配合全国最新教材 体现大纲改革精神

恒谦教学与备考研究中心最新成果

全程学习系列丛书

高中全程学习

高二数学

（试验修订本）

主编 苟春鹏

中国人民大学出版社

全程学习系列丛书

高中全程学习

高二数学

（试验修订本）

主　编　苟春鹏

撰稿人　苟春鹏　肖晔　党增福

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中全程学习．高二数学．试验修订本/苟春鹏主编．
北京：中国人民大学出版社，2001
（全程学习系列丛书）

ISBN 7-300-02756-3/G·478
Ⅰ．高…
Ⅱ．①苟…②肖…
Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 033634 号

全程学习系列丛书
高中全程学习
高二数学
（试验修订本）
主　编　苟春鹏

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销：新华书店
印　　刷：涿州市星河印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：13.125
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
字数：450 000

定价：15.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

编者的话

《全程学习系列丛书》自问世以来，连续三年累计销量近20万套，在全国众多的教辅图书中独树一帜，形成了自身特有的品牌。截至今日，模仿或抄袭“全程学习”的其他图书层出不穷，严重影响了“全程学习”的品牌形象。为不辜负广大师生对全程品牌所寄予的厚望，我们特意组织《全程学习系列丛书》编委会的主要负责老师经过一年的调查、研究，在原有的基础上博采众长，依据教育部颁布的最新教学大纲和人教版的最新教材，设计了全新的编写体例，重新编写了所有新教材的相应分册，更新了与新教材不配套的内容和题型，力图奉献给广大读者一套全新版的《全程学习系列丛书》。

该丛书保持原有的特点，在每节（课）内主要帮助学生梳理知识要点、巩固重点、突破难点，打好基础。我们之所以这样安排，首先是为确保该丛书与现行教材的同步性，其次是遵循学生认知的规律——由知识到能力。考虑到教育改革正从应试教育向素质教育转变，我们在每章或单元之后设计了有关能力培养的栏目，旨在让学生在掌握基础知识之后，能趁热打铁，融会贯通全章知识内容，加强综合能力的培养，从而提高分析问题和解决问题的能力。

本丛书既有精辟的理论分析，也有难易适度的习题设计，还有大量创新性、开放性的例题和习题，全套书具有同步性强、信息量大、科学实用等特点，相信全新版的《全程学习系列丛书》必将成为全国文教图书中的一朵奇葩。

由于时间仓促，水平有限，错漏不当之处敬请广大读者批评指正，以便我们再版时改进。

《全程学习系列丛书》编委会

2001年6月

目　　录

第六章 不等式

本章内容概要

本章主要内容包括：不等式、不等式的基本性质、不等式的证明、不等式的解法、含绝对值的不等式. 重点是不等式的性质、不等式的证明和解不等式，难点是不等式的证明、含参数不等式的解法以及不等式的应用.

不等式的证明在高考中出现较多的题型主要有：(1) 比较大小，可用比较法或函数的单调性；(2) 用三种基本方法，即比较法、综合法、分析法证明不等式；(3) 用数学归纳法(在下章讨论) 证明不等式.

另外，运用不等式求最值是高考的热点. 常见的是函数 $y = ax + \frac{b}{x}(a, b \in \mathbf{R}^{+}, x \in D)$ 在 D 上的最值问题，需要特别指出的是必须注意等号成立的条件，如果在给定区间 D 上取不到等号，可证明这个函数在 D 上是单调函数.

通过解、证不等式，综合考查数学知识和运用多种数学思想方法解题，这也是近几年高考命题的特点.

6.1 不等式的性质

基础知识导学

本节内容是不等式的基本理论，其中包括不等关系的定义、五个性质及三个推论. 不等式的性质是解不等式和证明不等式的主要依据，只有正确理解每条性质和推论，注意条件的变化(加强或放宽)，才能正确地加以运用，从而较好地解决实际问题.

1.实数 a,b 具有以下不等关系

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$;

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

2.不等式有下面一些性质和推论

(1) 对称性 $a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2) 传递性 $a>b, b>c \Rightarrow a>c$.

(3) 可加性 $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$;

$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$;

$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(4) 可乘性 $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$;

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$;

$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

(5) 可乘方性 $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n>0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

(6) 可开方性 $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0 \quad (n \in \mathbf{N}$ 且 $n>1)$.

重点难点突破

(1) 不等式的性质可分为三类:第一类,即对称性与传递性;第二类与加减有关;第三类与乘、除、乘方、开方有关.特别要注意第二类加减性与第三类中不等式性质成立的条件.

(2) 不等式的性质是证、解不等式的基础,特别是在不等式两边同乘以一个数(或式)时,要考虑它的正负.解不等式中最易犯的错误就是等式性质的习惯定势的迁移,如不论 c 是何实数,就得:$a>b \Rightarrow ac>bc$.

例题解法指导

【例 1】 在实数范围内回答下列问题:

(1) 若 $-ac<-bc$ 是否一定得出 $a>b$?

(2) 若 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 是否一定得出 $a>b$?

(3) 若 $a>b, c>d$ 是否一定得出 $a-c>b-d$?

(4) 若 $a < b$ 是否一定得出 $a^2 < b^2$?

(5) 若 $a > b, c > d, cd \neq 0$ 是否一定得出 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$?

分析: 回答本题的关键是熟练掌握不等式的基本性质.

解 (1) 不一定. 若 $c > 0$, 则 $a > b$; 若 $c < 0$, 则 $a < b$.

(2) 一定. $c \neq 0$ 时, $c^2 > 0$, 因而 $a > b$.

(3) 不一定. 例如: $a = c = 2, b = d = 1$ 时, 有 $a - c = b - d$; $a = 2$, $b = d = 1, c = 3$ 时, 有 $a - c < b - d$.

(4) 不一定. 例如: $a = -2, b = 1$ 时, 有 $a^2 > b^2$.

(5) 不一定. 例如: $a = 2, b = 1, c = -1, d = -2$ 时, 有 $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

说明: 掌握不等式的性质, 尤其应注意不等式性质成立的条件.

【例 2】 设 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 且 $a \neq b$, 试比较 $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的大小.

分析: 对要比较大小的两个式子作差、变形, 将作差后的式子分解因式, 然后判断每个因式的正负, 最后判断出整体式子的符号.

解 $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$$= \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}.$$

$\because a - b$ 与 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 总是同号, 且 $\sqrt{ab} > 0$,

$\therefore \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} > 0$,

即 $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) > 0$,

故 $\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

说明: 要比较 a 与 b 的大小, 只要判断出 $a - b$ 的符号即可. 即 $a - b >$

$0 \Leftrightarrow a > b, a-b<0 \Leftrightarrow a<b, a-b=0 \Leftrightarrow a=b$.这种作差比较大小的一般步骤是:求差→变形→判断符号.其关键在于变形.一般思路是将作差后的式子变形成几个易判断符号的简单式子的乘积形式.

【例3】 已知 $f(x)=ax^2-c$,且 $-4 \leqslant f(1) \leqslant -1, -1 \leqslant f(2) \leqslant 5$,求 $f(3)$ 的取值范围.

分析:可以从已知条件中解出 $f(x)$ 表达式中两个未知数 a 与 c,用 $f(1)$ 与 $f(2)$ 表示,再代入到 $f(3)$ 表达式中求范围.

解

$$\because \begin{cases} a-c=f(1) \\ 4a-c=f(2) \end{cases},解得 \begin{cases} a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)] \\ c=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2) \end{cases}.$$

$$\therefore f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1),$$

$$\because -1 \leqslant f(2) \leqslant 5,则 -\frac{8}{3} \leqslant \frac{8}{3}f(2) \leqslant \frac{40}{3},又 -4 \leqslant f(1) \leqslant -1,$$

$$\therefore \left(-\frac{5}{3}\right)(-1) \leqslant -\frac{5}{3}f(1) \leqslant \left(-\frac{5}{3}\right)(-4),$$

$$\therefore -\frac{8}{3}+\frac{5}{3} \leqslant \frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1) \leqslant \frac{40}{3}+\frac{20}{3}.$$

即 $-1 \leqslant f(3) \leqslant 20$.

说明:解此题常见的错误是:依题意有

$$\begin{cases} -4 \leqslant a-c \leqslant -1 & (1) \\ -1 \leqslant 4a-c \leqslant 5 & (2) \end{cases},$$

$$由(1),(2)加减消元得 \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 3 & (3) \\ 1 \leqslant c \leqslant 7 & (4) \end{cases},$$

错在哪里?错就错在多次运用同向不等式相加这一性质(单向性)上,导致 $f(3)$ 取值范围的扩大.

跟踪强化训练

(一) 选择题

1.条件"$x>y$"且 $x \cdot y>0$ 是"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$"成立的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 不属于区间　　(　　)

A. $(-\pi,\pi)$　　B. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

C. $(-\pi,0)$　　D. $(0,\pi)$

3. 若 $3 \leqslant m < 6$，$\frac{1}{3}m < n < 2m$，则 $m+n$ 的取值范围是　　(　　)

A. $[4,12]$　　B. $[5,18)$

C. $[4,18)$　　D. $(4,18)$

4. 若 $a>1$，设 $m=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$，$n=\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}$，那么 m,n 的大小关系是　　(　　)

A. $m>n$　　B. $m<n$

C. $m \geqslant n$　　D. $m \leqslant n$

5. 若 $a>b>c$，则下列结论中正确的是　　(　　)

A. $a|c|>b|c|$　　B. $ab>ac$

C. $a-c>b-c$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

6. 若 $a<b<0$，则下列不等式中不能成立的是　　(　　)

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$

(二) 填空题

7. 若 $a>b$ 且 c ________ d，则 $a-c>b-d$.

8. $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立的条件是__________.

9. 设 $a>b>0$，$m>0$，$n>0$，则 $\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b+m}{a+m}$，$\frac{a+n}{b+n}$ 之间的大小顺序是______________.

10. 已知 $a+b>0$，$b<0$，则 $a,b,-a,-b$ 的大小关系是________.

(三) 解答题

11. 求证：$a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Rightarrow a>0,b<0$.

12. 若 $a>b,c>d$ 且 a,b,c,d 中至少有三个同号,试比较 ac 与 bd 的大小.

13. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,当 $|x|\leqslant 1$ 时,$|f(x)|\leqslant 1$,求证:$|b|\leqslant 1$.

14. 已知函数 $f(x)=ax^2+c$,且 $-2\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 4$,求 $f(3)$ 的取值范围.

6.2 算术平均数与几何平均数

基础知识导学

1. 算术平均数与几何平均数的概念

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,且 $n>1$,那么

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

叫做这 n 个正数的算术平均数.

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

叫做这 n 个正数的几何平均数.

2. 算术平均数与几何平均数的关系(均值定理)

定理 如果 $a,b\in\mathbf{R}$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

推论 如果 $a,b\in\mathbf{R}^+$,那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

重点难点突破

(1) 熟练掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,并会简单的应用.

(2) 平均值不等式在证明不等式和求函数最值中有着广泛的应用.特别是在应用其求函数最值时须注意满足以下三点:

① 公式中的量都是正数,即 $a>0,b>0$;

②$(a+b)$ 或 ab 为定值;

③ 等号要能取得到.

即利用均值不等式求最值时应同时满足“一正”,“二定”,“三相等”.若这三个条件有一个不满足,都不能利用它求最值.

例题解法指导

【例 1】 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$ 且 $ab+bc+ca=1$,求证:$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

分析: 欲证 $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$,只需证 $(a+b+c)^2\geqslant 3$,即 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3$ 即可.联想二元均值不等式的结构特征,可考虑利用均值不等式证明此题.

证明: $\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$,

又 $\because a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,

$\therefore a^2+b^2\geqslant 2ab,\ b^2+c^2\geqslant 2bc,\ a^2+c^2\geqslant 2ac$,

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$,

则 $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)=3$,

故 $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

说明: 利用均值不等式证明不等式时,应从平均值不等式与待证不等式的特征入手.对待证不等式作出灵活的变形,为均值不等式的运用作好铺垫.

【例 2】 求函数 $y=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}$ $(x\in(0,\pi))$ 的最小值.

解法 1

$\because x\in(0,\pi)$, $\therefore 0<\sin x\leqslant 1$.

设 $t=\sin x$,则原函数可转化为 $y=t+\dfrac{4}{t}$,其中 $t\in(0,1]$,

设 $0<t_1<t_2\leqslant 1$,则

$$y_1-y_2=t_1+\frac{4}{t_1}-\left(t_2+\frac{4}{t_2}\right)=(t_1-t_2)\left(1-\frac{4}{t_1t_2}\right).$$

$\because 0<t_1<t_2\leqslant 1$,

$\therefore t_1-t_2<0$,且 $\dfrac{1}{t_1}\geqslant 1,\ \dfrac{1}{t_2}\geqslant 1$,

$\therefore \dfrac{1}{t_1t_2}\geqslant 1$, $\therefore \dfrac{4}{t_1t_2}\geqslant 4$,

$\therefore (t_1 - t_2)\left(1 - \dfrac{4}{t_1 t_2}\right) > 0$,即 $y_1 > y_2$,

$\therefore$ 函数 $y = t + \dfrac{4}{t}(0 < t \leqslant 1)$ 是减函数.

$\therefore$ 当 $t = 1$ 时,$y_{\min} = 5$,

$\therefore$ 函数 $y = \sin x + \dfrac{4}{\sin x}, x \in (0, \pi)$ 的最小值为 5.

解法 2

$$y = \sin x + \frac{4}{\sin x} = \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{\sin x},$$

$\because \sin x + \dfrac{1}{\sin x} \geqslant 2$,当且仅当 $\sin x = 1$,即 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 时"="成立.

$\dfrac{3}{\sin x} \geqslant 3$,当且仅当 $\sin x = 1$,即 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 时"="成立.

$\therefore y = \sin x + \dfrac{4}{\sin x} \geqslant 5$,当且仅当 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 时取"=".

$\therefore y_{\min} = 5$.

说明:本题容易出现如下错解:

$\because x \in (0, \pi)$,$\therefore \sin x > 0, \dfrac{4}{\sin x} > 0$,

$\therefore y = \sin x + \dfrac{4}{\sin x} \geqslant 2\sqrt{\sin x \cdot \dfrac{4}{\sin x}} = 4$,

$\therefore y_{\min} = 4$.

出现这一错解的原因在于对 $\sin x$ 与 $\dfrac{4}{\sin x}$ 能否相等没有验证.事实上,若 $\sin x = \dfrac{4}{\sin x}$,则 $\sin^2 x = 4, \sin x = \pm 2$,这是不可能的.这就告诫我们,在利用均值不等式求最值时,一定要验证等号是否成立.若等号取不到,就要进行适当的拆分、凑配项使等号成立.同时本例也启示我们在用均值不等式求含有三角函数的函数式最值时,一方面要考虑等号,另一方面要考虑三角函数的有界性,使等号成立的条件与三角函数有界性保持一致.

【例 3】 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,求证:$\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geqslant a + b + c$.

分析:公式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab(b > 0)$ 可变形为:$\dfrac{a^2}{b} + b \geqslant 2a$,具有将分式变为整式的作用,而待证式正是将分式变为整式.

证明：$\because \frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a,\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b,\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$，

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 2a-b+2b-c+2c-a=a+b+c.$

说明：要注意挖掘和利用均值不等式的各种变形及其灵活运用.本例利用不等式的变形使得证法简捷明快.

事实上，均值不等式也可变形为：$\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b$，它是用来证明分式不等式的有效工具.

跟踪强化训练

(一) 选择题

1. 实数 x,y 满足 $x^2+y^2=1$，那么 $(1-xy)(1+xy)$ 有　　(　　)

A. 最小值 $\frac{1}{2}$，最大值 1　　B. 最小值 $\frac{3}{4}$，最大值 1

C. 最小值 $\frac{3}{4}$，无最大值　　D. 最大值 1，无最小值

2. 已知 $a>0,b>0$，则下列不等式中不成立的是　　(　　)

A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$　　B. $\frac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

C. $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 4$　　D. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$

3. 若 $a>0,b>0,x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),y=\frac{1}{a+b},z=\frac{1}{\sqrt{ab}}$，则　　(　　)

A. $x\geqslant y>z$　　B. $x\geqslant z>y$

C. $y\geqslant x>z$　　D. $y>z\geqslant x$

4. 若 $\lg x+\lg y=2$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是　　(　　)

A. $\frac{1}{20}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

5. 若 $a>b>0$，则 $a+\frac{1}{(a-b)b}$ 的最小值是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6.若$0<a<1,0<b<1$,则$a+b,2\sqrt{ab},a^2+b^2,2ab$中最大的一个是 (　　)

A. $a+b$　　B. $2\sqrt{ab}$　　C. a^2+b^2　　D. $2ab$

(二)填空题

7.若$x>0$,则$2+3x+\dfrac{4}{x}$的最小值是______.

8.已知$m>0,n>0,x$是m,n的等差中项,y是m,n的等比中项,则x与y的大小关系是x ______ y.

9.若$a>0,b>0$,则以下两式的大小关系是$\lg(1+\sqrt{ab})$ ______ $\dfrac{1}{2}[\lg(1+a)+\lg(1+b)]$.

10.已知$x,y\in\mathbf{R}^+,x+2y=3$,则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$的最小值是______.

(三)解答题

11.若$a>b>c$,求证:$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geqslant\dfrac{4}{a-c}$.

12.已知:$x,y\in\mathbf{R}^+$,且$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1,a,b$是常数,且$a,b\in\mathbf{R}^+$,求$x+y$的最小值.

13.若$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$

14.已知a,b为实常数,求函数$y=(x-a)^2+(x-b)^2$的最小值.

6.3　不等式的证明(1)

基础知识导学

比较法是证明不等式的一种最常用的方法,也是一种最基本的方法,基本不等式就是用比较法证得的.比较法有差值、比值两种形式.

1.差值比较法

根据$a>b\Leftrightarrow a-b>0$,故欲证$a>b$,只需证明$a-b>0$.

2.商值比较法

根据$a>b>0\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}>1$,故欲证$a>b>0$,只需证明$\dfrac{a}{b}>1$.