最佳控制的数学方法及其应用

钟瑚绵 编

江苏科学技术出版社

最佳控制的
数学方法及其应用

钟 珊 绰 编

江苏科学技术出版社

1982.6.

卄 　 㕚 　 表

最佳控制的

数学方法及其应用

钟瑚绵编

出版：江苏科学技术出版社
发行：江 苏 省 新 华 书 店
印刷：南 京 人 民 印 刷 厂

开本787×1092毫米 1/32 印张 12 字数 260,000
1982年8月第1版 1982年8月 第1次印刷
印数1—3,700册

书号：15196·082 定价：1.17元

责任编辑 沈绍绪

内 容 简 介

本书系统介绍最佳控制的数学理论、方法和实际应用．共分七章：前四章讲确定性系统的最佳控制，内容包括动态规划、最大原理、直接计算等方法以及应用实例；后三章讲离散随机系统的最佳控制，内容有卡尔曼滤波方法、线性——二次系统的最佳控制等．所介绍的方法都有详细的数学推导，并附有应用例子和习题，书末有矩阵运算基础的附录，以供参考．

本书可作为自动控制、空间技术、系统工程、化工、冶金、经济管理以及理工科各有关专业高年级学生、研究生的教学用书，也可供上述有关专业的科技工作者参考．

序

近二十年来，由于宇宙航行、火箭制导等空间技术的飞速发展，以及工程控制、工业生产中一系列最佳化问题的出现，对被控制系统实现最佳控制的要求日渐迫切．而数学上动态规划、最大原理、卡尔曼滤波等新概念和方法的创立，使解决最佳控制问题有了必需的数学工具．加之高速电子计算机迅速发展，使具体计算并在系统运行过程中进行在线最佳控制成为可能．因此，最近十多年中，最佳控制作为现代系统控制中的一个重要内容，日益受到重视，并在自控、遥控、空间技术、系统工程、经济管理、工业生产等方面，有了越来越广泛的应用．

为了适应我国四化建设的需要，本书介绍最佳控制中一些最基本的概念、数学方法及应用，详细讨论了确定性系统和随机性系统两大类的最佳控制问题，并阐明了动态规划、最大原理和卡尔曼滤波等方法．对所述方法都作了详细的数学推导，从分析问题着手，逐步引入需要的概念和数学工具，最后推出所要的结论．为了便于应用，每一个重要结论都归纳为定理的形式，写明条件和结果．书中配备了适当的例题和习题，以便复习、巩固．有些专业的同志在初读本书时，对部分较难或较繁的数学论证，可以暂时跳过，而着重于概念和方法的掌握以及对例题的理解．

本书在1974年编写的讲义基础上，吸收各方面意见，结合教学实践中的体会，于1976年作了较大的修改和补充．最近，

又根据修改后的讲义在教学中的使用情况，参考了国内外近年出版的一些文献，内容上再次作了修改和增删，更加突出了最佳控制中的几个基本问题。

笔者虽然主观上尽量想把本书写好，但因水平有限，经验不足，错误或欠妥之处在所难免。然而考虑到最佳控制的著作虽国外已有不少，但国内正式出版的尚不多见，为此抱着抛砖引玉和为四化多作贡献的愿望，写成此书，尚希读者多加指正。

书稿完成后，承胡宣达同志仔细审阅并提出宝贵意见，作者深表感谢。

钟珊绵

1982年1月

于南京大学数学系

绪　论

对一个系统进行控制，就是想通过一定的手段使系统按照指定的方式运行，从而达到预期的目的.在长期工程实践的基础上，古典的自动调节理论在对线性伺服系统的控制方面已发展得十分成熟.在这个理论中，用传递函数的方法对由常系数线性微分方程所描述的系统(线性定常系统)的自动控制问题，作了大量细致的分析，这种方法叫做频率域的方法.在古典的控制理论中，主要研究了系统的反馈控制，把系统的输出和给定的目标值相比较，根据比较结果而作出控制动作，以消除偏差，使系统被控制在给定值附近.然而，五十年代以来在工程控制中出现的大量问题，尤其是空间技术迅速发展而提出的一系列新的控制问题，不仅要求被控制系统完成指定的动作，而且要求在使某种指标达到"最佳"的前提下完成.控制过程不是单纯地接近给定值，而是要寻求最佳目标值，即控制目的是要求系统实现最佳化.例如，向月球发射火箭，不但要求能准确到达，而且还可以要求控制在一条飞行时间最短的轨道上，或者要求在一条消耗燃料最省的轨道上.所谓"时间最短"或"燃料最省"，就是对系统进行控制时提出的实现准则，这个准则以函数或泛函的形式给出，亦称目标泛函.当然，也有要求实现准则达到最大值的，例如，要求生产过程的利润最高或其中某项产品的产量最多等.这样，对一个被控的物理系统及由于工程技术或生产实践的要求而提出的实现准则，寻求系统在满足一定条件下使实现准则达到最佳化(最大或

最小)的控制方案，就是最佳控制研究的课题．这种新发展起来的最佳控制理论就成为现代控制理论的一个重要组成部分．

对一个受控的物理系统，为了能准确地进行在某项准则下的最佳控制，首先要对系统本身必须满足的一些约束条件和欲实现的某项最佳化准则予以准确、清晰的数学描述，即建立数学模型，才能运用各方面的数学工具．在古典控制理论中，描述系统变化时，关心的是系统的输入和输出关系，这是对系统外部描述的一种方法，它以传递函数为工具，所以处理的是线性定常系统(非时变系统)．两个内部结构不同的系统，如有同一个传递函数，则对于相同的输入有相同的输出，纵然两系统内部变化有很大差异，但其外部表现完全一致．由于这种描述的方法不涉及系统的内部联系，所以对系统内部结构及其变化规律难以揭示．现代控制理论引入状态变量的概念来描述系统，把描述系统运动所需的最少的一组参数作为系统的状态变量，这组变量所在的空间称为状态空间，而状态变量和输入、输出二组变量间的关系构成了系统的状态方程和输出方程(或量测方程)，以这些方程来描述所研究的系统就能显示出系统的内部结构．同时，系统的实现准则在数学上也可以明确地表示为输入和状态的函数的形式．问题就是决定一组输入，称之为控制变量，使之作用于系统之后其实现准则达到最佳值．一般，系统的状态是随着时间而变化的，所以状态变量是时间的函数，时间是最基本的变量，因而一般所考虑的受控物理系统都是一个动态系统．在现代控制理论中，藉助于状态变量的概念而发展起来研究系统控制问题的方法，亦称为时间域的方法．

由古典控制理论的频率域方法发展到时间域的方法，不

仅对系统的描述能深入到内部关系，从而对系统的结构有更深的刻划，而且现代控制理论使用了更多更现代化的数学工具，所以处理的对象不限于线性的非时变系统，而且可以是非线性且系数依赖于时间的时变系统，也不限于单变量的输入、输出，而可以是多变量的系统.至于要实现的最佳化指标，更可随着问题的不同要求而有十分广泛的提法，这些都是用频率域的方法难以应付的.

虽然时间域的方法较频率域方法有不少优越性，但后者经过了长期的工程实践，理论成熟，有些方法亦简便易行，因而在它能解决的范围内仍不容忽视，有些场合两法混合使用，更能收取长补短之效.

解最佳控制问题的数学方法主要有两种，一种是“动态规划”的方法，这是美国数学家贝尔曼（R.Bellman）最初为了解决多步决策问题而于五十年代中期提出的，尔后发现在求系统的最佳控制时有广泛的应用.通过动态规划里的最优原则，可以找到目标泛函的最佳值所满足的一组递推的函数方程（在时间离散的情形）或一个偏微分方程（在时间连续的情形），解这些方程便能得到最佳控制的目标泛函的最佳值，这是一个具有较大普遍性的方法.另一种方法是在五十年代末由苏联数学家庞特里雅金（Л. С. Понтрягин）建立的“最大原理”，这个方法处理问题的范围虽不及动态规划普遍，但它有更严格的数学理论为基础和有较具体可行的解法，因而在有些问题中更便于应用.再由于由最大原理推出的是常微分方程组，因而便于上计算机进行计算.上述两种方法都是寻求最佳控制的有力工具，从它们发表那天起，就受到学术界的极大重视.高速电子计算机的发展，使得由动态规划或最大原理推出的方程式能得到满意的数值解，从而使得生产过程或

系统运行过程的在线控制成为切实可行.所以自六十年代起，最佳控制的理论、方法得到较快的发展，充分显示了它在控制理论中的重要地位.

经过多年的科学研究和生产实践，最佳控制的适用范畴已远远超出了一般理解的工程技术的范围，而深入到了工业设计、生产管理、经济计划等部门.在这些部门中，凡是作为一个多步决策过程的最佳化问题，往往都能转化成用离散型动态规划或最大原理来解.例如，一批原料进入车间，要经过若干道工序加工，如何安排各工序的生产，使某一目标值最优（如生产周期最短，能源消耗最省，其中某些产品产量最多或利润最高等等）.在生产线的设计中，各项设备的能力应达到什么要求才能使某些目标值（如投资最省、生产能力最大等）实现最佳化.还有，企业的资金分配、长期生产计划的制订等都可能化为一个多步决策的问题.从而使最佳控制的方法有用武之地.

一个系统在实际运行中，除接受控制机构给予的控制信号外，往往还受到外界的随机干扰，亦称为噪声.因此除了人为的控制信号输入外，还有噪声输入.没有噪声干扰的系统只是简化了的理想系统，这种有随机噪声干扰的系统就称为随机系统.例如化工厂的大型设备暴露在室外，直接受到气温变化的影响，经常改变着系统运行时的客观条件，影响操作温度的控制；飞机水平飞行时，受风力的影响对规定航向会产生偏航；至于无线电通讯系统，随着周围自然条件变化而受干扰就更是常事了，这些都是无法避免的随机干扰.随机系统输出信号的本身亦包含了随机干扰在内，系统的确切状态一般而言是无法得知的.因此，为了掌握系统内部的状态特性，必须根据系统的输出（即量测值），对系统的状态进行估计，由于输出

的量测值中既包含状态的信息，又混有随机干扰，所以对状态的估计就是在量测值中排除干扰信号，尽可能恢复状态的真实面目，此即所谓滤波问题．滤波问题是根据到现时刻为止所获得的量测值，对状态作不同的估计：有估计未来某时刻的状态——称为预测，估计现时刻的状态——称为滤波，估计过去某时刻的状态——称为平滑．六十年代，卡尔曼(R.Kalman)创建了一套计算滤波问题的递推算法，藉助电子计算机，基于获得的量测值，可以很快地作出对状态最佳线性估计．他的算法不要求计算机存贮大量数据，也不要求进行越到后面越繁的计算，所以满足了滤波的实时性的要求．这种比较简单易行的算法问世后，立即受到有关科技工作者的重视，而成为一个日趋活跃的分支．

对随机系统的状态作最佳估计的目的之一，是为了对系统进行最佳控制．一个没有随机噪声干扰的系统(称为确定性系统)，将其最佳控制的控制变量表示为状态的函数抑或仅表示为时间 t 的函数，就最佳控制的实现而言没有本质的差别．前者的控制变量表示出对系统实行反馈控制，或称闭环控制的形式；后者则是开环控制．然而在随机系统中，由于随机干扰的存在，开环控制一般达不到最佳控制的要求，因而必须采用反馈，但系统状态是无法确知的，所以对状态作估计就成为必须的了．对于正态输入的线性——二次随机系统，最佳控制问题已完全解决(这是已解决的最重要而又较简单的一种)，控制步骤就是先求出系统状态的卡尔曼滤波估计，然后作出滤波值的线性反馈，这就是著名的分离定理．

上面概述了最佳控制理论产生的背景、发展过程和一些主要内容．这些内容是最佳控制这门学科的基本组成部分．本书将在此范围内对其基本概念、主要数学方法和具体应用加

以详细论证和推导。

第一章是基础性的，由系统的状态和状态空间概念出发，详细叙述最佳控制问题的各种提法和数学模型，首先建立最佳控制的基本思想，然后叙述在随机最佳控制中有着本质差别的开环控制和闭环控制两种不同的控制方式，并详细论述了将连续时间系统离散化的方法，将连续型的微分方程离散化为差分方程，以便电子计算机进行递推计算。最后讨论了现代控制理论中两个至关紧要的基础理论问题——确定性系统的可观测性和可控制性。

一个系统在$[t_0, t_1]$这段时间内的输出，如能用来唯一地确定在开始时刻t_0的状态，这就表明输出值能反映系统内在的运动规律，怎样的系统，要量测那些输出值才能满足要求，这就是系统的可观测性问题。了解了系统的状态，能否找到适当的控制，把系统转变到另一事先给定的状态，这就是系统的可控制性问题。后面讨论最佳控制时都是对可观测、可控制系统而言的。

第二章详细论述了动态规划的方法，由最优原则推导出最佳控制问题的函数方程，进而求出最佳控制，各个公式和结论都有详尽的数学推导，为了能使用计算机，离散系统在本章特别地又作了较多的讨论。本章讨论了确定性系统的最佳控制和对线性——二次问题分别就离散和连续型二种情况，详细推导出最佳的线性反馈控制，这里使用的最优原则在解决随机系统最佳控制问题时，仍然起着关键性的作用。最后又列举了较多的应用例子，使读者从中可以看出动态规划应用的广泛性和方法的灵活性。

第三章详细介绍了最大原理，并加强庞特里雅金给出的最大原理的前提条件，从而简化了证明的过程。从严格性看似

有不足，但从对最大原理本身的理解和应用来看，却是突出了重点．由于对边界条件的推导是详细的，因而对边界条件的运用更易理解．本章仍是讨论确定性系统，对离散型的最大原理作较详细的讨论，以便具体应用．通过计算和应用实例，容易看出，用最大原理解最佳控制问题虽然不如动态规划普遍，但推出的常微分方程组和边界条件则往往容易解决得多．

用动态规划或最大原理来解最佳控制问题时，在问题比较简单的情形可以算出解析解，但在较复杂的问题中，这是做不到的，因此，只能希望得到近似解．

第四章专门介绍求解最佳控制问题时的近似计算方法，包括不用最大原理的直接计算的方法，如梯度法、共轭方向法和梯度投影法等，每种方法都以实例说明它的用法．

第五章讨论随机系统的一些基本概念，内容包括：随机序列，多元正态分布和状态的最小方差估计等概率论基础，同时对随机系统最佳控制问题的提法及其数学模型作了详细介绍．最后论述了随机系统在实行最佳控制时，开环控制和闭环控制的区别所在和为什么随机最佳控制应取闭环的反馈控制形式．

第六章详细推导了随机系统状态估计的卡尔曼滤波方法，并用投影的方法逐步导出滤波和预测的递推公式．虽然，从分析问题性质着手，选取适当的数学方法经过逐步推导最后得到结论，步骤比较冗长，但这更符合解决问题的逻辑次序，并更有利于分析问题、解决问题能力的培养和对问题认识逐步深化的锻炼．

本书最后一章运用了动态规划的最优原则，论证了线性——二次随机系统的最佳控制定理，即著名分离定理．据此得到一组递推的函数方程，解这些函数方程即得最佳控制．这

里还证明了随机系统最佳控制问题可分解为计算状态的卡尔曼滤波值和求相应非随机系统的最佳反馈控制两个问题，于是将控制写为滤波的反馈形式便是最佳控制，这个结论称为分离定理.该章对这些内容均作了细致的论述和推导，又将随机系统非完全状态信息时的结论和完全状态信息系统及确定性系统作了详细的比较，最后举例说明了分离定理的应用.

由于本书讨论的是多变量系统，无论状态、输入、输出都是多维向量，故向量与矩阵的理论和计算是常用的数学工具，为了便于应用这个工具，本书末尾以附录的形式叙述了有关矩阵运算的一些基本性质，以供复习和参考.

为了便于对概念的加深理解和方法的熟练掌握，每章末尾选了若干习题，以利于消化和巩固所学知识.

目　　录