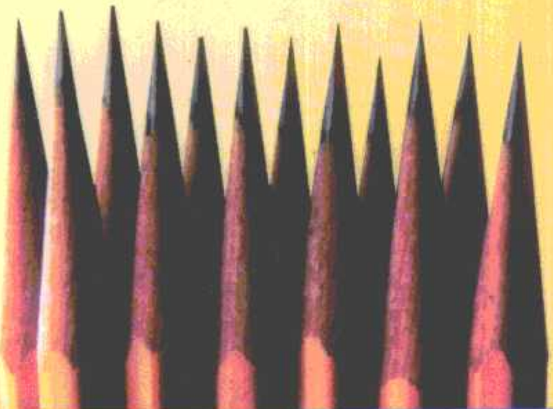
MATHEMATICS

工科数学基础教程

上册

杨则燊　曾绍标　刘九兰



天津大学出版社

工科数学基础教程

上册

杨则燊　曾绍标　刘九兰

天津大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工科数学基础教程/杨则燊等编．—天津：天津大学出版社，1999.8
ISBN 7-5618-1219-1

Ⅰ.工… Ⅱ.杨… Ⅲ.工科数学-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第36548号

出　版	天津大学出版社
出版人	杨风和
地　址	天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电　话	发行部：022—27403647　邮购部：022—27402742
印　刷	天津市宝坻县第二印刷厂
发　行	新华书店天津发行所
开　本	850mm×1168mm　1/32
印　张	12
字　数	313千
版　次	1999年8月第1版
印　次	1999年8月第1次
印　数	1—3 000
定　价	16.00元

前　　言

本书是在调查了解高等学校工科各专业对数学知识的需求以及对当前数学教学内容及方法的意见，并分析工科数学改革的趋势，同时认真研究国内外教材改革经验与体会的基础上编写的.本书对工科数学的教学内容与体系的改革进行了初步的探索，并力求探讨进而解决工科数学教学改革中的三大矛盾，即经典内容与近代知识、数学学科本身体系与其它专业对数学需求以及内容众多而学时有限的矛盾.在这方面我们提出了一些思路和方法，其目标是使工科基础数学教材能够适应培养面向21世纪建设人才的需要.

本书作为天津大学教学改革的“九五”重点教材立项，我们在编写过程中特别注意把握以下几点:

1.把高等数学与线性代数两部分内容有机结合起来，并用现代数学观点和思想统一处理工科数学中的一些问题(例如函数与变换，单元函数与多元函数的极限、连续与微分概念，实变量的实值函数与复值函数的导数与积分等).

2.本书包括工科数学中的高等数学、线性代数、矢量分析与场论的全部内容，复变函数的某些基本内容，数值计算需用的方法原理以及最优化方法中线性规划的基本解法.鉴于各专业所需知识多而学时又有限，故将微积分、解析几何、线性代数、微分方程、场论、复变函数等有关内容通盘考虑，打破数学各分支界限，用现代数学观点组织各部分内容，避免重复，减少学时.

3.力求把数学理论与专业知识有机结合起来.本书注意加强实践环节，在引入新概念与定义前，尽可能通过实例加以说明.在不少章节，用生产和专业实例说明数学知识的具体应用，提高学生

的学习兴趣，并加强经济管理方面的应用.

4. 本书在内容的深度和广度方面既适应于工科各专业对数学的需求，也适用于理科和管理学科对数学的需求，考虑到不同专业的不同需要，有些章节打“ * ”号，供各专业作为选讲选学内容.

本书共19章，分上、中、下三册. 上册包括第0,1～4章，中册包括5～11章，下册包括第12～18章. 第0,3,4,13,14,18章由杨则燊执笔，第5,6,7,8,9,10,11,17章由刘九兰执笔，第1,2,12,15,16章由曾绍标执笔.

讲授本书全部内容大约需用250学时，也可根据专业需要选讲其中部分内容.

本书由齐植兰教授、蔡高厅教授负责主审，他们对原稿进行了详细审阅，并提出了许多修改意见. 蔡高厅教授作为“九五”重点教材立项负责人，还参与了本书体系与结构的设计. 本书作为国家工科数学教学基地(清华大学)的资助项目，得到了基地负责人和清华大学数学系领导的指导与帮助. 天津大学教务处、出版社、数学系和有关学院的领导，对于本书的编写和出版给予了热情的鼓励和支持. 在此一并表示衷心的感谢.

工科数学教学内容和体系的改革是一个迫切而又艰难的课题，我们的探索和尝试仅仅是初步的. 由于我们的水平和经验所限，本书难免有许多不妥之处，恳请同行专家和热心读者批评指正.

编者

1999.6.

第 0 章　微积分初步

本章是为了配合大学一年级第一学期某些专业开设物理课对微积分知识的要求而编写的. 本章对微积分的基本概念、主要运算公式、运算法则做初步介绍,其中不少内容的严格叙述及论证暂略,将在本书后面各章节中详细介绍.

高等数学的基本内容是微积分学. 微积分学以函数作为主要研究对象,研究的内容就是函数的微分(导数)与积分.

导数是对于函数变化率的一种度量,所以又称变化率. 一个物体如果做匀速运动,那么其速度 v 就是单位时间所走过的路程,即 $v=\frac{s}{t}$. 如果物体做非匀速运动,此时该如何来描述物体在某一瞬时的速度呢? 又如一质量分布均匀的细长杆,其总质量为 m,杆长为 l,可用 $\frac{m}{l}$ 来描述杆的线密度. 如果杆的质量分布是非均匀的,那么又如何描述杆上任一点处的线密度呢? 类似的问题还很多,它们都涉及到有关函数的变化率问题,即导数问题.

积分是微积分的另一基本概念,它是对于连续变化过程总效果的一种度量. 例如,我们会计算按匀速 v 做直线运动的物体在时间间隔 $[t_0, T]$ 内所走过的路程 s,计算公式是 $s=v(T-t_0)$. 如果物体作变速直线运动,此时又怎样来计算该物体在某一时间间隔内所走过的路程呢? 另外,我们在中学已经会计算矩形、三角形、圆这类简单图形的面积,而下面这些不规则图形(见图 0-1,0-2 阴影部分)的面积又如何计算呢? 如果它们是由铁皮制成的质量分布均匀的两块平板,那么重心又在何处呢? (我们知道,若是矩

形,则重心在两对角线的交点处;若是三角形,则重心在三条中线的交点处.)上面提出的问题都与积分概念有关.

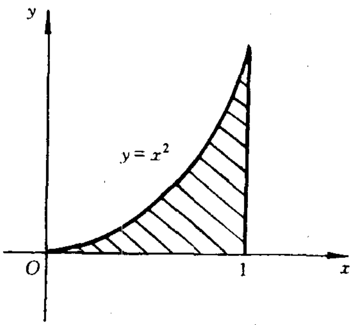


图 0-1

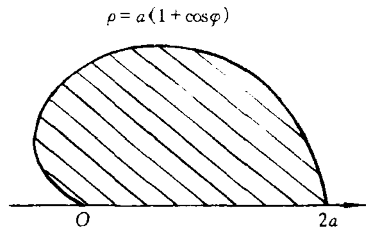


图 0-2

正确理解导数与积分这两个概念,有赖于对函数概念与极限概念的了解.这两个概念在中学已有所涉及,这里仅做一简单的回顾,以后再做严格的论证.

第 1 节　函数与极限

0.1.1　函数概念

定义 0.1.1　设有两个非空数集 A 与 B, f 是一个确定的对应规律,如果对于 A 中的每一个数 x,通过 f, B 中都有唯一的数 y 和它对应,记为

$$f: x \mapsto y \text{ 或 } f(x) = y.$$

这时,称 f 是 A 到 B 的函数或 f 是 A 上的函数,并称 A 为函数 f 的定义域,记为 $\mathscr{D}(f)$. 当 x 遍取 A 中一切数时,与它对应的数 y 组成数集

$$\mathscr{R}(f) = \{y \mid y = f(x), x \in A\},$$

称 $\mathscr{R}(f)$ 为函数 f 的值域.变数 x 叫做自变量;变数 y 随 x 的给定

而确定,叫做因变量.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0,因变量 y 有一个确定的值与之对应,那么就说 f 在 x_0 处有定义,使函数 f 有定义的一切 x 值的集合就是函数 f 的定义域.

如函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x \mid x \geqslant 1\}$.

函数有三种不同的表达方法,即表格法(如三角函数表、对数表等)、图形法(如某地在一段时间间隔内测量的一条温度曲线)和公式法(如圆的面积公式 $A=\pi r^2$,自由落体的距离公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 等等).在本课程中,主要研究由公式法表示的函数,表达函数的公式通常也称作函数的解析表达式.为了比较直观地了解函数 $f: x \mapsto y$ 的性态,我们通常也用它在 xOy 面上的图形(一般是一条曲线)表示,曲线上各点的纵坐标 y 同横坐标 x 满足特定的函数关系 $y=f(x)$.

定义 0.1.2　设有两个函数 $f: u \mapsto y, \varphi: x \mapsto u$,如果对于变量 x 所考虑的范围内的每一个值,变量 y 由规则 $f[\varphi(x)]$ 对应着一个确定的值,那么我们称这个对应规则为由函数 φ 和函数 f 复合而成的复合函数,记作 $f \circ \varphi$,也即

$$f \circ \varphi: x \mapsto u \mapsto y.$$

其中 u 也称作中间变量,通常也以 $y=f[\varphi(x)]$ 来表示复合函数 $f \circ \varphi$,其中 f 称为复合函数的外层函数,φ 称为复合函数的内层函数.

(**注意**　记号 $\varphi \circ f$ 表示复合函数 $y=\varphi[f(x)]$,一般说来,$\varphi \circ f \neq f \circ \varphi$.)

许多函数是由三个以上的函数复合而成的,自然它们具有两个以上的中间变量。在第 0.2 节中,我们会遇到求复合函数的导数问题,为此,首先必须分析复合函数的复合步骤.分析复合步骤时,按照从外层向内层的顺序进行,而分析过程的每一步都必须是

基本初等函数或者基本初等函数的四则运算.

所谓基本初等函数指的是:常值函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数.

如 $y=\cos(2x+1)$,其复合步骤为:$y=\cos u$, $u=2x+1$;又如 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$,其复合步骤为 $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=\frac{1}{x}$(这里有两个中间变量).

0.1.2 极限概念

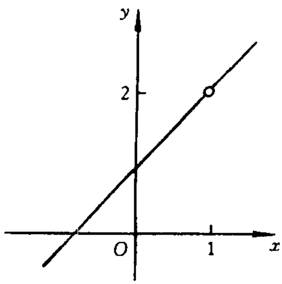


图 0-3

在研究函数性态时,我们经常要考察当 x 变化且越来越接近某一 x_0 时,函数 f(也即因变量 y)的变化趋势,如函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$,其定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,其图形如图 0-3 所示.虽然在 $x=1$ 处,函数没有定义,但是当 x 从 1 的左、右两侧越来越接近 1 时,函数 y 与常数 2 无限接近,此时称 2 为函数 y 当x 趋于 1 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 或$\frac{x^2-1}{x-1}\to2,(x\to1)$.

极限概念的直观理解就如上所述.下面给出它的通俗描述.

若当 x 越来越接近于某一个 x_0(或 $x\to\infty$),函数 $f(x)$与某一常数 A 无限接近,就称此常数 A 是函数$f(x)$当 x 趋于x_0(或 $x\to\infty$)时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \text{ 或} f(x)\to A(x\to x_0 \text{ 或 } x\to\infty).$$

0.1.3 极限的运算法则

1. 四则运算的极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},(B\neq 0).$$

2. 复合函数的极限

设 $y=f[\varphi(x)]$是由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，又 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A.$$

例如，因为$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，又$\lim\limits_{u\to 2}\sqrt{u}=\sqrt{2}$，故

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}=\sqrt{2}.$$

0.1.4 连续与间断

在很多实际问题中，我们遇到的函数，其图形往往是一条连续的曲线. 直观地看，连续性指的是变量 x 的微小变化只引起因变量y 的微小变化，它排除了 y 值的跳跃. 因此，它的图形是一条“不间断的”曲线. 反之，若图形由在横坐标 x_0 处断开的两条曲线组成，则 $y=f(x)$就在 x_0 处出现断裂或出现跳跃性间断. 如由下面的关系式定义的函数 f 和 sgn：

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}(x-2)}{x-2},\quad \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

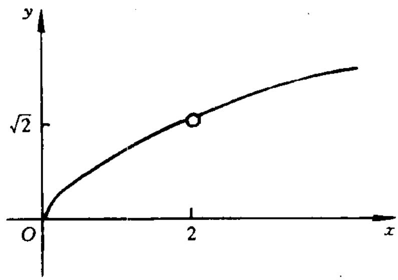


图 0-4

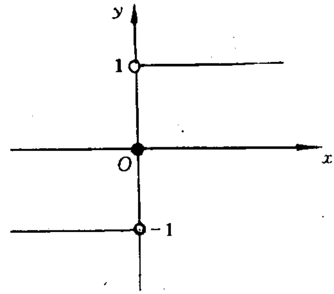


图 0-5

由图便知函数 f 的图形(见图 0-4)在 $x_0=2$ 处断裂,即在 $x=2$ 处不连续;函数 sgn 的图形(见图 0-5)在 $x=0$ 处出现跳跃性间断.下面我们给出函数 f 在一点处连续的定义.

定义 0.1.3　记 $\Delta x=x-x_0$,$\Delta y=f(x)-f(x_0)$,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

我们称函数 f 在点 x_0 处连续,否则就称 f 在点 x_0 处间断.

函数 f 在 x_0 处连续的等价定义是

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这里 $\Delta x=x-x_0$ 称作自变量 x 的改变量(或增量),$\Delta y=f(x)-f(x_0)$称作因变量 y 的改变量(或增量).

如果函数 f 在闭区间$[a,b]$上(或开区间(a,b)内)每一点都连续,就称 f 为闭区间$[a,b]$上(或开区间(a,b)内)的连续函数.

习题 0-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{3x}{x^2-4x+3}$;　　(2) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{4x^2-2x-6}}$；　　(4) $y=\ln(x+3)+\sqrt{6-x}$；

(5) $y=\ln x+\arcsin x$.

2. 设 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,试求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)$；　　(4) $f(x+a)-f(x-a),(a>0)$.

3. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)],f\{f[f(x)]\}$.

4. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

5. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$,求 $f(x)$.

6. 分析复合函数的结构：

(1) $y=(2x-3)^5$；　　(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$；

(3) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$；　　(4) $y=\frac{1}{2}\sqrt{\ln(x^2-a^2)}$；

(5) $y=\arccos(2^{-x^2})$.

7. 设有一边长为 a 的正方形的铁皮,现将各角截去相等的小方块,然后折起各边做成一个无盖的长方体箱子,试建立箱子体积与截去小方块边长之间的函数关系.

8. 在斜高 l 等于 2 时,试写出圆锥体积与它的高 h 的函数关系.

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2+x+1)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-3x+1}{x-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{4x^2-2x+1}$.

10. 证明：函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

11. 设函数 $f(x)$满足关系式

$$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0,$$

且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

12. 证明:定义在$[-l,l]$上的任何函数$f(x)$都可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

第2节　导数与微分

0.2.1　导数概念

导数是微积分学的基本概念之一,它是对函数变化速率的一种度量,我们先看下面例子.

例0.2.1　质点作非匀速的直线运动.已知质点从开始($t=0$)到时刻t所走过的路程为$s=s(t)$.我们考察质点在t_0时刻的瞬时速度.为此,我们计算出质点在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$($\Delta t>0$)或$[t_0+\Delta t,t_0]$($\Delta t<0$)内所走过的路程

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$

比值　$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

可以用来表示质点在该时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$或$[t_0+\Delta t,t_0]$内的平均速度$\bar{v}$,即

$$\bar{v}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

很明显,时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$或$[t_0+\Delta t,t_0]$越短(即$|\Delta t|$越小),平均速度$\bar{v}$越能体现质点在t_0时刻的瞬时速度$v(t_0)$.当间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$无限缩短,即$\Delta t\to 0$时,平均速度$\bar{v}$的极限就刻画了质点在t_0时刻的瞬时速度,因此

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

等式右端的极限也就是路程函数s关于自变量t的变化率,也就是导数.

例 0.2.2 设有由某种物质做成的细杆 AB(见图 0-6).假定杆的质量分布是不均匀的,从杆的 A 端(坐标设为 O)到坐标为 x 的点 P 这一段的质量 m 为 x 的函数 $m=m(x)$.问题是如何描述杆上任一点 M(设坐标为 x_0)处的线密度?我们的办法是取与点 M 相邻的点 N(设其坐标为 $x_0+\Delta x$),算出 MN 这一段杆的平均密度

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x},$$

显然,当 $|\Delta x|$ 越小,这个平均密度 $\bar{\rho}$ 就越能体现杆在点 M 处的密度 $\rho(x_0)$.所以我们用极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$ 来描述杆的线密度,即

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

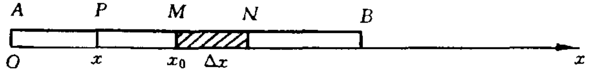


图 0-6

例 0.2.3 切线问题.

定义 0.2.1 设 P 是曲线 C 上一定点,而 Q 是曲线 C 上一动点.如果点 Q 沿曲线 C 与点 P 无限接近时,割线 PQ 有极限位置 PT,则称 PT 为曲线 C 在点 P 处的切线(如图 0-7).

设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,$P(x_0,f(x_0))$为 C 上一定点,求曲线 C 在 P 点的切线方程.

现设动点 Q 的坐标为 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$,比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 就是割线 PQ 的斜率;若记 PQ 的倾角为 φ,则有

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

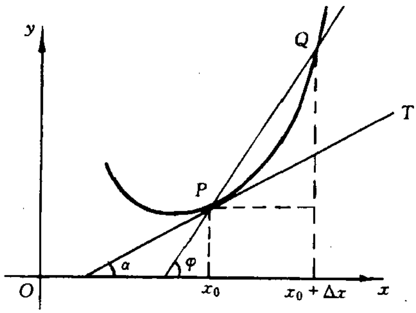


图 0-7

当点 Q 沿着曲线 C 与点 P 无限接近时，割线 PQ 有极限位置，即当 $\Delta x \to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在. 设 PT 的倾角为 α，斜率为 k，则

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

其中 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. 此时，切线 PT 的方程为

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

从上面所列举的例子可以看出，虽然每个例子的实际背景不同，但所用的数学方法是一样的，最终归结到计算一个形如

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

的极限. 因此有必要专门对这种形式的极限加以研究，此极限如果存在，就把它叫做函数在一点的变化率，即函数在一点的导数.

定义 0.2.2　设函数 $f: x \mapsto y$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，$x_0 \in (a, b)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 f 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或

$y'(x_0)$. 此时,我们也称函数 f 在点 x_0 处可导.

显然 $f'(x_0)$ 与 x_0 有关,当 x_0 在 (a,b) 内取不同的值时,$f'(x_0)$ 的值也不同. 因此,如果函数 f 在区间 (a,b) 内每一点 x 处都可导,那么 $f'(x)$ 就是 x 的函数,称作 f 的导函数,记作 f',今后我们把导函数 f' 简称为导数,而把 $f'(x_0)$ 称作函数在点 x_0 处的导数值.

导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线的斜率,即

$$k=\tan\alpha=f'(x)\quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

由导数的定义,我们知道质点运动的距离对时间的导数就是速度,杆的质量对长度的导数就是线密度,即

$$s'(t)=v(t),\quad m'(x)=\rho(x).$$

下面我们用定义求一些函数的导数.

例 0.2.4　常数 C 的导数等于 0,即 $(C)'=0$.

例 0.2.5　$y=f(x)=x^3$,求 $f'(x)$.

解　$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2,$$

所以　$(x^3)'=3x^2$.

由此便可求得曲线 $y=x^3$ 在点 $(2,8)$ 处的切线方程是

$$y-8=f'(2)(x-2),$$

即　$$y=12x-16.$$

例 0.2.6　$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$,求 $f'(x)$.

解 $\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

所以 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$,

或者 $(x^{-1})'=-x^{-2}$.

例 0.2.7 $y=\sin x$,求 y'.

解 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\Big/\frac{\Delta x}{2},$$

利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$(以后再证明)可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

所以 $(\sin x)'=\cos x$.

例 0.2.8 $y=\mathrm{e}^x$,求 y'.($\mathrm{e}\approx 2.71828\cdots$)

解 $\Delta y=\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$(以后再证明)可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\mathrm{e}^x.$$

所以 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.