

綜合数学手冊

徐韞知編譯

商務印書館

綜合數學手冊

徐韜知編譯

增訂八版

此書不外借



綜合数学手册

徐韞知編譯

商務印書館出版

北京東總布胡同 10 號

〔北京市書刊出版業營業許可證出字第 107 號〕

新華書店總經售

上海鐵路局印刷廠印刷

統一書號 13017·108

1952 年 4 月初版

開本 787×1092 1/32

1958 年 8 月 8 版(增訂本)

字數 260,000

1958 年 8 月上海第 1 次印刷

印數 39,501-47,500

印張 14 13/16

定價(10) 1.45

序

勞動是科學的源泉，而數學則為科學的基礎，它的應用最為廣泛。其實，我們人類的生活，無論我們在什麼崗位上工作，都離不開數學。原始人的狩獵生活，因為需要計算獵獲物，尚且要運用數學，何況近代人的生活？事實雖如此，但社會上還有不少人往往沒有把數學常識和個人的生活及工作結合起來，甚至缺乏明確的數量觀念，例如：開會及工作不守時，缺乏時間觀念；慣常以「差不多」及「大概」等模糊籠統的意識來代替明確的數學統計。這些都是由於沒有嚴正的數學頭腦，也就是沒有科學的頭腦。一個人的生活習慣不科學，影響還小；但由於生活習慣不科學而工作也馬馬虎虎的不科學，那就影響很大了！

新中國的人民正在開始努力於新國家的建設事業，首先要肅清「差不多」這一類的模糊意識，養成運用數學的技能和習慣，樹立嚴正的科學頭腦。我校徐韞知教授新編綜合數學手冊，包括由代數以至微積分的一切主要應用法則，內容豐富，簡明扼要，尤其切合實用。倘能人人閱讀，廣泛應用於日常生活及工作中，可以糾正一般的非科學的模糊籠統的意識和習慣，豈僅裨益於專門化的科技建設！

安徽大學主任委員與吾許 傑謹序

一九五〇年十二月十一日

1468690

再版自序

爲了迎接一九五三年開始的國家大建設高潮，和使工農幹部及各級技術學校同學學習蘇聯先進科學技術時多一點幫助，在這次再版時我將這本手冊作了一些必要的改正。

一九五三年一月七日於北京

八版自序

爲了準備掌握新的科學成就而在生產戰線和文化戰線上從事實際工作的讀者們的需要，除在第七版已增入“觀測數據的處理”專題，扼要地說明了“經驗公式”的來源、內容、圖形和用途外，更在本版內把補編內容擴大，再增添“關於複數的主要補充”、“近似計算提要”、“有限差與內插法”、“傅立葉級數圖例”、“初等函數圖例”等五個專題。

同時還改正了一些錯字。未經發現的錯誤和缺點可能還不少，歡迎讀者多加指正。

徐韞知

一九五七年二月十四日於北京

前 言

爲了達到理論與實際相結合的目的，並且解決科技工作者、學校教師以及大中學生們在教研、學習和應用過程中可能遇到的困難，我特別編譯出這本科技通用的“綜合數學手冊”。

這本小冊的大部分是取材於從前德日兩國銷行最廣的四種同類的著作，並根據我二十年來從事數理科教學和參加實際科技工作的經驗，又參考了最近蘇聯出版的兩種同類的小冊，然後再按情況的需要，增添了百多個附圖編成的。此外，在連續的幾個月中，我很審慎地將本書重復修改和校正了四次；因此，大致可以適合讀者的需要。

本書共分六個部分，全部是互相銜接的，但也可以各自獨立。從第一到第四部分是關於代數、幾何、三角、解析幾何、微積分、微分方程以及各種比較主要的應用的基本法則、定義、定理、要項、公式和圖解。第五部分是實用所必需的各種計算用表，和數學上常用的記號和略號一覽表。第六部分是中英俄德四種文字的數學名詞對照和索引；有了這一部分，這本手冊可以同時具備數學詞典的功用，並且供給學習蘇聯科學者或多或少的便利。這是這本手冊的另一特點，也是我編譯這本手冊的主要動機之一。

我最感謝的是，商務印書館能替我將這本書早日印出；而且出版部各位同志多次排校改正，認真負責，使錯誤儘量減少。

對於這本手冊可能提出的任何批評或指教，都是很歡迎的。

徐韞知

一九五〇、九、一八於上海

目次

序

再版自序

八版自序

前言

第一部分 代數學及其應用

(甲)代數學

一、代數學的基本法則	1
二、“函數”及“有理整式”	2
三、恆等式	4
四、“最大公約數”與“最小公倍數”	6
五、分數	7
六、“冪”及“指數法則”	8
七、“無理數”、“虛數”及“複數”	9
八、一次方程	10
九、二次方程	10
一〇、特殊的高次方程	11
一一、聯立一次方程	13
一二、聯立二次方程	15
一三、不等式	16
一四、“比”及“比例”	18
一五、等差級數	20
一六、等比級數	21
一七、調和級數	21
一八、特殊的級數和	22
一九、獨數	23
二〇、利息與年金的計算	24
二一、“順列”及“組合”	26
二二、二項定理及多項定理	27

二三、級數的“收斂”及“發散”	30
二四、分項分數	33
二五、連分數	34
二六、行列式	36
二七、消元法	38
二八、三次及四次方程解法	39
二九、整數論提要	41
三〇、方程論提要	45

(乙)代數的應用 或然率論及最小二乘法

一、或然率有關的基本公式	53
二、原因的或然率	55
三、未來事象的或然率	56
四、最小二乘法	58
五、期望金額	61

第二部分 純粹幾何學及平球三角法

(甲)初等幾何學

(壹)常用計算公式

一、平面部分	63
二、立體部分	64

(貳)初等幾何的幾個基本定義及公理

(叁)平面幾何學的基本法則及定理

一、直線	71
二、三角形	72
三、四邊形及多角形	73
四、圓	74
五、軌跡	75
六、面積	76

七、比例及相似性質	77
八、證題及作圖的方法	78

(肆)立體幾何學的基本法則及定理

一、空間直線及平面	79
二、多面體(角柱, 角錐)	82
三、曲面體(圓柱, 圓錐, 球)	83
四、軌跡及包面	84
五、關於多面體的一般定理	87

(伍)近世幾何學提要

一、調和分割	88
二、關於圓的“極”與“極線”	89
三、近世幾何及射影幾何的重要定理	90
(I)近世初等幾何的“相似形”定理	90
(II)射影幾何的“二次曲線”定理	91
(III)射影幾何的“調和圖形”定理	92
(IV)射影幾何的“三次曲線”定理	92
四、相似點, 根軸(羈線)	93
五、代數的幾何學	94

(乙)平面三角法

一、基本公式	95
(I)三角函數的定義(任意角的三角函數)	95
(II)餘角及負角的三角函數	97
(III) $90^\circ + A$, $A \pm 180^\circ$, $A \pm 270^\circ$, $360^\circ - A$ 及 $A + 360^\circ$ 的三角函數 關係	98
(IV)特別角的三角函數	99
(V)三角函數變換公式	101
(VI)兩角和與差的三角函數	101
(VII)三角和的三角函數	102

(VIII) 倍角的三角函數	103
(IX) 半角的三角函數	104
(X) $m \times 180^\circ$ 及 $m \times 360^\circ + \alpha$ 與 α 的三角函數關係	104
(XI) 各種常用公式	105
(XII) $A+B+C=180^\circ$ 時的三角函數關係	106
(XIII) 關於分角及倍角的其他公式	107
(XIV) 化正弦及餘弦乘幕為倍角的公式	109
二、三角形的性質	109
三、三角形的解法	112
(I) 直角三角形	112
(II) 任意三角形	113
四、平行四邊形的性質	115
五、兩邊平行的四邊形的性質	116
六、圓內接四邊形的性質	117
七、正梯形的性質	118
八、正多角形的性質	118
九、特殊多角形的性質	119
一〇、弧度法	121
一一、反三角函數	122
一二、三角級數	125
一三、“棣美弗定理”及其重要應用	126
一四、正弦曲線量	128

(丙) 雙曲線函數

一、定義	129
二、基本公式	130
三、反雙曲線函數	131
四、“三角函數”與“雙曲線函數”的關係	132
五、雙曲線函數的展開	133
六、雙曲線函數的圖示	134

(丁) 球面三角法

一、基本定理	135
--------	-----

二、球面直角三角形	136
三、任意球面三角形	137
四、解三角形的重要方程	141
(I) 卡諾利方程	141
(II) 高斯方程	141
(III) 奈披耳方程	141
五、球面三角形的解法	142
六、球面形的面積	144
七、重要公式補遺	145
八、球面弧和角的度量	146

第三部分 解析幾何學

(甲)平面解析幾何學

一、坐標系	147
二、坐標的變換	149
三、直線	150
(I) 直交軸	150
(II) 斜交軸	154
四、圓	155
(I) 直交軸	155
(II) 斜交軸	158
五、橢圓	158
六、雙曲線	162
七、拋物線	166
八、二次曲線的分類	168
九、“極坐標”及“極方程”	171
(I) 直線	172
(II) 圓	173
(III) 橢圓	173
(IV) 雙曲線	174
(V) 拋物線	174

一〇、面積及長	174
一一、面積的近似值	175

(乙)立體解析幾何學

一、坐標系	178
二、空間直線及平面	181
三、二次曲面	183
四、坐標的變換	190
五、二次曲面的母線與截面	192
六、直徑面	194
七、一般二次曲面	196
八、極坐標系, 球面坐標系及柱面坐標系	200

第四部分 微積及其應用

(甲)微分學

一、總論	203
二、極限、無窮小、無窮大	206
三、“極限值”定理	206
四、各種函數的“極限值”	207
五、關於“導函數”的定理	208
六、微分	210
七、基本函數的“微係數”	211
八、遞次導函數	213
九、兩個變數的函數	215
一〇、“全微分”、“偏導函數”及變數的變換	215
一一、函數的展開	220
一二、特殊函數的展開式	222
一三、不定形	225
一四、特殊的不定形	226
一五、“極大”與“極小”	227

一六、特殊函數的近似值	228
一七、任意函數的“近似值”及其“誤差”	229

(乙)平面曲線(微積的應用)

一、平面曲線的一般性質	230
二、縮閉線及伸開線	235
三、包絡線	236
四、垂足曲線	236
五、橫截面線	236
六、各種平面曲線	237
(I)轉跡線	237
(II)拋物曲線	239
(III)特殊曲線	239
七、反曲線	244
八、極坐標公式	244

(丙)曲面及空間曲線 (微分幾何的基礎)

一、“切線”及“切面”	246
二、空間曲線	248
三、曲面的“曲率”	251

(丁)積分學

一、一般的積分性質	255
二、積分方法	256
三、代數函數的積分方法	257
四、代數函數的“不定積分”	260
五、代數函數的漸化式積分	264
六、三角函數的“不定積分”	265
七、雙曲線函數的“不定積分”	267
八、三角函數的漸化式積分	268

九、對數函數的“不定積分”	269
一〇、指數函數的“不定積分”	270
一一、反圓函數的“不定積分”	271
一二、歐拉定積分(B 函數, Γ 函數)	273
一三、“變域”為 0 到 1 的定積分	274
一四、“變域”為 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 或 π 的“定積分”	276
一五、“變域”為 0 到 ∞ 的“定積分”	279
一六、“二重積分”及“三重積分”	282
一七、“定積分”的應用	284
一八、橢圓積分	289
一九、傅立葉級數	290
二〇、線積分	293
二一、向量分析提要	294

(戊)微分方程

一、總論	297
二、一階(級)微分方程	298
三、高次一階微分方程	300
四、二階(級)微分方程	302
五、常數係數線性 n 級微分方程	304
六、特殊係數線性 n 階微分方程	306
七、聯立微分方程(微分方程組)	307
八、偏微分方程	309

(己)微積的應用(力學公式)

一、“運動”與“碰撞”	312
二、力的合成	316
三、簡單機械	321
四、摩擦	326
五、運動, 振動及其他力學上重要的微分方程	327

第五部分 計算用表及附錄

(甲)各種對數表用法

一、常用對數表	331
二、逆對數求法	332
三、自然對數表	333
四、三角函數對數表	334

(乙)計算用表及附錄

表一、市公俄英四制度量衡對照表	336
(1)長度	336
(2)面積	337
(3)容量	338
(4)重量	339
表二、複利表	340
表三、現價表	343
表四、(1)平方、立方、平方根、立方根及逆數表	346
(2)從 1 到 10 的平方根及立方根表	348
表五、質數表 (1), (2)	349
表六、常用常數的平方根、立方根及其對數	351
表七、常用對數表 (1), (2)	352
表八、自然對數表 (A), (B), (C)	356
表九、角的弧度表	357
表一〇、(A)三角函數對數簡表 (1), (2), (3)	358
表一〇、(B)三角函數對數詳表 (1), (2)	366
表一一、誤差或然率表	372
表一二、三角函數真數表	374
附錄 (1)希臘字母讀音表	376
附錄 (2)數學記號及略號表	377

第六部分 中英俄德標準數學名詞對照表及索引

一畫 (一)	379
二畫 (二, 已, 力)	379

三畫 (三, 小, 大, 子).....	380
四畫 (不, 中, 月, 水, 分, 公, 比, 反, 方, 引, 牛, 互, 勻, 六, 巴, 內, 心).....	380
五畫 (代, 母, 布, 古, 加, 本, 外, 可, 平, 包, 半, 卡, 末, 立, 史, 四, 主, 切, 正, 勾)	383
六畫 (任, 全, 多, 尖, 自, 收, 凹, 凸, 行, 列, 年, 向, 合, 有, 因, 次, 交, 共, 曲)	386
七畫 (決, 呂, 序, 位, 作, 仲, 考, 利, 判, 折, 扭, 拋, 杜, 克, 完, 角, 辛, 貝, 初, 坐, 系)	388
八畫 (奇, 或, 近, 和, 奈, 空, 固, 阿, 阻, 直, 長, 貢, 弦, 弧, 底, 定, 宗, 拉, 兩, 來, 面, 事, 法, 昇, 非, 析, 表)	390
九畫 (柱, 界, 度, 相, 重, 係, 恆, 計, 既, 軌, 函, 迴, 洛, 指, 星, 射, 約, 威)	393
十畫 (容, 高, 徑, 泰, 特, 速, 垂, 滄, 差, 眞, 消, 振, 矩, 柳, 級, 畢, 根, 降, 記, 原, 現, 乘, 展, 頂, 值, 倍, 逆, 倒, 倚, 規, 扇)	394
十一畫 (梯, 通, 域, 測, 斜, 密, 荷, 旋, 問, 連, 梅, 猛, 莫, 麥, 笛, 臘, 組, 距, 球, 條, 陰, 常, 偏, 偶, 假, 發, 帶, 符, 商, 部, 造, 基, 項, 動)	396
十二畫 (勞, 超, 棣, 極, 傅, 剩, 補, 循, 極, 割, 軸, 虛, 短, 減, 揭, 滑, 無, 柴, 最, 象, 週, 魚, 期, 結, 絕, 階, 陽, 圓, 等, 第, 鈍, 尋, 彭, 區)	399
十三畫 (徵, 準, 解, 積, 裴, 落, 塞, 塔, 單, 運, 置, 福)	403
十四畫 (圖, 對, 漸, 精, 碰, 截, 數, 實, 竭, 實, 算, 遞, 誤, 幾, 複, 齊)	404
十五畫 (標, 模, 調, 銳, 摩, 靚, 整, 橫, 積, 線, 蔓, 餘, 輪, 增)	406
十六畫 (導, 櫛, 彈, 機, 獨, 歐, 錐)	407
十七畫 (應, 螺, 聯, 縮, 臂, 檢, 額, 縱, 臍)	408
十八畫 (擺, 轉, 簡, 幕, 證, 觸)	408
十九畫 (邊)	409
二十畫 (懸, 雙)	409
二十二畫 (變, 體)	409
補編 一. 正文部分; 二. 觀測數據的處理附「常用的幾種經驗公式」; 三. 關於複數的主要補充; 四. 近似計算提要; 五. 有限差與內插法; 六. 傅立葉級數圖例; 七. 初等函數圖例; 八. 拉普拉斯變換	

第一部分 代數學及其應用

(甲) 代數學

一、* 代數學的基本法則

§ 1. 交換法則

$$a+b+c=c+a+b=b+c+a$$

$$a \times b \times c = c \times a \times b = b \times c \times a$$

$$a \times b \div c = (a \div c) \times b$$

§ 2. 分配法則

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b) \div c = (a+b) \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} + b \times \frac{1}{c} = a \div c + b \div c$$

§ 3. 結合法則

$$a+b+c+d+\cdots = (a+b) + (c+d) + \cdots$$

$$= a + (b+c+d) + \cdots$$