小学数学竞赛题赏析百例

XIAOXUE SHUXUE JINGSAITI SHANGXI BAILI

叶天碧　编著

浙江少年儿童出版社

小学数学竞赛题
赏析百例

叶天碧　编著

浙江少年儿童出版社

责任编辑　饶虹飞
封面设计　商　凝

图书在版编目(CIP)数据

小学数学竞赛题赏析百例/叶天碧编著．—杭州：浙江少年儿童出版社，1999.1(1999.11重印)
ISBN 7-5342-1911-6

Ⅰ．小…　Ⅱ．叶…　Ⅲ．数学-竞赛题-解题-小学
Ⅳ．G624.505

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第22825号

小学数学竞赛题赏析百例

叶天碧　编著

浙江少年儿童出版社出版发行
(杭州市体育场路347号)
杭新印务有限公司印刷　全国各地新华书店经销
开本787×1092　1/32　印张5.625　字数100000
印数21471—26505
1999年1月第1版　1999年11月第4次印刷

ISBN 7-5342-1911-6/G·986　定　价：5.60元

写在前面

数学竞赛是一种高水平的智力竞赛，最显著的效果是发展个性、培养能力、发现人才、培养人才。数学竞赛看上去好像只是解几道题而已，但如果没有完整的数学知识，没有熟练的解题能力，没有正确的逻辑思维，没有经过刻苦的数学训练，要取得好成绩是完全不可能的。尤其是一种新背景下给出的新型题，就更需要深思熟虑，仔细分析。这样的题能解出来，在一定程度上就是一种创见，一种发明。数学竞赛往往是要解决一些非常规的、从未碰到过的问题，解决这些问题无常规可循，无模式可套，需要通过自己去摸索，去提出假设，通过观察思考去发现规律，从而有利于观察能力、直觉思维能力、分析问题能力的提高，有利于创造力的培养。

华罗庚金杯少年数学邀请赛（以下简称“华杯赛”）是全国规模最大、水平最高的小学数学竞赛。自 1986 年举办第一届起至今已举办了六届，每届都吸引了数百万的小学生。“学习华老，勇攀高峰”已成为小学生中广大数学爱好者奋斗的目标。其试题具有以下三个特点：1. 不超纲。全部试题的解答方法均不超出小学六年级教学大纲的要求。2. 高水平。含有若干新颖不落俗套的试题，以考查和区分选手们灵活思考问题的能力和掌握知识的熟练程度。3. 趣味性强。能让学生增强

学习数学的兴趣和信心，并能用所学的数学知识解决现实生活中的实际问题。通过剖析这些试题的结构、内容、解题方法，你会感到回味无穷。对于参赛时被卡住解不出的题目，通过剖析，你便会恍然大悟，感到它奥妙无穷。如果你还未接触过这些试题，读了本书后你会感慨万千，不过小学程度就有那么多深奥的学问和值得深思的问题。其中有些试题已经成了经典。

著名科学家钱伟长非常注重数学训练。他指出，数学训练是一切训练的基础，因为它是训练逻辑思维能力的。又指出，数学训练最关键的是逻辑思维训练，且逻辑思维的训练一定要严格。数学训练在学校可以利用课外活动，采用兴趣小组的形式或选修的形式，或在老师的指导下，有系列地开展专题讲座的形式进行；同时在校外利用课余时间，阅读一些参考书，尤其是具有高水平的典型例题的剖析，从中汲取精髓和丰富的营养，不断增长知识和才干。

当你拿到一道数学竞赛题时，首先是读题，把题读通；然后是理解，搞清条件和问题；接着是分析，找到一条解题思路；再就是解题，选择一种合理的解题方法；之后是检验，确定解答的正确与否；最后是作答，写出正确的、完整的答案。同时，对自己解题的过程作出评价，看是否选择了最佳方法，还有无其他解法。在上述几个环节中，分析是关键。也就是说，解题最关键的是能找到一条解题思路。这不光是靠数学知识就能解决的，还需要数学思想方法的灵活运用以及一定的数学思维能力。

作为欣赏，它必须是好的，而且是有价值的。比如一首好歌，它首先必须是悦耳动听的，并且这首歌的内容是有价值的。如唱出了英雄本色，唱出了幸福生活，唱出了人生追求，唱

出了美好愿望。其次，从艺术角度讲，这首歌的节奏、旋律、声调、结构都有独到之处。在歌的群体中，这首歌是佼佼者，也只有这样的歌才有欣赏价值。其他诸如一盆花、一首诗、一个剧本、一件艺术品等同样都有它的欣赏价值问题。对于数学竞赛试题的欣赏，从内容上看，这类试题的语言精练、结构紧凑、叙述清楚、题意明确，具有典型性、独特性和新颖性。从数学能力要求看，它具有较高的要求，特别在运算能力、空间想像能力、逻辑思维能力、分析问题和解决问题能力上有较高的要求。用这类试题来作为数学训练，对学生是很有帮助的。本书就是通过对“华杯赛”六届试题中最典型的试题加以欣赏和分析，旨在培养广大学生的数学思维方法，提高分析问题的能力，为学好数学和其他学科打下扎实的基础。愿广大读者喜爱这本书。

编者

目　　录

一、运算问题

小学数学里的运算是指加、减、乘、除及其混合运算。按照运算法则，一个算式若没有括号，应先算乘、除，后算加、减；若有括号，则应先算小括号，后算中括号，再算大括号。运算的数一般是整数、小数和分数。运算时要按照运算法则进行，有的可借助运算的定律和性质，如交换律、结合律和分配律，使运算更加合理、简便，从而达到迅速、正确解题的目的。

例 1 1966，1976，1986，1996，2006 这 5 个数的和是多少？〔第一届(1986 年)，初赛第 1 题〕

分析 这题很容易，但要在 30 秒钟内完成却不简单。一种算法是硬加，只要细心点是不会错的；若巧妙一点，可以用到高斯算法：

$$1+2+3+\cdots+100=\frac{(1+100)\times100}{2},$$

计算起来就简单一些。

解 $1966+1976+1986+1996+2006$

$$=\frac{(1966+2006)\times5}{2}=9930$$

但是，能否再简单一些呢？由于这 5 个数的中间一个数 1986 恰好是这 5 个数的平均数。所以，求这 5 个数的和，只要计算 $1986\times5=9930$ 即可。

是否这类题都可以这样计算呢？答案是肯定的。如求 43257，43274，43291，43308，43325 这 5 个数的和。由于这 5

个数中，从第 2 个数起，每一个数都比前一个数大 17，因此 43291 一定是这 5 个数的平均数，那么这 5 个数的和即为 $43291\times5=216455$。

如果有 6 个这样的数相加呢？如求 1966，1976，1986，1996，2006，2016 这 6 个数的和。这样中间就不是一个数，而是两个数。怎么办？只要求中间两个数的平均数即可。即计算 $(1986+1996)\div2=1991$，则其和为 $1991\times6=11946$。而事实上，中间两数的和与首尾两数的和相等，即 $1966+2016=1976+2006=1986+1996=3982$。所以，偶数个这样的数相加时，只要将首尾两数的平均数乘以个数即可。

综上所述，归纳一下可得出如下结论：有几个数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$。从第 2 个数起，每一个数都比前面一个数大（或小）同一个数，那么这几个数的和

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{(a_1+a_n)n}{2},(n=2k,k=1,2,\cdots)\\ na_k,(n=2k-1,k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

你能理解上面这个结论吗？对下列三题用这个结论做做看（括号内为参考答案）。

（1）求 16，29，42，55，68，81，94，107，120 这 9 个数的和；(612)

（2）求 498，517，536，555，574，593 这 6 个数的和；(3273)

（3）求 135，145，155，165，185，195，205，215，225 这 9 个数的和。(1625)

例 2 请将下面算式的计算结果写成带分数：$\dfrac{0.5\times236\times59}{119}$。〔第四届（1993 年），初赛第 1 题〕

分析　这道题并不难，但是要在30秒钟内完成的确不容易。是否有什么简便方法？注意观察分子 $0.5\times236=118$，这很接近分母119，于是可得出如下解法：

解　原式 $=\dfrac{118\times59}{119}=\dfrac{(119-1)\times59}{119}$

$=\dfrac{119\times59}{119}-\dfrac{59}{119}=59-\dfrac{59}{119}$

$=58\dfrac{60}{119}$

试计算：$\dfrac{0.3\times123\times47}{37}$，并把结果化成带分数。$\left(46\dfrac{323}{370}\right)$

例3　计算：$\left(\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{63}\right)\times2\dfrac{1}{7}$。〔第三届(1991年)，初赛第2题〕

分析　这也是一道简单的分数运算题。由于初赛题要求在30秒钟内算出正确答案，所以没有正确的、简捷的方法是很困难的。一种方法是先求出小括号内各个分数的分母30，35，63的最小公倍数，即 $2\times3\times3\times5\times7=630$，然后通分，得：

原式 $=\left(\dfrac{21}{630}+\dfrac{18}{630}+\dfrac{10}{630}\right)\times\dfrac{15}{7}$

$=\dfrac{49}{630}\times\dfrac{15}{7}=\dfrac{1}{6}$

解这道题如果用分配律是否可简便一点？

原式 $=\left(\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{63}\right)\times\dfrac{15}{7}$

$=\dfrac{1}{14}+\dfrac{3}{49}+\dfrac{5}{147}$

$=\dfrac{21+18+10}{294}$

$=\dfrac{49}{294}=\dfrac{1}{6}$

我们可以看到，本例运用分配律运算却并不简便。这说明运算定律和性质的运用一定要恰到好处，而不要乱用。倒不如看一下下列解法，对你将会有所帮助。

解 原式$=\left(\frac{1}{2\times3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{3\times3\times7}\right)\times\frac{15}{7}$

$$=\frac{21+18+10}{2\times3\times3\times5\times7}\times\frac{15}{7}$$

$$=\frac{49}{2\times3\times7\times7}=\frac{1}{6}$$

从中你能领悟到什么吗？做该题不需要急于把公分母的最小公倍数算出来，而是边算边约分，这样运算会简单一些。

例 4 计算：$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$。〔第三届(1991 年)，决赛第一试第 1 题〕

分析 先观察一下算式的特征。分子都是 1，而分母的排列有何规律？$3=1\times3$，$15=3\times5$，$35=5\times7$，$63=7\times9$，$99=9\times11$，而且相乘的每两个因数的差都等于 2。这就要联想到下列等式：

$\frac{1}{3}=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$；　　$\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$；

$\frac{1}{35}=\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$；　　$\frac{1}{63}=\frac{1}{7\times9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$；

$\frac{1}{99}=\frac{1}{9\times11}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$。

这样便可得到下列解法：

解 原式$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}$$

从本例可以归纳出下列结论：对于自然数 $n(n>0)$，则有

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$；

$\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$；……；

$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$。

根据上述结论，试计算下列各题：

（1） $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$；$\left(\frac{5}{6}\right)$

（2） $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\frac{1}{208}$；$\left(\frac{5}{16}\right)$

（3） $\frac{4}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{35}+\frac{4}{63}+\frac{4}{99}$；$\left(1\frac{9}{11}\right)$

（4） $\frac{7}{10}+\frac{7}{40}+\frac{7}{88}+\frac{7}{154}+\frac{7}{238}$。$\left(1\frac{1}{34}\right)$

例 5 计算：$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{9}\right)$。〔第六届（1997 年），复赛第 1 题〕

分析 先观察一下本例有几个因数相乘。因为有省略号，所以看上去似乎有很多个因数，其实总共只不过 9 个因数。其次，分析这些因数有何关系，试算一下就可发现下列等式：

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=1$；$\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=1$；

$\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)=1$；$\left(1+\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=1$。

最后只剩下$\left(1+\frac{1}{10}\right)$这一个因数了。因此，解法就很清楚了。

解 原式$=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\frac{9}{8}\times\frac{11}{10}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}$

$=\frac{11}{10}=1\frac{1}{10}$

试计算：$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{5}\right)\times\left(1+\frac{1}{7}\right)\times\left(1+\frac{1}{9}\right)\times\left(1+\frac{1}{11}\right)$。$\left(\frac{6}{11}\right)$

例 6 计算：$1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$。〔第四届(1993年)，复赛第5题〕

分析 先观察分析，发现这一串加数的规律性很明显，整数部分1,3,5,…,17的特征与例1相似；分数部分$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，…，$\frac{1}{90}$的特征与例4相似。所以，可以根据例1、例4的方法综合解答本题。

解 原式$=(1+3+5+\cdots+17)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{90}\right)$

$=9\times9+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right]$

$=81+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=81\frac{2}{5}$

例 7 计算：$\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\times 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4.375\right)\div 19\frac{8}{9}}$。〔第三届(1991 年)，复赛第 1 题〕

分析 本例的繁分式给出了加、减、乘、除的混合运算，其中分母中夹杂了小数。这种题要算得又对又快，怎么办？

(1) 在乘、除运算中，要将带分数化为假分数，并及时约分；

(2) 在加、减运算中，如果分数、小数同时出现，要么统一都化为分数，要么统一都化为小数；

(3) 熟悉下列分数与小数的互化，在具体计算时，可以节省时间。

$\frac{1}{2}=0.5$； $\frac{1}{4}=0.25$； $\frac{3}{4}=0.75$；

$\frac{1}{8}=0.125$； $\frac{3}{8}=0.375$； $\frac{5}{8}=0.625$； $\frac{7}{8}=0.875$。

解 原式$=\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{2}{3}\times\frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12}+\frac{35}{8}\right)\times\frac{9}{179}}$

$$=\frac{\frac{21}{8}-\frac{11}{7}}{\frac{179}{24}\times\frac{9}{179}}$$

$$=\left(\frac{21}{8}-\frac{11}{7}\right)\times\frac{8}{3}$$

$$=7-4\frac{4}{21}=2\frac{17}{21}$$

例 8 计算：$\dfrac{0.00325\div 0.013}{(0.22-0.2065)\div(3.6\times 0.015)}$。〔第六届

(1997 年),初赛第 2 题〕

分析 本题出现的数都是小数,而且相当的小,如果把小数化成分数来做显然比较麻烦;而它又是初赛题,必须在 30 秒钟内解决,怎么办?

(1) 把小数化成整数来做,分子 $0.00325\div0.013=325\div1300=0.25$;

(2) 利用除法运算性质 $a\div(b\times c)=a\div b\div c$,这样分母 $(0.22-0.2065)\div(3.6\times0.015)=0.0135\div3.6\div0.015=135\div150\div3.6=0.9\div3.6=0.25$。

(3) 也可以把除法换成乘法,通过约分来计算。

解 原式$=\dfrac{0.00325\times(3.6\times0.015)}{0.0135\times0.013}$

$$=\frac{3.25\times36\times15}{135\times13}=1$$

试计算下列两题:

(1) $\dfrac{\left(0.125+\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{13}{87}}{12.1\div3\dfrac{2}{3}}$;$\left(\dfrac{13}{396}\right)$

(2) $\dfrac{(2.1-1.965)\div(1.2\times0.045)}{0.00675\div0.027}$。(10)

例 9 计算:$\dfrac{\dfrac{7}{18}\times4\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}}{13\dfrac{1}{3}-3\dfrac{3}{4}\div\dfrac{5}{16}}\times2\dfrac{7}{8}$。〔第一届(1986 年),决赛第一试第 1 题〕

分析 这道题除了繁分式外还多乘了一个带分数,所以除繁分式这部分主体要认真计算外,还有一个带分数不可漏乘。计算时把带分数化成假分数是常用的方法,注意不要

化错。

解 原式$=\dfrac{\dfrac{7}{18}\times\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{6}}{\dfrac{40}{3}-\dfrac{15}{4}\times\dfrac{16}{5}}\times\dfrac{23}{8}$

$=\dfrac{\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{6}}{\dfrac{40}{3}-12}\times\dfrac{23}{8}$

$=\dfrac{23}{12}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{23}{8}=\dfrac{529}{128}$

这里要注意两点:(1) 计算一个繁分式到最后并不是都可约分,甚至约至一个整数。不可约的时候,绝对不能约。(2) 计算的结果是否正确,很大程度上要取决于读者的心理因素和良好的计算习惯。

例 10 计算:$\dfrac{\left(4\dfrac{2}{3}+0.75\right)\times 3\dfrac{9}{13}}{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right)\div 5\dfrac{8}{15}}\div 34\dfrac{2}{7}$。〔第五届(1995年),初赛第 4 题〕

分析 这道题作为初赛题要在 30 秒内完成,要求显然较高。这类题(例 9)在第一届时是作为决赛题,到了第五届则成为初赛题,这说明对计算能力方面的要求在不断提高。其计算方法和例 9 相同。这说明含有分数、小数的四则运算,始终是小学数学的基础知识,每位读者都要熟练掌握。

解 原式$=\dfrac{\left(\dfrac{14}{3}+\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{48}{13}}{\left(4\dfrac{49}{45}-4\dfrac{1}{6}\right)\div\dfrac{83}{15}}\div 34\dfrac{2}{7}$

$$=\frac{\frac{65}{12}\times\frac{48}{13}}{\frac{83}{90}\times\frac{15}{83}}\times\frac{7}{240}$$

$$=20\times6\times\frac{7}{240}=3\frac{1}{2}$$

试计算下列两题：

(1) $\dfrac{2\frac{12}{47}-1\frac{41}{53}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div11\frac{3}{4}}\times1\frac{13}{40}$；(9)

(2) $2\frac{1}{4}\div\dfrac{3\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}-1\frac{2}{3}}{2.75\div\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)}$。$\left(5\frac{1}{16}\right)$

例 11 计算：$(1995.5-1993.5)\div1998\times1999\frac{1997}{1998}\div\frac{1}{1999}$（得数保留三位小数）。〔第六届(1997 年)，复赛第 3 题〕

分析 这是一道近似计算题，由于要求得数保留三位小数，所以要把整数部分尽可能的分离出来。当分子、分母比较接近时，先分离出 1，如 $1999\frac{1997}{1998}=1999+1-\frac{1}{1998}=2000-\frac{1}{1998}$，$\frac{1999}{1998}=1+\frac{1}{1998}$；然后来处理小数部分就比较容易。

解 原式$=2\times\frac{1999}{1998}\times\left(1999+1-\frac{1}{1998}\right)$

$$=2\times\left(1+\frac{1}{1998}\right)\times\left(2000-\frac{1}{1998}\right)$$

$$=2\times\left(2000+\frac{2000}{1998}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1998\times1998}\right)$$