同济大学数学辅导系列丛书

数学(财经类)复习指南

SHUXUE CAIJINGLEI FUXI ZHINAN

主编 凌明娟 张震峰 钱晓明

同济大学出版社

同济大学数学辅导系列丛书

硕 士 研 究 生 入 学 考 试

数学(财经类)复习指南

主编　凌明娟　张震峰　钱晓明

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学(财经类)复习指南/凌明娟等主编. —上海:同济大学出版社,2001.8
(同济大学数学辅导系列丛书)
ISBN 7-5608-2290-8

Ⅰ. 硕… Ⅱ. 凌… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039888 号

同济大学数学辅导系列丛书
硕士研究生入学考试
数学(财经类)复习指南
主编 凌明娟 张震峰 钱晓明
责任编辑 李炳钊 责任校对 徐春莲 装帧设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社
(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经销 全国各地新华书店
印刷 同济大学印刷厂印刷
开本 850mm×1168mm 1/32
印张 23.625
字数 685000
版次 2001 年 8 月第 1 版 2002 年 1 月第 2 次印刷
书号 ISBN 7-5608-2290-8/O·192
定价 30.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

内容提要

本书根据国家教育部最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学(三)、(四)考试大纲，结合编者对历年硕士研究生入学考试的深入研究和教学实践编写而成。全书分微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分，共19章，每章由考试要求、复习要点和典型例题、练习题、历年试题等内容构成，书末附录2000～2001数学(三)、(四)考研试题与解答.

本书力求紧扣考研大纲，资料完整，内容简明，重点突出，解题思路清晰，可使读者在较短的时间内，高效率地掌握"考试大纲"的要求，熟悉考试题型及近年来命题的最新动态，提高应试能力.

本书是财经类、管理类硕士研究生入学考试数学(三)、(四)应试复习的指导书，也可作为财经类、管理类相关专业本科生的教学参考书.

前　　言

本书根据国家教育部最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学(三)、(四)考试大纲,结合编者对历年研究生入学考试试卷的深入研究和教学实践编写而成.本书力求紧扣大纲,内容简明,重点突出,解题思路清晰,资料完整,以便读者在较短的时间内高效率地掌握"考试大纲"的要求,熟悉考试题型以及近年来命题的最新动态,提高应试能力.

本书的特点如下:

1. 引导学生在全面复习的过程中,比较系统地理解考试大纲所规定的基本概念、基本理论,掌握基本的思维方法和运算技巧.

2. 精选技巧性、综合性较强的典型例题.

3. 每章配有练习题和数学(三)、(四)的历年试题,且附有较详尽的答案与提示.这些试题展示了统考以来数学(三)、(四)考试的全貌,又蕴含着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想和具体要求,是广大考生和教师了解、分析数学(三)、(四)最直接、最宝贵的资料.

4. 根据历年试卷的结构、知识点和难度分布,对某些问题加以专题讨论,如"极限的计算"、"有关变上限函数"、"微积分在经济中的应用"、"各类证明题举例"等等,使读者对前后相关的知识融汇贯通,迅速地提高考生的综合解题能力、逻辑思维能力、运算能力以及分析和解决实际问题的能力.

本书分微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分,共19章.每一章由以下四部分构成:

一、考试要求;

二、复习要点和典型例题;

三、练习题(附答案与提示);

四、历年试题(附答案与提示).

书末还附有 2000 年、2001 年数学(三)、(四)考研试题和解答.

本书中打“*”号的章、节仅适用于数学(三)的考生,对数学(四)的考生不作要求.

本书是财经类、管理类硕士研究生入学考试数学(三)、(四)应试复习的指导书,也可作为财经类、管理类相关专业本科生的教学参考用书.

本书微积分部分由凌明娟、魏枫编写,线性代数部分由钱晓明编写,概率论与数理统计部分由张震峰编写.竺曼莉也参加了部分工作.

限于水平和时间关系,书中不当和错误之处恳请读者批评指正.

编　者

2001 年 4 月

目　　录

第一部分　微积分(试卷中约占50%)

第二部分　线性代数(试卷中约占25%)

第三部分　概率论与数理统计(试卷中约占25%)

第一部分　微积分

（试卷中约占 50%）

第一章　函数、极限、连续

一、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

6. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念.

7. 了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的性质及四则运算法则，会应用两个重要极限.

9. 会用洛必达法则求极限.

10. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续).

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性. 了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

二、复习要点和典型例题

(一) 函数的概念及其几何特性

1. 函数

设 D 是一个数集，如果对于 D 中的任一 x 值，变量 y 按照一定的对应法则有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 自变量的取值范围称为**定义域**，记作 D_f；y 的取值范围称为函数的**值域**，记作 $Z_f=\{y|y=f(x),x\in D_f\}$.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y，存在唯一的 $x\in D_f$，使 $f(x)=y$，则得到一个定义在 Z_f 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z_f$，称为 $y=f(x)(x\in D_f)$ 的**反函数**.

习惯上用 x 作自变量，写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$.

$y=f(x)$ 称为**直接函数**.

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象对称于直线 $y=x$.

反函数的定义域 $D_{f^{-1}}=Z_f$(直接函数的值域).

反函数的值域 $z_{f^{-1}}=D_f$(直接函数的定义域).

反函数存在定理：如果 $y=f(x)(x\in D_f)$ 是单调函数，则它一定存在反函数 $x=f^{-1}(y)(y\in Z_f)$ 且也是单调函数.

$y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数.

$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 与 $y=\arcsin x$ 互为反函数.

$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$ 与 $y=\arccos x$ 互为反函数.

$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\arctan x$ 互为反函数.

$y=\cot x$，$x\in(0,\pi)$ 与 $=\text{arccot}\, x$ 互为反函数.

例 1 (1) 已知 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$，求 $g(x)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2 & x<-1 \\ x^3 & -1\leqslant x\leqslant 2 \\ 12x-16 & x>2 \end{cases}$，写出 $f(x)$ 反函数的表达式.

(1) **分析** $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像对称于直线 $y=x$，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像也对称于直线 $y=x$，所以，$g(x)=f^{-1}(x)$.

解 (1) 由 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 解得 x:

$$x+\sqrt{x^2+1}=\mathrm{e}^y,\quad -y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

$$-x+\sqrt{x^2+1}=\mathrm{e}^{-y},\text{故 } x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{--y}).$$

再换变量可得：$g(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

(2) 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2\Rightarrow x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$，$y<-1$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$；

当 $x>2$ 时，$y=12x-16\Rightarrow x=\dfrac{y+16}{12}$，$y>8$.

所以，$f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & x<-1 \\ \sqrt[3]{x} & -1\leqslant x\leqslant 8 \\ \dfrac{x+16}{12} & x>8. \end{cases}$$

3. **复合函数**

如果 $y=f(u)$，$u\in D_f$. $u=\varphi(x)$，$x\in D_\varphi$，且 $D_f\cap Z_\varphi\neq\Phi$，则称

$y=f[\varphi(x)]$为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的**复合函数**. x 称为**自变量**,u 称为**中间变量**.

4. 函数定义中的两个要素——定义域与对应法则

(1) 定义域的求法

应用题中函数的定义域由变量的实际意义而定.

用解析式表示的函数,其定义域应使解析式在实数范围内有意义.

偶次根式要求被开方数大于、等于零.

分式要求分母不等于零.

对数函数要求真数大于零,底数大于零且不等于 1.

反三角函数也有特殊限定,例如,$\arcsin f(x)$,$\arccos f(x)$要求$|f(x)|\leqslant 1$.

三角函数$\tan x,\sec x,D_f:x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad k\in Z$;

$\cot x,\csc x,D_f:x\neq k\pi\quad k\in Z$.

分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

多项函数的定义域是每一项函数定义域的交集.

反函数的定义域是直接函数的函数值域.

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域应使 $u=\varphi(x)$的值域包含于 $y=f(u)$的定义域.

例 2 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\ln(2^x-4)+\arcsin\frac{2x-1}{7}$;

(2) $f(x)=g(x^2)+g(3+x)$.

其中,$g(x)=\begin{cases}2x & 0<x\leqslant 1\\ x+1 & 1<x\leqslant 4.\end{cases}$

解 (1) $\begin{cases}2^x-4>0\\ \left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x>4\\ -1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ -3\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

所以，$D_f=(2,4]$.

(2) 分段函数的定义域是各个定义区间的并集，所以，$g(x)$的定义域 $D_g=(0,1]\cup(1,4]$表示 $g(\quad)$中自变量的取值范围为$(0,4]$，$g(x^2)$的自变量是 x^2，$g(3+x)$的自变量是$(3+x)$，所以

$g(x^2)$的定义域：$0<x^2\leqslant 4\Leftrightarrow[-2,0)\cup(0,2]$.

$g(3+x)$的定义域：$0<x+3\leqslant 4\Leftrightarrow(-3,1]$.

$f(x)$的定义域是上述两个定义域的交集，所以

$D_f:\{[-2,0)\cup(0,2]\cap(-3,1]\}=[-2,0)\cup(0,1]$.

(2) 对应法则

函数 $y=f(x)$中的记号 $f(\quad)$是表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系.

例 3 已知 $z=f(2x+y)+2y-4x$，且当 $y=1$ 时 $z=4x^2$，求 f 和 z.

解 将 $y=1$ 时 $z=4x^2$ 代入原式得：

$$4x^2=f(2x+1)+2-4x\Rightarrow f(2x+1)=4x^2+4x-2$$

$$=(2x+1)^2-3\Rightarrow f(x)=x^2-3\Rightarrow z=f(2x+y)+2y-4x$$

$$=(2x+y)^2-3+2y-4x.$$

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$，求 (1) $f(-x)$；(2) $f[f(x)]$.

解 (1) $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2 & (-x)\leqslant 0\\ (-x)^2-x & (-x)>0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ x^2-x & x<0.\end{cases}$

(2) 由于 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x^2+x & x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f(x)\geqslant 0.$

故 $f[f(x)]=[f(x)]^2+f(x)=\begin{cases}x^4+x^2 & x\leqslant 0\\ (x^2+x)^2+(x^2+x) & x>0.\end{cases}$

比较两个函数，当且仅当定义域和对应法则都相同时才表示