什么是数学

R. D. 德赖弗(美)著

李振国 李 浩 译

上海科技教育出版社

什 么 是 数 学

R. D. 德赖弗(美)著

李振国 李 浩 译

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路 393 号)

各地新华书店经销 上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9.25 字数 207000

1989 年 5 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—4700

ISBN 7-5428-0155-4

G·156

定价：2.60 元

Why Math

R. D. Rriver

Springer-Verlag, 1984

责任编辑 陆乃超

封面设计 汤世梁

译 者 序

由于广大读者迫切希望对数学这门既古老而又蓬勃发展的学科有所了解，故《今日数学》、《数学概观》、之类的书应运而生，虽各有特点，但往往是门槛太高，篇幅庞大，一般没有较高数学基础的读者会望而却步。本书是一本全面介绍数学内容、意义和方法的通俗读物，为了克服这一通病，在写法上独具一格，只要求读者具有初等数学的基础就能读懂，本书以日常生活中经常遇到的问题为例子，叙述深入浅出，文笔优美，引人入胜，使人爱不释手。这就为广大非理工科专业的学生提供一本很好的读物。

本书在国外被作为文科大学生的数学用书，目前我国有识之士正在大力提倡文理交融，我们翻译本书的目的是希望能为此作些贡献，并可供广大干部、大中学生、教师作参考。限于译者水平，译文中如有不当之处敬请读者批评指正，不胜感谢。

原书所有物理量的单位均为英制，理应在译文中换算成我国现行的公制。可是一经换算往往使简易的整数量变成不易计算的小数量，考虑到本书是使读者以理解数学方法为目的，而不在于繁琐的计算，这样会使读者带来不便，为此仍系用英制单位。

下面附有与本书相关的英制与公制单位换算表。

长度：

1 英里＝1.609 公里

1 码＝3 英尺＝36 英寸＝0.915 米

1英寸＝2.54厘米

面积：

1公顷＝2.47英亩＝15市亩＝100公亩

重量：

1磅＝16盎司＝0.454公斤

容量：

1蒲式耳＝36升（公升）

1配克＝9.092升（公升）

1加仑＝4夸脱＝4.546升（公升）

1品脱＝0.473升（公升）

华氏与摄氏公式换算：

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

译　者

于上海　1986年

序 言

本书的目的是为了说明数学实际上对每个人都是有用的。为此，向读者提供大量用初等数学计算的实例，这些实例都是从现实世界问题中诱导出来的。对具有一点代数和几何基础的读者即可阅读本书，对基础知识的要求并不超过一般学院的入学要求。我希望读者特别是“不喜欢数学”的人通过学习将会对解决实际问题的能力充满信心，(不要求有较高数学修养的人的帮助)。这里是所遇到的问题的几个例子：

1. 如果一美元值 1.15 加币，那么一个加币值多少美元？

2. 如果一年税率降低 5%，第二年之后每年降低 10%(如在 1981 年到 1984 年之间)，那么 3 年总降低多少？

3. 一个自动冷却系统，盛有水与抗冻剂的混合体 10 公升，其中 25% 是抗冻剂，试问用纯抗冻剂去更换，要排除多少这种混合体？使之得到 10 公升含有 40% 抗冻剂的混合体。

4. 如果你用 30 英里/小时速度行驶一半路程，剩下一半路程以 50 英里/小时速度行驶，那么全路程的平均速度是多少？

5. 一个贮有太阳能热水的容器，放置在不受干扰的 80°F 近似恒温的房间内，如果在 3 天内容器温度由 120°F 冷却到 100°F，那么再过 3 天以后，容器的温度将是几度？

6. 如果 10 英寸的馅饼价格为 3 元，问 15 英寸的馅饼的价格应是多少？价格不因多买而给予优惠。

7. 如何安排一个 24×32 英尺的矩形作为房屋的地基？

8. 为什么火车头的喇叭在经过你时会改变(明显地)音

调，这与雷达测速器又有什么必然关系？

9. 航天1号飞船为何用仅有20瓦功率的发射机可从10亿英里远的土星发回清晰的彩色图形？

10. 你的办公室在12层大厦的第9层，但是每当你要下楼时，而令人讨厌的电梯似乎往往是向上升，难道这只是一种奇妙的巧合吗？

对绝大多数人来说，前6题的"显而易见"的答案分别是85分、25%、1.5立升、40英里/小时、80°F和4.5美元。但是这些答案却都是错误的。

我希望在你学完本教程的时候，你会知道这些"显而易见"的答案都是显然错误的，而正确的答案实际上就明显了。

顺便提一句，如果你已经知道如何正确解决上述十个问题中的大部分问题的话，那么就不必再在这本书上花费时间了。在例子和问题中所考虑的其它课题包括：

打折扣的计算，额外附加费，利息，人寿保险率，筑路所需要的砂的数量或者打基础所要的三和土。

包装大小的经济考虑，建筑大小的散热损失对比，旅行者在空间旅行的快慢与寿命比较。

解释杠杆原理，导航，在考古中用放射性炭测定年代和保护税收投资的计算原理。

评议吸烟的公害，赌博，民间防护计划。

本书是为一般大学和学院所需开设的普通数学基础课程而设置的，但经验证明，对理工科学生也能从中受益。

教师要注意，不管学生入学时所具备的条件如何，对第一章的复习资料花一个星期的时间是有必要的。

我从未能够在一学期中，教完本书的三分之二部分，故本书编写便于灵活地选择所要学习的章节，在第一章到第四章

之后，就可进入第五、六、七、八、十或十一章学习。（第九章有赖于第八章，而第十二章和十三章都需要十一章的基础）。

第一章到第四章不用计算器就能处理，考试时我一般是不允许使用计算器的。除非在以后的章节可使用计算器。

课本中偶尔有些问题可能比一般问题更为复杂，这些问题将用*表示。有几章的最后，或更难的章节是很好的备用补充教材，如果必要的话可以省略掉。

目　录

第一章　算术复习

除非你熟悉算术，否则，几乎没有“实际”的数学问题能用初等的方法处理。

本书不是关于算术的一本教程，我们假设读者已熟悉算术，或许仅需要一点复习。这里提供的简短复习特别强调分配律，分数的处理和百分数。

可是，即使这基础的章节也涉及一些重要的应用。百分数这一节包括有关销售税，折扣，配方的调整，和投资方案的比较等例子和问题。在比率这一节考虑了电费，存款的利息，和速度——时间——距离等问题。

1.1　基本的法则

你无疑知道加法和乘法的交换律：

$a+b=b+a$　　和　　$a\times b=b\times a$，

这里 a 和 b 是任意的两个数。虽然我们几乎多次用到这些规律，你并未认真考虑过它们。

例如，假如你要计算 $3+39$ 的值，你可从 3 开始，并作 39 次加 1 运算：

$$3+1=4,$$
$$4+1=5,$$
$$5+1=6,$$
$$\vdots$$
$$41+1=42.$$

代之，若应用 $3+39=39+3$ 这个事实并考虑到：

$$39+1=40$$

$$40+1=41$$

$$41+1=42$$

计算就变得容易多了。

实际上，该问题太平凡，以致于我们可用心算推得

$$3+39=39+3=42$$

类似地，当把 2×13 解释成 13 个 2 相加时计算相当麻烦，代之用乘法交换律 $2\times13=13\times2$ 这样一来两个 13 相加的结果和 2 自身相加 13 次所得的结果是一样的。

$$2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2$$
$$=13+13=26$$

另外的例子，注意计算：

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 1\ 3\ 9 \\ \hline 2\ 7 \\ 9\ \ \\ 3\ \ \ \ \\ \hline 4\ 1\ 7 \end{array}$$

要比计算

$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 9 \\ \times\ \ \ \ \ \ 3 \\ \hline 4\ 1\ 7 \end{array}$$

麻烦。

而由于 $3\times139=139\times3$，它们两者是相等的。

在实用中，如果要计算 3 乘 139，人们自由地去计算较简单的 139×3，不用停下来去推敲这样做的正确理由。

表示乘的符号有很多，两个数 a 和 b 的积能被写成 $a\times b$ 或 $a\cdot b$ 或 ab 或 $a(b)$ 或 $(a)b$。一般地，无论用哪种符号似乎都较方便，可是你应避免用叉号“×”，它可能被误认为字母

x。当用小圆点表示乘法时，要注意将圆点放在足够高的地方，以免被误认为十进位的小数点，如 $2\cdot 3 = 2\times 3$。当用字母表示数时，a 和 b 的积往往省掉小圆点，缩写成 ab。但两个数的积总是要求一个小圆点或其他乘法记号表示。显然 $2\cdot 3$ 和$2\left(\frac{2}{3}\right)$不能写为 23 和$2\frac{2}{3}$。

其次应该知道的算术规律是结合律：

$(a+b)+c=a+(b+c)$ 和 $a(bc)=(ab)c$

例如，假如你要计算$(29+127)+3$，最好考虑

$(29+127)+3=29+(127+3)=29+130=159$

为了不浪费时间，你不要直接去计算 $(127\times 5)\times 2$，考虑到 $(127\times 5)\times 2=127\times(5\times 2)=127\times 10=1270$，计算将容易得多。

要养成寻求速算方法的习惯！

有许多人对算术规律中的分配律：

$$a(b+c)=ab+ac$$

感到有些困难，因此这里值得特别强调。

首先注意，由于乘法交换律的优点，分配律的一个等价的表示是：

$$(b+c)a=ba+ca$$

相信你能理解下面的例子：

例 1：

$$2(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4$$

$$(a+b)7=7(a+b)=7a+7b$$

在需要括号时候，我们必须小心地使用它们。

例 2：带括号时，$(6+4)\frac{1}{2}=5$

但当你疏忽忘掉加括号时将有：

$$6+4\cdot\frac{1}{2}=8$$

与加括号时的值完全不一样。

例3：在本章后面和下章的许多地方的一些重要应用将要用下面这个事实：

$$a+ba=(1+b)a$$

在上式中，有些人往往要问，"1是从哪儿来的？"这是认识到 $a=1\cdot a$ 这一简单事实再应用分配律的结果：

$$a+ba=1a+ba=(1+b)a$$

一个数字的特例是：

$$9+(0.2)\times 9=(1+0.2)9=(1.2)9$$

通过分别计算 $9+(0.2)9$ 和 1.2×9 来验证，你用两种方法所得的答案相同。

现在考虑减法以及有关负数的概念。

差 $b-a$（读"b 减 a"或 a 被 b 减）被定义为加上 a 等于 b 的数。也就是：

$$\text{例如 } a+c=b \quad \text{则 } b-a=c$$

例如：由于 $2+3=5$，我们约定 $5-2=3$，一般当 $b>a$（b 大于 a）时用 $b-a$ 这个记号是没有问题的。

当 $a>b$ 时，$b-a$ 意味着什么？例如 $2-5$ 或 $0-3$ 意味着什么？

这个数 -3（读"负"3）是被引出以满足方程：

$$3+c=0$$

如此我们说 $0-3=-3$。进一步援引加法的结合律：

$$5+(-3)=(2+3)+(-3)=2+[3+(-3)]=2+0=2$$

这样我们得到 $2-5=-3$ 这一结果。

一般，$-a$ 是被定义为满足方程

$$a+(-a)=0$$

的数。不管 a 和 b 是否是正数或负数，下列法则都成立：

$$b-a=-(a-b)$$

$$-a=(-1)a$$

$$-(-a)=a$$

$$(-a)(-b)=ab \text{ 和}$$

$$b-a=b+(-a)$$

这最后的式子说明减去 a 等于加上 $-a$（不管 a 是正或是负的都是正确的）。

因此，例如：

$$17-(-5)=17+5=22$$

证实下列的论断。

例 4：

$$27+(-15)=27-15=12$$

$$12-(-3)=12+3=15$$

$$-12-(-3)=-12+3=-9$$

$$(-3)(-2)=6$$

$$-(-5)=5$$

$$6-27=-(27-6)=-21$$

下面三个例子以后将经常被使用，每个都重复地应用分配律。

例 5：

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

例 6：回忆 a^2 表示 $a\cdot a$，则计算：

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

例 7：（两个平方差）：

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=a^2-ab+ba-b^2$$
$$=a^2-b^2$$

在例 7 中，取 $b=1$ 就给出了一个常用的计算两个相继的奇数或两个相继的偶数相乘的技巧。例如：

$$19\cdot 21=(20-1)(20+1)=20^2-1^2=399$$

确信读者已经完全理解例 5，6 和 7 中每一步的计算，如果这些结果不是很熟悉的话，你应该记住例 6 和例 7 以便将来用到。

问　题

1．化简下面的每一个表示式：

(a) $2\cdot(5+2)$　(b) $2\cdot 5+2$　(c) $3(1+a)$

(d) $5[2+3(4-1)]$　(e) $2(-13)(-5)$　(f) $0.17\cdot 10$

(g) $100(1+0.06)$　(h) $(0.2)(0.03)$　(i) $13-(-26)$

(j) $-9-(-26)$　(k) $(a-b)^2$　(l) $(2x+1)(x-7)$

2．化简：

(a) $16-31$　(b) $a-(-b)$　(c) $16-(-31)$

(d) $(-2)(5-2)$　(e) $(-2)(a-b)$　(f) $5-0.17$

(g) $0.5-17$　(h) $0.5-1.7$　(i) $0.1(1-2.5)$

3．下面的等式是正确的吗？

(a) $(1+a)b=1+ab$　(b) $a(x-y)=ax-ay$

(c) $(-a)(b-c)=-ab-ac$　(d) $9-6\cdot\frac{1}{3}=1$

(e) $(a+b)^2=a^2+b^2$　(f) $a^2-b^2=(a-b)^2$

4．$(1+0.1)^2$ 是怎样近似地等于 $1+0.2$？看例6。

5．不进行任何乘法将下列各式改写成单个积结果（如同