

成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾编



上海科学技术出版社

成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾编

上海科学技术出版社

013

7.13

成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 19 字数 456 000

1988 年 7 月第 1 版 1988 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—12,200

ISBN 7-5323-0335-7/O·22

定价: 4.60 元

前 言

把祖国建设成现代化的社会主义强国,需要培养大量又红又专的建设人材,普通高等学校大力发展投资少,效益高,学用结合的成人高等教育,是培养人材的一条重要途径。针对成人大学生业余学习的特点,编写好教材或参考书,是办好成人高等教育的关键之一。

成人教育的特点:学生具有较好的思想基础,较丰富的生产实践经验,专业对口,学用结合,学习目的性明确;成人学生一般具有较强的理解能力和分析能力,但记忆力较差;学生以工作为主,在业余时间内学习,因而学习时间少、任务重、要求高;函授大学的学生主要靠自学,夜大学生在业余时间内集中面授,学习上遇到疑难问题,既不容易问老师,也难于同学之间互相研究。因此,成人大学生既具有搞好学习的有利条件,也有不利于学习的实际情况。如何发挥有利条件,减少不利因素,这是办好成人高等教育的一个重要课题。根据成人业余学习的特点,编写比较适合自学的教材或参考书,能起到节省时间,提高效益,减轻负担的作用。

在领导的支持和鼓励下,于1981年编写了适合于成人大学生学习的“高等数学复习资料”,经过两届夜大学生使用,同学们是欢迎的。1983年在原有基础上,根据1980年8月全国工科院校(全日制大学四年制)所审订的“高等数学大纲”,把教材、资料“合二为一”,编写为成人高等工科院校教材《高等数学》,分三册铅印出版,经过四年来的使用,认为本教材由浅入深,通俗易懂,便于自学,具有一定的深广度,较适合于成人业余自学,受到夜大及函授生的欢迎。现由上海市高等教育局职工教育处推荐正式出版。

为了使教材尽可能地适合成人教育,从下面几个方面作了不少努力。

(1) 每章开头有本章学习指导,指出其重点、难点、教学要求,学习方法,使它起到学习指导书的作用。

(2) 章、节、目分得比较细,每节或每目后面配有适量习题和答案,使学生学完一节或一目内容,便可做习题,习题下面有答案。

(3) 深入浅出地讲清基本概念,基本理论,基本运算。对难点和重点做到先分析,后证明,再归纳,尽可能利用几何直观说明,这样来帮助学生抓住重点,突破难点。前后有联系的内容,采用对比形式编写,并指出共同与不同之处。有些重要内容以“顺口溜”或“谜语”形式,便于学生记忆。

(4) 配备了较多的例题和解题方法,对计算熟练程度要求高的内容,如求导,微分运算等,安排了比计算速度的竞赛题(有答案),激发学生学习数学的兴趣。

(5) 概念性多,理论性强的章节,配有讨论题(有解答)、每章有自我检查题(有解答)。适当场合有小结或总结。进一步帮助学生掌握基本概念、基本理论,使它代替习题课的作用。

(6) 每章还安排了难度较大的习题选解,供基础好或时间较充裕的学生开阔视野。全书安排了六次阶段考试题(有解答),供学生进行阶段性的自我预考。

由于使用本教材的师生和其他读者对它的爱护,领导的关心和支持,现根据教学需要对第一册稍作修改,对全书进行重印。鉴于成人高等工科院校教材工作是一个新的尝试,加上水平有限,经验不足,时间仓促,书中错误和不足之处,在所难免,殷切希望使用本教材的师生和其他读者,给予批评指正,以便进一步修改。

最后,向支持、关心、爱护本书的领导、老师、同学和读者致谢。

编 者

1988年5月于中国纺织大学

HAES4/04

高等数学的特点及其学习方法

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学,是认识世界和改造世界的工具.它来源于实践,抽象成理论,再回到实践中.它具有高度的抽象性,严密的逻辑性,应用的广泛性三大特点.

1. 高等数学的特点

高等数学除上述三大特点外,还有它的特殊性,这就是,高等数学研究的基本对象是函数.它是现实世界中各种变量之间的相互依赖关系的抽象.在高等数学中,所遇到的变量,除了个别情况外,都是取实数值.实数是有理数(总可表示为 $\frac{p}{q}$,其中 p, q 是互质的两个整数且 $q \neq 0$)和无理数(不可表示为 $\frac{p}{q}$ 如 $\sqrt{2}$)的统称.关于实数有三个特性.

(1) 有序性 任意两个实数 a, b 之间,必有且仅有三种关系之一: $a=b$; 或 $a>b$; 或 $a<b$.

(2) 稠密性 任意两个实数 a, b 之间,必存在异于 a 和 b 的无穷多个实数.

(3) 连续性 全体实数和数轴上的全体点建立一一对应关系.也就是说,实数填满了整个数轴而无空隙.

因此,高等数学是研究以实数为变量的变量数学.从观点到方法都同常量数学即初等数学有本质的差别.但是,高等数学又以初等数学为基础,是初等数学的发展.不妨先看几个方面的例子.

(1) 常量与变量 例如长度为 l 的细棒,如果细棒的线密度是均匀的,即线密度为常量时,则细棒的质量等于线密度乘长度 l .如果细棒的线密度是非均匀的,即线密度为变量时,则细棒的质量就要用高等数学来求了.

(2) “直”与“曲” 例如直线段的长度可用初等数学来求,曲线弧(圆弧除外)的长度就要用高等数学来求了.

(3) 有限与无限 例如有限项的求和可用初等数学来求,无限项的求和就要用高等数学来求了.

由常与变、直与曲、有限与无限的矛盾,就促使初等数学发展到高等数学.

此外,高等数学中许多基本概念又有如下的特点

(1) 局部与整体 有的概念是在局部范围内建立的,从局部再发展到整体.有的概念是在整体范围内建立的,从整体必须深入到局部,再从局部又回到整体.

(2) 具体与抽象 很多重要概念是从具体的有实际意义的问题着手,然后再从这具体问题中,抛去其实际意义,抽象出数学概念,再上升为理论.

(3) 简单与复杂 如何从简单过渡到复杂,是高等数学中不可缺少的思想方法.例如从简单的一元函数微积分,过渡到复杂的多元函数微积分.

2. 学习高等数学的方法

高等数学的学习方法和学习目的是不可分割的。有正确的学习目的,就会探讨出好的学习方法。所谓方法就是通过符合自己情况的手段,更有效的获得新的知识。无论何种方法,都必须通过勤学苦练,才会结出丰硕成果。一般说来,提供下面几点作参考,具体地结合内容在每章开头再提供。

(1) 预习 大学里教学进度快,理论性较强,应先预习。做到带着问题有目的地听课。

(2) 听课 必须认真地听课,在不影响听课的原则下,尽可能记笔记。每听完课后,必须知道,这堂课的重点、关键、思路是什么?解决了什么问题,自己有什么体会。

(3) 复习 趁热打铁及时复习,把所讲内容全部搞懂,重要内容要记熟,在可能条件下再看有关参考书。

(4) 练习 把布置的作业及时作完,在可能条件下,自己再做一些未布置的作业。要总结解题的技巧性和方法的多样性。

(5) 阶段小结 每学完一个阶段,必须对这段的内容进行自我小结。小结时应把前后有联系的内容进行比较、归纳。在比较的基础上加以发挥,用自己的语言把主要内容表达出来,使知识条理化和系统化,了如指掌,融会贯通。由于高等数学是由基本概念,基本理论,基本运算和应用四个部分组成,要做到基本概念要清楚,基本理论要弄懂,基本运算要熟练,才能做到应用自由。

3. 函授生学习高等数学的方法

由于函授生是在业余时间内,以自学为主,它不同于全日制大学和夜大学的教学形式。因此,在学习过程中还要做到“三性”。

(1) 艰苦性 在业余时间内进行自学,自学的征途上具有艰苦性,尤其是在自学方法还没有建立起来的条件下,首先自学理论性强,作业又多的《高等数学》,艰苦程度就会更大。因此,必须树立艰苦学习,知难而进,见苦不退的精神。

(2) 计划性 根据学校发下的自学周历表,结合本单位和自己的具体情况,制订出切实可行的自学计划,订计划时要留有余地,要同学校的教学进度保持同步或超前,每周或每月要检查计划的执行情况。如果因公出差等特殊原因,不能完成学习计划时,应做到提前学一点,出差途中学一点,出差后补学一点的办法,使工作与学习计划同时完成。

(3) 持久性 知识靠积累,自学要坚持。不断地自学过程就是不断地掌握自学方法的过程,也是知识积累的过程。五年半的函授学习,贵在坚持,要使自己学有成就,必须自始至终,持久性的进行自学。

总之,开动脑筋,独立思考,刻苦钻研,科学地使用时间,自觉性、创造性地学习。方法来自勤奋,功到必成。

目 录

第一章 函数.....(1)

1.1 函数概念.....(1)

- 1. 常量与变量(1)
- 2. 函数的定义(2)
- 3. 函数值(4)
- 4. 分段函数(4)
- 5. 函数的表示法(5)
- 6. 函数的图形(5)

习题及其答案.....(6)

1.2 函数的几种特性.....(7)

- 1. 奇偶性(7)
- 2. 单调性(10)
- 3. 周期性(11)
- 4. 有界性(14)

习题及其答案.....(15)

1.3 反函数.....(16)

- 1. 反函数概念(16)
- 2. 反函数的图形(17)
- 3. 反函数的存在性(18)

习题及其答案.....(19)

1.4 初等函数.....(19)

- 1. 基本初等函数(19)
- 2. 复合函数(24)
- 3. 初等函数(25)
- 4. 有理函数(25)
- 5. 双曲函数(26)

习题及其答案.....(27)

自我检查题.....(28)

习题选解.....(29)

自我检查题解答.....(31)

第二章 极限.....(33)

2.1 数列的极限.....(33)

- 1. 邻域的概念(33)
- 2. 数列的概念(34)
- 3. 数列的极限概念(34)

4. $\langle \varepsilon - N \rangle$ 定义的几何解释(36)

5. 运用 $\langle \varepsilon - N \rangle$ 定义证明数列的极限

举例(37)

6. 小结(39)

7. 一种错误的思想方法(40)

8. 子数列(40)

9. 原数列极限与子数列极限的关系(41)

10. 数列的有界性(42)

习题及其答案.....(42)

2.2 函数极限.....(44)

1. 自变数趋于无限时, 函数的极限(44)

(1) $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数的极限(44)

(2) $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数的极限(46)

(3) $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限(47)

(4) 自变数趋于无限的三种情况, 函数

极限的关系(48)

(5) 小结(49)

习题及其答案.....(49)

2. 自变数趋于有限数时, 函数的极限(49)

(1) $x \rightarrow x_0$ 时, 函数的极限(49)

(2) $x \rightarrow x_0 -$ 时, 函数的极限(53)

(3) $x \rightarrow x_0 +$ 时, 函数的极限(54)

(4) 自变数趋于有限数的三种情况, 函

数极限的关系(55)

(5) 小结(56)

3. 用子数列判定函数极限不存在(57)

习题及其答案.....(58)

2.3 无穷小和无穷大.....(59)

1. 无穷小(59)

(1) 无穷小的概念(59)

(2) 有极限的函数与无穷小的关系(60)

(3) 无穷小的性质(60)

习题及其答案.....(61)

2. 无穷大(62)

(1) 无穷大的概念(62)

(2) $\langle M - \delta \rangle$ 定义的几何解释(63)

(3) 利用 $\langle M - \delta \rangle$ 定义证明函数为无穷

大举例	(63)	4. 初等函数的连续性	(115)
3. 无穷小与无穷大的关系	(64)	5. 利用连续性求极限	(115)
4. 无界函数与无穷大的关系	(64)	6. 利用复合函数的极限运算定理求 极限举例	(116)
5. 总结	(66)	7. 连续函数的保号性	(117)
习题及其答案	(66)	习题及其答案	(117)
习题选解	(66)	3.4 闭区间上连续函数的基本定理	(118)
2.4 极限的运算与性质	(70)	1. 零值定理	(118)
1. 极限的四则运算	(70)	2. 最大最小值定理	(119)
2. 利用极限运算法则求极限举例	(71)	3. 介值定理	(120)
3. 极限的性质	(77)	习题及其答案	(122)
习题及其答案	(79)	自我检查题	(123)
2.5 极限存在准则 两个重要极限	(80)	讨论题	(123)
1. 两个极限存在准则	(80)	习题选解	(125)
2. 利用两个准则证明两个重要极限	(81)	自我检查题解答	(127)
3. 利用两个重要极限求极限举例	(84)	讨论题解答	(128)
4. 利用两个极限存在准则求 极限举例	(87)	第四章 导数	(131)
习题及其答案	(88)	4.1 导数概念	(131)
2.6 无穷小的比较	(89)	1. 三个实际问题	(131)
1. 两个无穷小的比较	(89)	2. 函数在一点的导数概念	(133)
2. 利用等价无穷小求极限	(91)	3. 导数的几何意义	(135)
习题及其答案	(92)	习题及其答案	(136)
自我检查题	(93)	4. 左、右导数概念	(137)
习题选解	(93)	5. 导函数	(137)
自我检查题解答	(102)	6. 可导与连续的关系	(138)
第三章 连续函数	(104)	7. 函数在一点不可导	(139)
3.1 函数在一点的连续性	(104)	8. 几个基本初等函数的导数公式	(140)
1. 增量的概念	(104)	习题及其答案	(142)
2. 函数在一点连续的概念	(105)	4.2 求导的运算法则	(143)
3. 左、右连续的概念	(107)	1. 求导的四则运算法则	(143)
4. 区间连续与连续函数	(108)	2. 复合函数求导法则	(146)
习题及其答案	(109)	3. 隐函数的概念及隐函数求导法	(150)
3.2 函数的间断点 间断点分类	(110)	4. 基本初等函数的导数公式和 导数运算法则汇集	(153)
1. 间断点的概念	(110)	习题及其答案	(153)
2. 间断点分类	(110)	5. 对数求导法	(155)
习题及其答案	(112)	6. 初等函数求导小结	(156)
3.3 连续函数的运算 初等函数的 连续性	(113)	7. 分段函数求导举例	(156)
1. 连续函数的四则运算	(113)	8. 杂例	(157)
2. 基本初等函数的连续性	(114)	习题及其答案	(159)
3. 复合函数的连续性	(114)	4.3 高阶导数	(160)

1. 二阶导数的概念	(160)	习题及其答案	(202)
2. 二阶导数的力学意义	(161)	6.2 拉格朗日中值定理	(203)
3. 高阶导数	(162)	习题及其答案	(207)
习题及其答案	(165)	6.3 柯西中值定理	(208)
4.4 导数的应用举例	(166)	习题及其答案	(211)
习题及其答案	(168)	6.4 泰勒中值定理	(212)
自我检查题	(169)	习题及其答案	(220)
习题选解	(169)	6.5 罗必塔法则	(221)
自我检查题解答	(174)	习题及其答案	(229)
第五章 微分	(176)	*6.6 皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式及其应用	(230)
5.1 微分的概念	(176)	习题及其答案	(232)
1. 为什么要引入微分	(176)	讨论题	(233)
2. 微分的定义	(177)	自我检查题	(234)
3. 可微与可导的关系	(178)	习题选解	(235)
4. 微分的几何意义	(179)	讨论题解答	(244)
5. 函数不可微	(180)	自我检查题解答	(246)
习题及其答案	(180)	第七章 导数的应用	(248)
5.2 微分的运算法则 微分形式的不变性	(181)	7.1 函数的单调性	(248)
1. 微分的运算法则	(181)	习题及其答案	(252)
2. 微分形式的不变性——复合函数微分法则	(182)	7.2 函数的极值	(253)
习题及其答案	(184)	习题及其答案	(259)
5.3 微分在近似计算中的应用	(185)	7.3 函数的最大值和最小值	(259)
1. 用线性函数近似代替非线性函数	(185)	习题及其答案	(266)
2. 用切线的纵坐标近似代替曲线的纵坐标	(186)	7.4 曲线的凹凸性与拐点	(267)
3. 求一个未知函数的微分	(187)	习题及其答案	(272)
习题及其答案	(188)	7.5 曲线的渐近线	(272)
5.4 由参数方程所表示的函数的导数	(188)	习题及其答案	(275)
习题及其答案	(190)	7.6 函数图形的描绘	(275)
讨论题	(190)	习题及其答案	(278)
习题选解	(192)	7.7 平面曲线的曲率	(278)
第一次考试试题	(195)	习题及其答案	(286)
讨论题解答	(196)	讨论题	(286)
第一次考试试题解答	(197)	自我检查题	(287)
第六章 微分学基本定理	(200)	习题选解	(287)
6.1 罗尔定理	(200)	讨论题解答	(294)
		自我检查题解答	(295)

第一章 函 数

高等数学的研究对象基本上是函数. 在中学数学课程中, 就学过不少函数, 在这一章里, 将在原有函数知识的基础上, 进行归纳和补充.

学 习 指 导

本章重点是函数概念、特性、基本初等函数和初等函数.

(1) 明定义 把函数的定义彻底搞明白, 确切掌握.

(2) 树直观 几何直观是领会函数的重要途径. 把函数和它的几何图形相结合, 和平面解析几何中的方程相对照, 这样结合和对照起来就既容易理解又记得住. 应注意函数 $y=f(x)$ 中, x 总表示自变数, y 表示因变数. 但在解析几何方程中的 x, y 是对称的, 既可把 x 看作自变数, 也可把 y 看作自变数, 这是两者的区别之处.

(3) 抓特性 抓住函数所具有的单调性、奇偶性、周期性和有界性. 注意, 不是每一个函数都同时有这四个特性, 但却有函数同时有这四个特性, 如 $y=\sin x$.

(4) 记构造 哪些函数叫基本初等函数, 怎样构造复合函数和初等函数, 非初等函数, 必须记住.

1.1 函 数 概 念

1. 常量与变量

在实际问题中, 我们会经常遇到各种各样的量, 如长度、重量、体积、温度、时间、速度等等. 在某一个过程中, 如果一个量只能取一个固定的数值, 这个量就称为常量. 如果一个量可以取不同的数值, 这个量就称为变量. 例如, 取一铁块加热, 则铁块重量不变, 而铁块的温度、体积在变. 因此, 在这一铁块加热过程中, 重量是常量, 温度、体积是变量.

一个量是常量还是变量, 随着所考虑的问题不同, 可能会有变化的. 例如重力加速度一般情况下看作常量, 实际上, 在不同的地方重力加速度是不同的. 这就同所考虑的问题中精确度要求有关. 如果精确度要求不高, 把它看作常量; 如果精确度要求比较高, 就不能把它看作常量了.

常量与变量都各自具有其物理意义, 脱离其物理意义, 就其数值关系上说, 某一过程中常量只能取某一固定的数值, 而变量可以取不同的数值, 因此常量又称常数, 变量又称变数. 通常用 a, b, c 等表示常数, x, y, z 等表示变数.

变数 x 所可能取值的全体, 叫变数 x 的变域. 最常见的变域是区间, 但也可以不是区间. 如果变数所取的数值是连续变化的, 则它的变域是一个区间, 这种变数称为连续变数. 例如某天的最低温度是 4°C , 最高温度是 15°C . 温度 T 的变化是连续变化的, 因此, 变数 T

的变域是一个闭区间 $[4, 15]$, 并且 T 是连续变数. 如果变数所取的值是一个一个孤立的数值, 则它的变域就不是一个区间, 这种变数称为离散变数. 例如某工厂加工的零件数是一个变数, 这个变数是离散变数, 它的变域就不是一个区间, 而是全体自然数 $1, 2, 3, \dots$. 如果一个变数的变域只有一个数 C , 则这个变数就是常数 C , 因此, 常数可看作是变数的特殊情况.

2. 函数的定义

在同一过程中, 往往不是只有一个变数, 而是可能有两个或两个以上的变数出现. 这些变数也往往不是孤立的在变, 而是相互联系并遵循着一种客观规律在变化. 我们首先研究两个变数之间所遵循着的变化规律即函数关系.

定义 设有两个变数 x 和 y , 变数 x 的变域为 D . 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照某一种对应规律(用字母 f 表示对应规律), 都有变数 y 的一个或多个确定的值和它对应, 称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D.$$

x 叫做自变数, y 叫做因变数. 从 x 到 y 的对应规律 f 称为函数关系, D 叫做函数的定义域.

这个定义, 可简单而形象地表示为: 每一 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有确定的 y 值.

定义中, 如果对于 D 中的每一个 x 值, 有唯一的一个确定的 y 值和它对应, 称 y 是 x 的单值函数. 这时简单的表示为: 每一 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有唯一确定的 y 值.

定义中, 如果对于 D 中的每一个 x 值, 有多个确定的 y 值和它对应, 称 y 是 x 的多值函数. 这时简单地表示为: 每一 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有多个确定的 y 值.

高等数学中, 主要讨论单值函数. 关于多值函数, 今后将看到可以把它拆成几个单值函数来讨论.

例1 自由落体运动的规律是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 s 表示下降距离, t 表示时间, g 是重力加速度.

在 $D = [0, T_0]$ (其中 T_0 是落到地面时所需时间)中, 对于 D 上每一个 t 值, 由上式有唯一确定的一个 s 值和它对应, 所以 s 是 t 的单值函数. 定义域为 $D = [0, T_0]$, 或 $D = E\{t | 0 \leq t \leq T_0\}$.

例2 变数 x 和 y 满足方程

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ 或 } y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{其中 } a \text{ 为正常数}).$$

在 $D = [-a, a]$ 中, 对于 x 的每一个值, 由上式都有两个确定的 y 值和它对应, 因此 y 是 x 的多值函数, 定义域为 $D = [-a, a]$, 或 $D = E\{x | -a \leq x \leq a\}$.

由 $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ 可拆成 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, 则 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个单值函数, 定义域为 $D = [-a, a]$; 而 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 也是一个单值函数, 定义域为 $D = [-a, a]$.

由解析几何知道, $x^2 + y^2 = a^2$ 的图形是原点为心, a 为半径的圆周. 而 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 为上半圆周, $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 为下半圆周.

例3 变数 x 和 y 满足

$$y=C \quad (\text{其中 } C \text{ 为常数}).$$

在 $D=(-\infty, +\infty)$ 上, 对于 x 的每一个值, 都有一个确定的 y 值 C 和它对应, 因此, y 是 x 的单值函数, 定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$. 这里 $y=C$ 中, 不含自变数 x , 理解为不论 x 取什么实数, y 总是以确定的值 C 和它对应. 由解析几何知, $y=C$ 表示一条平行于 x 轴且距离 x 轴为 C 个单位的直线.

例4 变数 x 和 y 满足

$$x=a \quad (\text{其中 } a \text{ 为常数}).$$

是否可以确定 y 是 x 的函数呢? 不能. 因为当 x 取值 a 时, 没有确定的 y 值和它对应, 因此 y 不是 x 的函数. 事实上, $x=a$ 只表示 x 轴上的一个点.

可见, 并不是任何两个变数之间的关系都是函数关系, 而是符合定义中规定的那种关系才是函数关系.

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母“ f ”, 表示自变数 x 与因变数 y 之间的对应规律即函数关系, 不能看作 f 乘 x , 这种对应规律是指, 对于定义域中某一个 x 值, 得到确定的 y 值的某种规律. 当函数是由解析式子表示时, 这种规律是解析式子中所指定的那些数学运算(如加、减、乘、除、乘方等等). 当然也可以用其它字母来表示函数关系, 如 $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ 等. 但是, 如果同时考虑几个不同函数时, 就不要用同一个字母表示不同的函数关系, 以免发生混淆.

例5 函数 $y=3x$ 的对应规律是自变数 x 乘 3.

例6 函数 $y=\sin 5x$ 的对应规律是, 自变数 x 乘 5 再取正弦.

函数定义域 D 是表示一个函数的自变数 x 可能取实数值的全体. 如果函数有实际意义, 求定义域时, 要从变数的实际意义来考虑. 如例1中, 自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域叫做有实际意义的定义域. 如果函数是解析式子表示的, 定义域就是使解析式子有意义的所有自变数的集合, 称为自然定义域.

求自然定义域的方法是: 在函数的式子里, 如果有分式, 则分母的值不能等于 0; 如果有偶次根式, 则根号里所含的式子的值必须大于等于 0; 如果有对数记号, 则真数必须是正数, 底数必须是正数, 且不等于 1; 如果有正切函数, 则正切函数符号下的式子的值不能等于 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 如果有余切函数, 则余切函数符号下的式子的值不能等于 $n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 如果有反正弦函数或反余弦函数, 则在反正弦函数、反余弦函数符号下的式子的绝对值必须小于等于 1. 在函数式子里, 如果同时出现上述诸种情况的某几种, 则定义域是它们的公共部分.

例7 求 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ 的定义域.

解 $1-x^2 \geq 0$, 则 $x^2 \leq 1$, $|x| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$; 又 $x \geq 0$, 因此定义域为 $[0, 1]$ 或 $0 \leq x \leq 1$, 或 $D=E\{x|0 \leq x \leq 1\}$.

此外, 还有一种受限制的定義域. 例如, $y=x^2$, 它的自然定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 我们也可以限制 x 只在 $(-\infty, 0)$ 或者 $(0, +\infty)$ 或 $[1, 2]$ 或 $(2, 3)$ 等内取值, 它是自然定义域的某一部分, 用 X 表示这种定义域, X 既可以是自然定义域, 也可以是自然定义域的一部分.

而用 D 表示自然定义域.

定义域 D 和对应规律 f 是确定一个函数的要素. 如果两个函数的定义域和对应规律都相同, 才能说这两个函数是相同的. 只要两者之一不同, 便不能表示相同的函数.

例 8 函数 $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2 \lg x$ 不能表示同一函数. 因为 $f(x) = \lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$. $g(x) = 2 \lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 因为定义域不相同, 所以不能表示同一个函数.

例 9 函数 $y = ax^2$ (其中 $x \geq 0$) 与 $y = ax^2$ (其中 $x < 0$) 也不能表示同一函数. 因为两者的对应规律相同, 但定义域不同.

例 10 函数 $y = 3x$ 与 $s = 3t$ 是表示同一函数. 因为两者的定义域与对应规律都相同.

由此可见, 只要定义域及对应规律一样, 不管自变数与因变数采用什么字母, 总是同一个函数.

3. 函数值

定义 设函数 $y = f(x)$, 当自变数 x 取定义域中的某一个定值 x_0 时, 因变数 y 的对应值叫做当 $x = x_0$ 时的函数值. 记作 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

如果 $x = x_0$ 时, 有函数值 $f(x_0)$, 称 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义. 因此函数的定义域也就是使函数有定义的自变数的全体. 而函数值的全体叫函数的值域, 记作 R . 这样, 函数的定义又可简单表示为

对任意一个 $x \in D \xrightarrow{f}$ 有确定的函数值 $f(x) \in R$

很明显, 只要函数的定义域及对应规律确定了, 那末这个函数的值域也确定了.

例 11 设 $f(x) = 2x^2 - 5$, 求 $x = 1$, $x = 2$ 处的函数值.

解 $f(1) = 2 \times 1^2 - 5 = -3$, $f(2) = 2 \times 2^2 - 5 = 3$.

例 12 设 $f(x) = \sqrt{x-1}$, 求 $f(1)$, $f(5)$, $f(x_0)$, 定义域及值域.

解 $f(1) = 0$, $f(5) = 2$, $f(x_0) = \sqrt{x_0-1}$ 定义域是 $x \geq 1$; 或 $[1, +\infty)$. 值域是 $[0, +\infty)$.

4. 分段函数

有些函数, 不能在整个定义域上用一个解析式子表示. 而必须用多个解析式子表示, 这种函数叫做分段函数. 简单的说, 由几个解析式子联立表示的函数就是分段函数. 分段函数与一个解析式子表示的函数, 在性质上是不同的, 主要表现在各段的分段点 (也叫做联结点) 上的性质, 通常要单独研究 (今后再研究).

例 13 函数

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

是一个分段函数 (图 1.1).

例 14 函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

是分段函数 (图 1.2). 这个函数叫做符号函数, sgn 是它的特定记号, 并求 $f(0)$, $f(3)$,

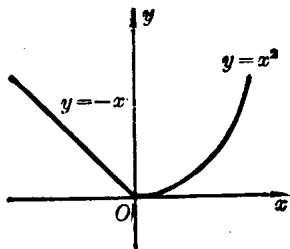


图 1.1

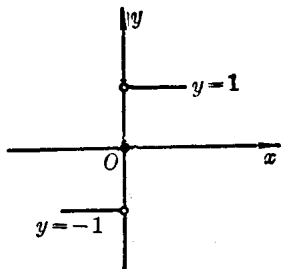


图 1.2

$f(7.5)$, $f(-10.5)$, $f(-1)$.

解 $f(0)=0$, $f(3)=1$, $f(7.5)=1$, $f(-10.5)=-1$, $f(-1)=-1$.

5. 函数的表示法

在初等数学中我们知道, 函数有列表法、图象法、解析法三种常用表示方法. 其中解析法用得最多. 此外, 有时还直接用语句来反映一个函数. 例如, “ y 是不超过 x 的最大整数”, 这句话表示 y 是 x 的一个函数, 并且用记号 $y = [x]$ 来表示这个函数.

例 15 $y = [x]$ 中, 如 $y = [-7] = -7$, $y = [-\pi] = -4$, $y = [0] = 0$, $y = [1] = 1$, $y = [\pi] = 3$, $y = [6.5] = 6$, ...

显然, 对于 $D = (-\infty, +\infty)$ 上任一个 x , 都有唯一确定的 y 值和它对应. 因此, y 是 x 的单值函数, 定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$; 值域为 $R = \{\text{全体整数}\}$ (图 1.3).

例 16 “设 x 是有理数时, y 的值是 1; x 是无理数时, y 的值是 0”, 这句话表示 y 是 x 的一个函数, 并用符号 $D(x)$ 表示, 即

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

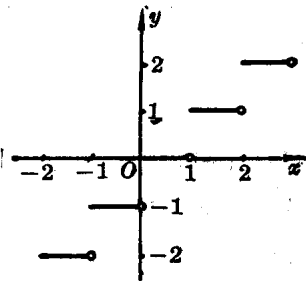


图 1.3

叫做狄利克来函数. 并求 $D(-5)$, $D(-\pi)$, $D(0.1)$, $D(\sqrt{2})$, $D(\pi)$, $D(100)$, $D(3.1416)$.

因为对于 $D = (-\infty, +\infty)$ 上任一个 x , 都有唯一确定的 y 值和它对应, 因此 y 是 x 的单值函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R = \{0, 1\}$ 即 0 与 1 两个数.

显然 $D(-5)=1$, $D(-\pi)=0$, $D(0.1)=1$, $D(\sqrt{2})=0$, $D(\pi)=0$, $D(100)=1$, $D(3.1416)=1$.

6. 函数的图形

一个函数 $y=f(x)$ 也就是给了一个 x , y 的方程, 由解析几何知道, 满足 $y=f(x)$ 的点 (x, y) 或 $[x, f(x)]$ 的轨迹是 $y=f(x)$ 的图形, 因此, 一个函数 $y=f(x)$ 的图形一般说来是一条曲线. $x=x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 表示这条曲线上点 $[x_0, f(x_0)]$ 处的纵坐标. 单值函数则在定义域内平行 y 轴的直线与这曲线只有一个交点 (图 1.4). 而多值函数则在定义域内平行 y 轴的直线与这曲线有两个以上的交点. 例如, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个多值 (双值) 函数. 而 $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 是一个单值函数, 其图形是上半椭圆; $y =$

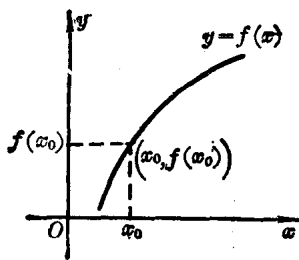


图 1.4

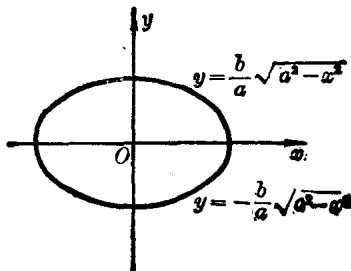


图 1.5

$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 是一个单值函数, 其图形是下半椭圆(图 1.5).

习 题 1.1

1. 如果 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(a+b)$.

2. 如果 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x+\Delta x) - f(x)$.

3. 如果 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

4. 如果

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

求 $f(1)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(-\frac{\pi}{4})$, $f(0)$, $f(3)$.

5. 如果 $\psi(x) = \ln x$, 证明 $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

6. 如果 $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$, 证明 $f(t) = f(\frac{1}{t})$.

7. 如果 $F(x) = e^x$, 证明 $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$; $F(x-y) = \frac{F(x)}{F(y)}$.

8. 指出下列函数的定义域, 对应规律, 值域.

(1) $y = \sqrt{3x+4}$;

(2) $y = \lg(2x-1)$.

9. 求下表各函数的定义域.

函 数	定 义 域
$y = \sqrt{-x^2}$	
$y = \sqrt{(-x)^2}$	
$y = \arcsin(\sin x)$	
$y = \sin(\arcsin x)$	
$y = 10^{\lg x}$	
$y = \lg 10^x$	

10. 求函数 $y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$ 的定义域.

11. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{的定义域和值域.}$$

12. 求函数

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 < x \leq 2; \\ x^3 - 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{的定义域.}$$

13. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ 求下列函数的定义域:

- (1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;
(3) $f(x+a)$; ($a>0$); (4) $f(x+a)+f(x-a)$. ($a>0$).

14. 在下列各题中, $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是否表示同一个函数, 为什么? 在那一个区间内, 它们是同一个函数:

- (1) $f(x) = \frac{x}{x}$, $\phi(x) = 1$; (2) $f(x) = x$, $\phi(x) = (\sqrt{x})^2$;
(3) $f(x) = x$, $\phi(x) = \sqrt{x^2}$; (4) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $\phi(x) = 1$.

15. 某公共汽车路线全长为 20 里, 票价规定如下: 乘坐不满 4 里者收费 5 分; 乘坐 4~10 里者收费 1 角; 超过 10 里者收费 1 角 5 分. 将票价表示为路程的函数, 求定义域并作图形.

16. 火车站托运行李收费的规定是: 当行李不超过 50 公斤时, 按基本运费计算, 每公斤收 0.15 元, 当超过 50 公斤时, 超重部分按每公斤收 0.25 元, 但最多不能超过 M 公斤 ($M>50$), 求运费 y (元) 与重量 x (公斤) 的函数关系, 并求定义域且作图形.

17. 求证 $|x| = x \operatorname{sgn} x$, 并作 $y = x \operatorname{sgn} x$ 的图.

习 题 答 案

1. $0, -4, \frac{|a-2|}{a+1}, \frac{|a+b-2|}{a+b-1}$. 2. $-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$. 3. t^6+1, t^6+2t^3+1 . 4. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.
8. (1) $D = [-\frac{4}{3}, +\infty)$, $R = [0, +\infty)$, x 乘 3, 再加 4 开平方根. (2) $D = (\frac{1}{2}, +\infty)$, $R = (-\infty, +\infty)$, x 乘 2 减 1 再取 10 为底的对数. 9. (1) $D = \{0\}$, (2) $D = (-\infty, +\infty)$, (3) $D = (-\infty, +\infty)$, (4) $D = [-1, 1]$ (5) $D = (0, +\infty)$, (6) $D = (-\infty, +\infty)$. 10. $D = [-2, 1]$. 11. $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $R = \{-1, 1\}$. 12. $D = (-1, 4]$. 13. (1) $D = [0, 1]$, (2) $D = [2n\pi, (2n+1)\pi]$, 其中 n 为整数. (3) $D = [-a, 1-a]$, (4) $D = [-a, 1-a] \cap [a, 1+a]$. 14. (1) 不是同一个函数, 当 $x \neq 0$ 时, 为同一个函数. (2) 不是同一个函数, 当 $x \geq 0$ 时, 为同一个函数. (3) 不是同一个函数, 当 $x > 0$ 时, 为同一个函数. (4) 是同一个函数. 15. $y = 0.5, 0 < x < 4$; $y = 1, 4 \leq x \leq 10$; $y = 1.5, 10 < x \leq 20$, $D = (0, 20]$. 16. $y = 0.15x, 0 < x \leq 50$; $y = 7.5 + 0.25(x-50), 50 < x \leq M$, $D = (0, M]$.

1.2 函数的几种特性

1. 奇偶性

定义 设有函数 $y=f(x)$, 如果对于定义域 X 内任意 x , 都有 $-x \in X$, 且 $f(-x) = f(x)$. 称函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

偶函数的定义域对称原点. x 和 $-x$ 处的函数值相等, 其图形关于 y 轴对称 (图 1.6).

利用定义证明函数 $f(x)$ 是偶函数的方法是:

- (1) 定义域关于原点对称或对称区间 $[-l, l]$;
(2) 等式 $f(-x) = f(x)$ 在定义域上成立.