t_N 皆取温度的极限值。

(四) 人员误差

测量人员因分辨能力所限，或因反应速度、固有习惯以及疲劳或一时疏忽等生理上和

当违反阿贝原则时，如图 1-2 所示，因导轨固有的间隙和直线度误差的影响，瞄准系统将产生转角 φ ，使得量 B 点时，在标尺上得到的读数实际上是 B 点左边相距为 Δ 的 B' 点的读数，由此产生的阿贝误差 $\Delta = H \tan \varphi \approx H \varphi$ ，属一次误差，故其大小是不可忽视的。

3. 附件误差

仪器仪表的各种附件及附属工具，例如长度测量中使用的心棒、测量刀、顶针架、调整环规；电学测量中使用的转换开关、电源和连接导线等也会引起测量误差。

(二) 方法误差

采用近似的或不合理的测量方法和计算方法而引起

心理上的原因造成的测量误差，称为人员误差。例如瞄准误差、读数误差以及因主观判断和疲劳引起的误读或误记产生的测量误差等，都属于人员误差。

二、误差的分类

测量误差以性质分，可分为随机误差、系统误差和粗大误差三类。

(一) 随机误差

在同一条件下重复测量同一量值的过程中，绝对值和符号以不可预知的方式变化的误差称为随机误差。其特点是，表面上单个误差值的出现纯属偶然，没有确定的规律，但是，进行足够多次的测量以后就可发现，误差在总体上却服从某种统计规律，每一个误差的出现都具有确定的概率。

随机误差是由许许多多尚未发现或尚无法控制的误差因素综合作用造成的，这些误差因素不是在测量前就已经固有的，而是在测量过程中随机出现的，其大小和方向各不相同，又都不很显著。例如仪器传动部件的间隙和构件间的摩擦不均匀，受力引起的弹性变形，电器系统的各种噪声和干扰，各种环境条件的随机波动以及测量者瞄准和读数不稳定等。

通过多次测量和对测量数据进行统计处理，可以减小随机误差的影响，但是不可能完全消除随机误差。

(二) 系统误差

在同一条件下重复测量同一量值的过程中，绝对值和符号固定不变，或按确定的规律变化的误差称为系统误差。

系统误差按其出现的特点和对测量结果的影响，可以分为定值系统误差和变值系统误差；按对其掌握的程度，可以分为已定系统误差和未定系统误差。

1. 定值系统误差与变值系统误差

定值系统误差——绝对值和符号固定不变的测量误差。如仪器的刻度不正确、零位不正确，标准器具的量值不正确，等臂天平的臂长不等，惠斯登单电桥相等两比例臂的比值不为1等，都会带来定值系统误差。定值系统误差对每个测量值的影响都是相同的。

变值系统误差——绝对值和符号按确定的规律变化的测量误差。此类误差对每个测量值的影响都是不同的，其变化规律大体上分为三种：

(1) 线性规律：误差的数值随某些因素变化按线性递增或递减（图1-3中直线 α ）。例如，当室温对标准温度的偏差保持一定时，由此偏差产生的测量误差将随被测尺寸的增加而线性递增，即为测量值的线性函数；检定量块的平面平行性时，也会产生随温度变化而递增或递减的测量误差。

(2) 周期性规律：误差的数值随某些因素的变化作周期性变化（图1-3中曲线 b ）。例如，角度盘安装偏心引起的角度测量误差和千分表表盘安装偏心引起的尺寸测量误差，都是随被测量（角度或尺寸）值的变化呈正弦规律变化的系统误差。

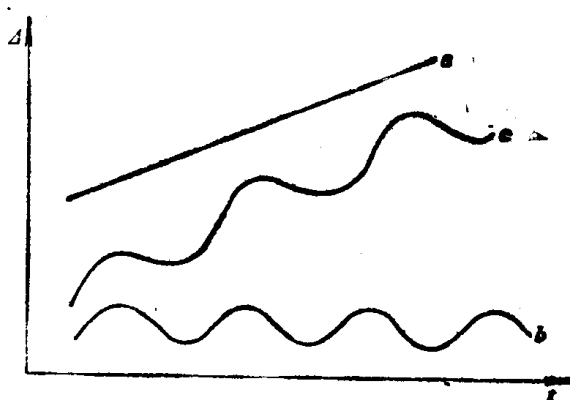


图 1-3

(3) 复杂规律：误差值的变化规律比较复杂（图1-3中曲线c）。例如，用相对法测量丝杠螺旋线时，标准丝杠的螺旋线误差所引起的测量误差就是一种按复杂规律变化的系统误差。

2. 已定系统误差与未定系统误差

已定系统误差——绝对值和符号均已确知的系统误差。例如，用三针法测量螺纹中径时，螺距偏差 Δt 引起的中径测量误差 Δ 可由下式确定：

$$\Delta = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Delta t$$

式中 α ——螺纹牙型角标称值。

此误差值一经计算得到，即成为已定系统误差。无论定值系统误差还是变值系统误差，数值一经确定，都可转化成已定系统误差。

未定系统误差——绝对值和符号均未确知，但可估计出其极限范围的系统误差。

例如，未经检定而按标称值使用的量块所引起的系统误差，性质虽属定值系统误差，但由于量块的实际尺寸未知，其误差的数值只能按加工时同批量块尺寸偏差的极限范围来估算。同样，当测量只要求温度控制在某一范围时，在该范围内任一温度时的系统误差也只需根据温度变化的范围按式（1-5）估算出其极限范围。由此可知，一块中心长度制造公差为 $\pm 0.5\mu\text{m}$ 的量块按标称值使用时，它带来的未定系统误差可按 $\pm 0.5\mu\text{m}$ 的极限范围估算。

系统误差产生的原因，仍可从误差来源的四个方面去分析。误差因素通常在测量之前已存在，所以任何系统误差都有确定的规律，因而不遵从统计规律，不能通过多次测量来减小其影响，这是系统误差的重要特征。

在各类系统误差中，只有已定系统误差能够修正。所谓修正，就是在测量值上减去该误差值或者加上一个修正值。即

$$\text{真值} = \text{测量值} - \text{误差值}$$

或

$$\text{真值} = \text{测量值} + \text{修正值}$$

显然，修正值应与该误差大小相等符号相反。但是，由于修正值也含有误差，所以修正后仅能得到较测量值正确些的结果。

(三) 粗大误差

在规定的条件下出现的超常误差称为粗大误差。这种误差由某些意外因素，例如测量者一时粗心或疲劳，在测量、记录时对错标志，读错、记错数据，或者在测量进行中受到环境条件突变的影响和使用有严重缺陷的仪器所造成。含有粗大误差的测量值会明显地歪曲测量结果，因此也叫做坏值或异常值，必须设法从测量数据中发现并加以剔除。

应该指出，上述三类误差（尤其是随机误差与系统误差）的划分并非是绝对的，它们一定的条件下可以相互转化。例如，量块的尺寸偏差是加工量块时的随机误差，如果某量块按标称尺寸使用，则尺寸偏差就转化成了测量的系统误差。又如，角度盘的分度误差是度盘刻划时的随机误差，它的任何一个位置都会给角度测量带来一个定值系统误差。若用度盘的各个不同位置测量某角度，则各测量值中的系统误差将有大有小，时正时负，即系统误差又被随机化了。利用误差可以转化的特点，将系统误差转化为随机误差，采用多次测量的办法抵消部分系统误差的影响；或将随机误差转化为系统误差，采用修正的方法消除其影响，是提高测量精度的有效措施之一。

§ 1-3 测量的准确度

测量结果与被测量（约定）真值间的符合程度称为测量的准确度。准确度反映了系统误差与随机误差的综合影响，因此通常包含以下两种分量：

精密度——反映随机误差影响的程度。

正确度——反映系统误差影响的程度。

这两种分量之间没有必然的联系，一个好另一个未必也好，只有两者都好，准确度才高。这可以用打靶时弹着点的分布（图1-4）来比喻。图中

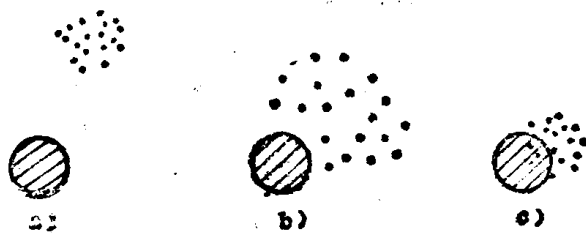


图 1-4

a) 弹着点较密集，但其分布中心距离靶心较远，反映射击中的随机误差小而系统误差大，即精密度高而正确度低。

b) 弹着点较分散，但分布中心距离靶心较近，反映射击中的随机误差大而系统误差小，即精密度低而正确度高。

c) 弹着点最密集，且分布中心距离靶心最近，反映射击中的随机误差与系统误差均小，即准确度高。

测量值的分布与弹着点的分布相类似，只有分散性小，同时平均来说与（约定）真值的偏离程度也小，测量的准确度才高。准确度既包含测量值之间的接近程度，又包含测量值对真值的接近程度。通常所谓的测量精度，习惯上泛指误差而言，与误差的大小相对应，因此也应包括精密度与正确度两个方面。

§ 1-4 不确定度

由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度称为不确定度。不确定度表征真值所在的某个测量范围，该范围取决于测量误差的大小，所以不确定度用规定的误差限来表示。

不确定度一般包含多个分量，这些分量可按下述方法分类：

1. 按误差的性质分

随机不确定度——随机误差的绝对值上界。

系统不确定度——系统误差的绝对值上界。

2. 按误差估算的方法分

A类——经多次重复测量用统计的方法估算出来的分量。

B类——用非统计方法（例如凭经验或其它信息）估计出来的分量。

虽然A类分量在多数情况下无疑对应于随机误差，B类分量中也有不少对应于系统误差，但A类分量与随机误差，B类分量与系统误差之间并不存在一种简单的对应。A类B类的划分方法避免了从性质上划分误差的困难，以及由这种划分引起的使用上的混乱，因而更具有实用性，特别有利于一般工程部门的应用，因为这些部门无必要，也不便仔细区分误差的性质。

目前国际上正在推广使用上述不确定度的第二种分类方法。在我国,为兼顾对误差的深入研究和一般应用的不同需要,国家计量总局的常用名词术语定义中,除划分A、B两类外,仍然保留随机误差和系统误差、随机不确定度和系统不确定度的划分,因此,适应性会更加广泛。

习 题

1. 什么叫测量误差?为什么说一切测量结果都必然含有误差?
2. 测量误差有几种常见的表示方法?它们各用于何种场合?
3. 测量误差分哪几类?它们各有何特点?
4. 什么叫真值?什么叫修正值?含有何种误差的测量值需要修正?修正后能否得到真值?
5. 举例说明如何利用系统误差与随机误差的转化来减小测量误差。
6. 已知某匀速直线运动物体的速度 $v = 0.5 \text{ m/s}$, 经过的时间 $t = 3 \text{ s}$ 。若测定该时间 t 时的误差 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 问间接测量路程 S 的相对误差为多少?
7. 检定0.2级、满刻度值为10A的电流表, 在3A刻度处的示值误差为 -15 mA , 并且比其它刻度处的示值误差都大, 问该电流表是否合格?

第二章 误差的基本性质

误差存在于每一个测量过程之中，不同程度地影响着测量结果。因此有必要进一步认识各种误差的性质、规律及其特点，掌握消除或减小误差的方法，为提高测量的准确度，提可靠的科学的方法。

§ 2-1 概率论与数理统计的基本概念

概率论与数理统计是研究误差（尤其是随机误差）的性质和规律，正确进行数据处理的主要数学工具。因此，首先在这一节里对概率与统计的有关概念作一些基本的介绍。

一、随机事件和概率

（一）随机事件

概率论的研究对象是客观世界中大量存在的随机（偶然）现象。这类现象具有多种可能发生的结果，但究竟发生哪一种结果，事先无法确定。比如，从放有红、白、黑三个球的盒子里任意抽取一球，得到的可能是红球，也可能是黑球或白球，究竟得到哪一种球，抽取之前是不能确定的。再以测量为例，由同一个测量者用同一台仪器测量同一个量，各次测量结果是不尽相同的，无论测量条件控制得怎样好，测量者怎样细心，每次测量前都无法预知该次测量值的确切大小。这一类现象又称为不确定性现象。

在概率论中，把通过随机试验所观察到的每一个可能的结果叫做随机事件，简称为事件，通常用大写字母 A 、 B 、 C ……表示。

例2-1 在五个同类零件中有三个正品，两个次品。若从这五个零件中任意抽取三个，其结果事先是无法确定的。那么

$A =$ “三个都是正品”

$B =$ “至少一个是次品”

均为随机事件。

在研究随机事件时，有时会遇到两种特殊的情况。比如，在例2-1的随机试验中，“至少一个是正品”和“三个都是次品”这两个事件，前者是一定要发生的，后者是不可能发生的。这种在每次试验中必定发生的事件称为必然事件，记作 Ω ；在每次试验中必定不发生的事件称为不可能事件，记作 Φ 。为讨论问题方便起见，一般也把这两种事件当作随机事件。

随机事件的出现带有偶然性，单独来看似乎无规律可循，但从大量的观测结果中却可以发现隐含着的规律性。例如，对某零件尺寸进行多次重复测量并对测量值进行统计就可以发现，得到其中的某一个测量值完全是偶然的，但若将测量值以等间距分组，并按每组相应的出现次数绘成直方图，就会得到类似于图2-1所示的分布情况。从图中可看到，大多数测量值分布在某一常值 a 附近，与 a 偏离越大的测量值出现的次数越少。如果测量次数增多，同时把组距分得更细，就可以把直方图各矩形顶部中点光滑地联接起来，形成一条单峰形状的曲线（图2-2）。

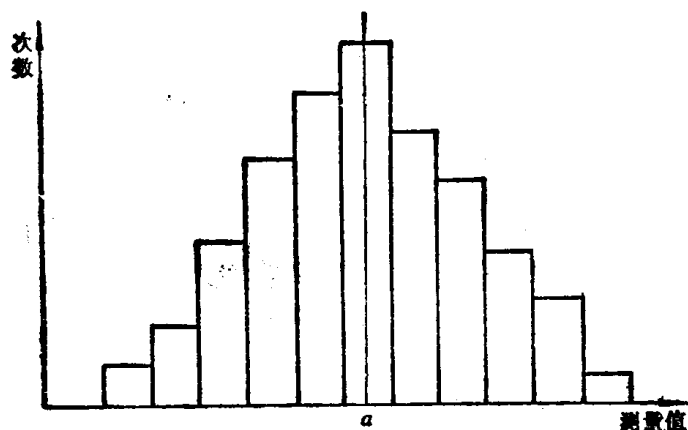


图 2-1

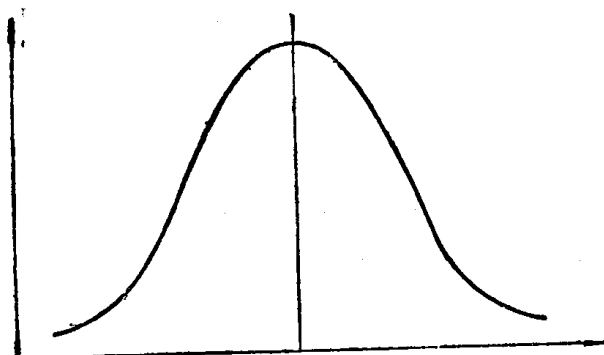


图 2-2

上述例子说明,大量的观察可以发现支配随机事件的某种规律性的东西。统计的特点就在于作大量观察,所以,凡通过大量观察概括得到的规律性,就称为统计规律性。随机事件正是这种在个别的试验中表现出不确定性,而在大量试验中又服从统计规律的事件。

(二) 概率

在概率论中,随机事件出现的“可能性大小”用“概率”这个数值来表达。概率的客观存在是统计规律性的最本质的表现。下面通过实例给出概率的定义。

例2-2 从某工厂生产的一批产品中,抽取不同数量的产品进行检验。抽检记录如下

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8
抽 取 件 数 (n)	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合 格 品 数 (m)	5	7	53	131	548	800	1091	1631
合 格 频 率 ($\frac{m}{n}$)	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

若把“出现合格品”作为事件 A ,则八次抽检中每次抽检的合格品数,即事件 A 出现的次数 m 称为事件 A 的频数;频数 m 与总试验次数 n 的比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率。可以看到,当抽取的件数(试验次数)增加时,频率 $\frac{m}{n}$ 逐渐稳定在常数0.9左右。

一般地说,当试验次数 n 增大时,如果事件 A 的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 q 附近摆动,并且越来越接近该常数,则称 A 为随机事件,数值 q 为随机事件 A 的概率。记为

$$P(A) = q$$

这种用频率的稳定值给概率所下的定义,叫做概率的统计定义。

在某些简单的情况下,无须做大量试验,即可直接计算出事件 A 的概率。

例2-3 在100个产品中有85个优质品,问从中任取一件得到优质品的可能性有多大?

显然,在这100个产品中任取一件,每一件产品被抽到的可能性都一样,即都为 $1/100$,