

BUZHIDAO DE SHIJIE

# 不知道的 世界

数 学 篇

李毓佩 著

策划、主编 陈海燕

责任编辑 吕卫丽

美术编辑 毕树校

封面设计 田家雨 吴湘仁

版式设计 朱 虹

插 图 阎 萍

电脑制作 红 雨

中国少年儿童出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

不知道的世界:数学篇/李毓佩著. —北京:中国少年儿童出版社,1998

ISBN 7-5007-4091-3/G · 2858

I. 不… II. 李… III. ①科学知识-少年读物②数学-少年读物 IV. N49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第07687号

## 不知道的世界

· 数学篇 ·

李毓佩 著

\*

中国少年儿童出版社出版发行

社址:北京东四12条21号 邮编:100708

河北新华印刷二厂印刷 新华书店经销

\*

850×1168 1/32 4.75印张

1998年8月河北第1版 1999年4月河北第3次印刷

本次印数:21000册 定价:11.00元

ISBN7-5007-4091-3/G · 2858

凡有印装问题,可向本社发行二科调换





## 主 编 的 话

我们对所接触的世界似乎已经熟识,人类有理由为几千年积累的丰富知识而自豪。然而,知识像一个不断膨胀的圆圈,圈外即是浩瀚无边的未知世界。随着知识魔圈的扩大,它与未知世界的接触面也日益增大。于是,在知识爆炸的时代,人类反倒觉得不知道的东西越来越多。这正是人类探索与创造的源源不绝的催动力。

众多的科普读物,力求展现已知世界,而我们现在做的正好相反。这是一套未知世界的小百科,它选取了一系列科学谜案,反映了人们在探疑解谜中作出的努力和遭遇的障碍,介绍了各种有代表性的假说、猜想和目前已达到的研究水平,提供了攻难闯关的相关知识背景,并指示了可能的途径。总之,它要把读者带进一个陌生神秘、异彩纷呈、激动人心的未知世界,激发人的探索欲和创造欲,同时使人获得相关知识和科学思想。

这是一套由科学家和科普作家们写给青少年的书,易读、易懂而又叫人着迷。让我们畅想:未来有一位中国科学家,因为破答了中外未解的科学悬谜而功著世界。今天,他(她)还只是个风华少年,正坐在小小的书桌前,如痴如醉地捧读着《不知道的世界》……

陈海燕

1998年5月18日





## 在知识的长河中注入一点水

记得两年前的某一天，中少社的几位朋友来找我闲聊，说起他们正在策划一部丛书，叫做《十万个不知道》。一听这题目，我说：“这个主意好。老跟孩子讲是这样的，那是那样的，日子久了，孩子们可能会感到乏味的。也得跟孩子讲讲，世界上还有许多不知道的事儿，比已经知道的多得多，而且有趣得多。如果能潜移默化，让孩子们的心里萌发一株不断求知的苗苗，这部丛书就算成功了。”

没想到经过两年的努力，他们已经编成了十本；一个星期前，把最先印得的两本样书给我送来了。丛书改了名称，改成了《不知道的世界》。我看改得好。原来用《十万个不知道》，是受到了《十万个为什么》的启发，从编辑的意图来说，两者是相辅相成的；要是不改，倒像唱对台戏了；我赞成改。这两本样书，一本讲植物，一本讲物理；每本二十几篇，一篇一个主题，推想其他八本也是这个格局。看内容和行文，这部丛书是为初中生和小学生编写的，每一本讲一个方面。以读者已有的知识为基础，讲这一方面最近有了什么新成就，正在研究哪些新课题，将来可能朝哪个方向发展：就这样，把读者领进一个不知道的世界。这个世界无边无垠，多少原先不知道的，现在知道了，却又引发更多的不知道来。从每一个不知道到知道，都没有现成的道路，道路需要





人们去探索。在探索中，有的人走通了，有的人碰了壁，也有殊途而同归的，都到达了目的地。在我看到的两本样书中，这样有趣的故事一个接着一个，到了儿也没有说完；留下一大堆不知道，让读者自己去思索。

我看照着这个格局编下去，这部丛书会得到成功的。现在的十本，只开了个头。老话说：头开得好就是成功的一半；应该一鼓作气，一本又一本继续往下编：把不知道的世界中的奥秘，一一展现在读者面前，让他们自己挑选将来从哪一个不知道入手，为我们亲爱的祖国做出贡献，在人类知识的长河中，注入一点水。

叶至善

1998年5月19日





# 目 录

|              |    |
|--------------|----|
| ◆ 令人迷惑的古埃及分数 | 1  |
| ◆ 简单却解决不了    | 7  |
| ◆ 寻找相亲数      | 14 |
| ◆ 有奇完全数吗     | 20 |
| ◆ 质数和人捉迷藏    | 25 |
| ◆ 孪生质数有无穷多对吗 | 33 |
| ◆ 两个有关质数的猜想  | 37 |
| ◆ 会隐身的回文数    | 41 |
| ◆ 数字“冰雹”     | 47 |
| ◆ 平方数之谜      | 53 |
| ◆ 哥德巴赫猜想     | 60 |
| ◆ 从生兔子问题说起   | 66 |





|                |     |
|----------------|-----|
| ◆ 普林斯顿 322 号   | 73  |
| ◆ 巴比伦人的 60 进位制 | 81  |
| ◆ 由地图着色引出的问题   | 85  |
| ◆ 不尽的圆周率       | 93  |
| ◆ 生锈圆规的诱惑      | 101 |
| ◆ 古堡朝圣问题       | 108 |
| ◆ 由阅兵式引出的难题    | 114 |
| ◆ 扑朔迷离的幻方      | 123 |
| ◆ 从台风眼到不动点     | 138 |

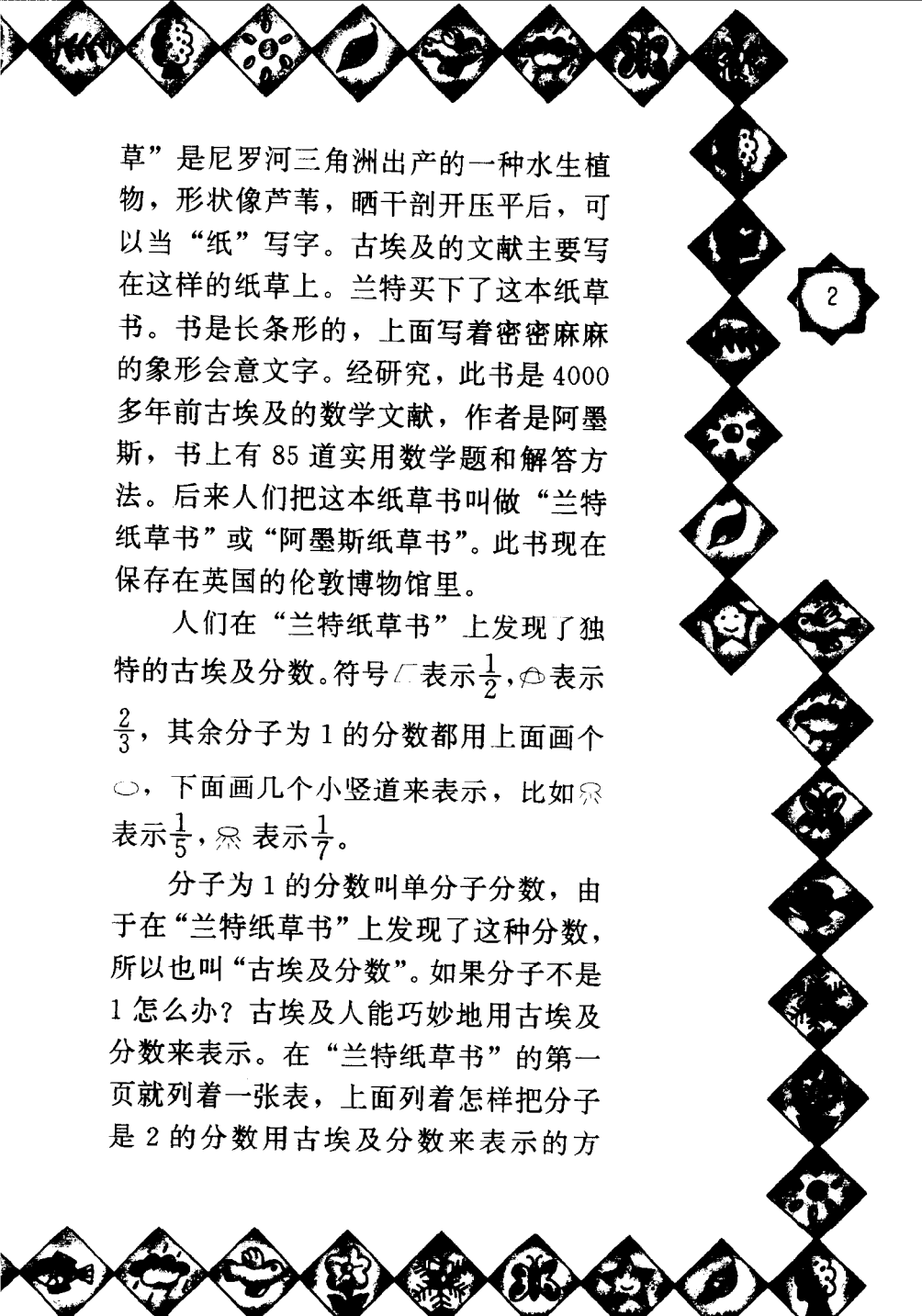




## 令人迷惑的古埃及分数

你认识  $\angle$ ,  $\odot$ ,  $\text{⦿}$  这些古怪的符号吗？这不是小孩子画的儿童画，而是4000多年前古埃及人写的分数。经数学家考证，这里面有不少学问，也存在着不少疑团需要人们去揭示。事情是这样的：

1858年的一天，苏格兰考古学家兰特在埃及的卢克索古玩市场上闲逛时，一本用纸草做成的书吸引了他。“纸



草”是尼罗河三角洲出产的一种水生植物，形状像芦苇，晒干剖开压平后，可以当“纸”写字。古埃及的文献主要写在这样的纸草上。兰特买下了这本纸草书。书是长条形的，上面写着密密麻麻的象形会意文字。经研究，此书是4000多年前古埃及的数学文献，作者是阿墨斯，书上有85道实用数学题和解答方法。后来人们把这本纸草书叫做“兰特纸草书”或“阿墨斯纸草书”。此书现在保存在英国的伦敦博物馆里。

人们在“兰特纸草书”上发现了独特的古埃及分数。符号 $\square$ 表示 $\frac{1}{2}$ ， $\bigcirc$ 表示 $\frac{2}{3}$ ，其余分子为1的分数都用上面画个 $\bigcirc$ ，下面画几个小竖道来表示，比如 $\bigcirc$ 表示 $\frac{1}{5}$ ， $\bigcirc$ 表示 $\frac{1}{7}$ 。

分子为1的分数叫单分子分数，由于在“兰特纸草书”上发现了这种分数，所以也叫“古埃及分数”。如果分子不是1怎么办？古埃及人能巧妙地用古埃及分数来表示。在“兰特纸草书”的第一页就列着一张表，上面列着怎样把分子是2的分数用古埃及分数来表示的方

法, 比如:  $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ,  $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ ,  $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$ ,  $\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{214} + \frac{1}{448} + \frac{1}{610}$ ,  $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$  等等, 一直到  $\frac{2}{101}$ 。

古埃及人为什么如此“偏爱”单分子分数呢? 这个问题至今仍是一个未解之谜。有人从实用上来解释这个问题: 比如  $\frac{7}{8}$  用单分子分数表示就是  $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ , 可以比作 7 个面包 8 个人来平均分配, 不但每个人分得的数量一样多, 连所分得的块数也一样多。可以这样来分: 先把其中的 4 个面包每个切成 2 份, 再





把2个面包每个切成4份，最后一个面包切成8份，每人拿大、中、小各1份就可以了。

但是这种解释有些牵强。古埃及人不会因为分面包分得均匀，而创造出这么复杂的古埃及分数的。况且，单是把分子不是1的分数，用单分子分数来表示也不是一件容易的事。

那么古埃及人有没有一套系统地展开古埃及分数的方法呢？现代数学家认为可能没有。因为在他们的有些展开式中，古埃及分数的个数不是最少的。数学家发现，同一个分数用古埃及分数来表示，表达的方式并不是惟一的。比如， $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ，因为 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ ，所以 $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ ；又因为 $\frac{1}{42} = \frac{1}{43} + \frac{1}{1806}$ ，所以 $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1806}$ 。沿用这种方法，展式的项数可以无限增加。

数学上把项数最少的展式叫最优展式。“兰特纸草书”上的展式有许多不是最优的，说明古埃及人对用古埃及分数来表示分数还没有形成一整套的方法。

在研究古埃及分数的基础上，近代



数学家又提出了一个问题：能不能把一个真分数表示成项数最少、不重复的古埃及分数？他们首先想到把最简单的 1 表示成古埃及分数。

直到 1976 年，数学家才发现把 1 表示为分母都是奇数、而项数又最少的古埃及分数的办法，一共有 5 种表示法，每一种表示法都有 9 项：

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231};$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{135} + \frac{1}{10395};$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{165} + \frac{1}{693};$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{231} + \frac{1}{315};$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{33} + \frac{1}{45} + \frac{1}{385}.$$

这 5 种表示方法中前 6 项都相同。

古埃及人在 4000 多年前就发明并

使用了单分子分数，可以肯定地说是他们需要这种分数。在 4000 多年前还谈不上数学研究，数学都是应实际需要而产生，在实际应用中得到发展的。古埃及人为什么要创造出这么复杂的单分子分数呢？他们的目的究竟何在？

在“兰特纸草书”的第一页就列举了把分子是 2 的分数化成单分子分数的表，他们当时究竟是怎样展开的？用的是什麼方法？

如果这些问题能够弄清楚，对了解古代人类如何对待分数、使用分数，都是十分重要的。但是这些问题至今还是—些悬案。





## 简单却解决不了

谜一样的古埃及分数给人类留下许多问题,其中有一个问题看上去很简单,但数学家们却解决不了。这是一个什么样的问题呢?这要从问题的起源说起。

前面已经讲了古埃及人偏爱单分子分数(也称单分数)。现代数学家找不出他们偏爱的原因,就把兴趣转移到研究单分数上。他们研究了这样一个问题:一个单分数能不能化为两个单分数之和?

这个问题好像小学生都会。比如  $\frac{1}{3}$   
 $=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ , 如果再认真想一  
下的话, 还可以得到一个简单的公式:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)} \quad (1)$$

随便给定一个单分数, 都可以用公式  
(1) 化成两个单分数之和。比如  $\frac{1}{15}$ , 这  
里  $n=15$ , 而  $n+1=16$ ,  $n(n+1)=15 \times$   
 $16=240$ , 使用公式(1)可得:

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$$

这样就把  $\frac{1}{15}$  化成两个单分数之和了。

数学家对公式(1)不满意, 原因是它  
只能得到一种化法, 而不能得到全部的  
化法。 $\frac{1}{15}$ 除了可以化成  $\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$ 外, 还可  
以写成以下 3 种形式:  $\frac{1}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90}$ ,

$\frac{1}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$ ,  $\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$ 。数学家希望  
能找到一个把所有化法都包括的公式。

数学家对公式(1)进行了改进: 任  
何一个单分数, 把它化为两个不同的单  
分数  $\frac{1}{x}$  和  $\frac{1}{y}$  之和, 只要取  $x=n+d$ ,  $y=$   
 $n+\frac{n^2}{d}$ , 其中  $d$  是  $n^2$  的任一个正约数, 可

得到如下公式：

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n+d} + \frac{d}{n(n+d)} \quad (2)$$

为了方便，一般只取  $x < y$ ，即  $d < n$  的解。

比较公式 (1) 和公式 (2)，容易发现，公式 (2) 是把公式 (1) 中的某些 1 换成了  $d$ 。为了保证  $y$  是正整数， $d$  必须能整除  $n^2$ ，因此要规定  $d$  是  $n^2$  的任意一个正约数。 $n^2$  的正约数可以不止一个，比如  $n=15$  时， $n^2=15^2$ ，小于 15 的  $15^2$  的正约数有 1, 3, 5, 9。此时可以算出相应的  $x=n+d$  有  $15+1=16$ ,  $15+3=18$ ,  $15+5=20$ ,  $15+9=24$ ；相应的  $y=n+\frac{n^2}{d}$  有  $15+\frac{15^2}{1}=240$ ,  $15+\frac{15^2}{3}=90$ ,  $15+\frac{15^2}{5}=60$ ,  $15+\frac{15^2}{9}=40$ 。这样可以得到把  $\frac{1}{15}$  写成两个单分数之和的所有可能的形式，它们是：

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{240} = \frac{1}{18} + \frac{1}{90} = \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{1}{24} + \frac{1}{40}$$

从公式 (1) 只能得到一个，到公式 (2) 可以得到所有表达式，这当然是很大的进步。

上面是把一个单分数分解成两个单



分数之和。现在把问题再变得难一点：如果给你的一个真分数 $\frac{m}{n}$  ( $n > m$ )，又如何把它分解成两个单分数之和呢？

比如 $\frac{2}{3}$ 是一个真分数，如何把它化成两个单分数之和？一共有几种化法？这个问题利用公式 (2) 就可以解决。

设 $\frac{2}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ，则 $\frac{1}{3} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}$ ，为了简单可设 $x < y$ 。根据公式 (2)，应该有

$$2x = 3 + d \quad 2y = 3 + \frac{3^2}{d}$$

其中 $d < 3$ ，是 $3^2$ 的正约数，因此 $d = 1$ 。

这时可以得到 $x$ 和 $y$ ：