成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾编

上海科学技术出版社

成人高等工科院校用书

高等数学

第一册

巫锡禾 编

上海科学技术出版社

成人高等工科院校用书
高 等 数 学
第 一 册
巫 锡 禾 编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张 19　字数 456 000
1988 年 7 月第 1 版　1988 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—12,200
ISBN 7-5323-0335-7/O·22
定价：4.60 元

前　　言

把祖国建设成现代化的社会主义强国，需要培养大量又红又专的建设人材，普通高等学校大力发展投资少，效益高，学用结合的成人高等教育，是培养人材的一条重要途径．针对成人大学生业余学习的特点，编写好教材或参考书，是办好成人高等教育的关键之一．

成人教育的特点：学生具有较好的思想基础，较丰富的生产实践经验，专业对口，学用结合，学习目的性明确；成人学生一般具有较强的理解能力和分析能力，但记忆力较差；学生以工作为主，在业余时间内学习，因而学习时间少、任务重、要求高；函授大学的学生主要靠自学，夜大学生在业余时间内集中面授，学习上遇到疑难问题，既不容易问老师，也难于同学之间互相研究．因此，成人大学生既具有搞好学习的有利条件，也有不利于学习的实际情况．如何发挥有利条件，减少不利因素，这是办好成人高等教育的一个重要课题．根据成人业余学习的特点，编写比较适合自学的教材或参考书，能起到节省时间，提高效益，减轻负担的作用．

在领导的支持和鼓励下，于1981年编写了适合于成人大学生学习的"高等数学复习资料"，经过两届夜大学生使用，同学们是欢迎的．1983年在原有基础上，根据1980年8月全国工科院校（全日制大学四年制）所审订的"高等数学大纲"，把教材、资料"合二为一"，编写为成人高等工科院校教材《高等数学》，分三册铅印出版，经过四年来的使用，认为本教材由浅入深，通俗易懂，便于自学，具有一定的深广度，较适合于成人业余自学，受到夜大及函授生的欢迎．现由上海市高等教育局职工教育处推荐正式出版．

为了使教材尽可能地适合成人教育，从下面几个方面作了不少努力．

(1)　每章开头有本章学习指导，指出其重点、难点、教学要求，学习方法，使它起到学习指导书的作用．

(2)　章、节、目分得比较细，每节或每目后面配有适量习题和答案，使学生学完一节或一目内容，便可做习题，习题下面有答案．

(3)　深入浅出地讲清基本概念，基本理论，基本运算．对难点和重点做到先分析，后证明，再归纳，尽可能利用几何直观说明，这样来帮助学生抓住重点，突破难点．前后有联系的内容，采用对比形式编写，并指出共同与不同之处．有些重要内容以"顺口溜"或"谜语"形式，便于学生记忆．

(4)　配备了较多的例题和解题方法，对计算熟练程度要求高的内容，如求导，微分运算等，安排了比计算速度的竞赛题（有答案），激发学生学习数学的兴趣．

(5)　概念性多，理论性强的章节，配有讨论题（有解答）．每章有自我检查题（有解答）．适当场合有小结或总结．进一步帮助学生掌握基本概念．基本理论，使它代替习题课的作用．

(6)　每章还安排了难度较大的习题选解，供基础好或时间较充裕的学生开阔视野．全书安排了六次阶段考试题（有解答），供学生进行阶段性的自我预考．

由于使用本教材的师生和其他读者对它的爱护，领导的关心和支持，现根据教学需要对第一册稍作修改，对全书进行重印．鉴于成人高等工科院校教材工作是一个新的尝试，加上水平有限，经验不足，时间仓促，书中错误和不足之处，在所难免，殷切希望使用本教材的师生和其他读者，给予批评指正，以便进一步修改．

最后，向支持、关心、爱护本书的领导、老师、同学和读者致谢．

编　　者

1988年5月于中国纺织大学

高等数学的特点及其学习方法

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，是认识世界和改造世界的工具．它来源于实践，抽象成理论，再回到实践中．它具有高度的抽象性，严密的逻辑性，应用的广泛性三大特点．

1．高等数学的特点

高等数学除上述三大特点外，还有它的特殊性，这就是，高等数学研究的基本对象是函数，它是现实世界中各种变量之间的相互依赖关系的抽象．在高等数学中，所遇到的变量，除了个别情况外，都是取实数值．实数是有理数$\left(\text{总可表示为}\dfrac{p}{q}\right.$，其中 p, q 是互质的两个整数且 $\left.q\neq0\right)$和无理数$\left(\text{不可表示为}\dfrac{p}{q}\text{ 如}\sqrt{2}\right)$的统称．关于实数有三个特性．

(1) 有序性　任意两个实数 a, b 之间，必有且仅有三种关系之一：$a=b$；或 $a>b$；或 $a<b$．

(2) 稠密性　任意两个实数 a, b 之间，必存在异于 a 和 b 的无穷多个实数．

(3) 连续性　全体实数和数轴上的全体点建立一一对应关系．也就是说，实数填满了整个数轴而无空隙．

因此，高等数学是研究以实数为变量的变量数学．从观点到方法都同常量数学即初等数学有本质的差别．但是，高等数学又以初等数学为基础，是初等数学的发展．不妨先看几个方面的例子．

(1) 常量与变量　例如长度为 l 的细棒，如果细棒的线密度是均匀的，即线密度为常量时，则细棒的质量等于线密度乘长度 l．如果细棒的线密度是非均匀的，即线密度为变量时，则细棒的质量就要用高等数学来求了．

(2) "直"与"曲"　例如直线段的长度可用初等数学来求，曲线弧(圆弧除外)的长度就要用高等数学来求了．

(3) 有限与无限　例如有限项的求和可用初等数学来求，无限项的求和就要用高等数学来求了．

由常与变、直与曲、有限与无限的矛盾，就促使初等数学发展到高等数学．

此外，高等数学中许多基本概念又有如下的特点

(1) 局部与整体　有的概念是在局部范围内建立的，从局部再发展到整体．有的概念是在整体范围内建立的，从整体必须深入到局部，再从局部又回到整体．

(2) 具体与抽象　很多重要概念是从具体的有实际意义的问题着手，然后再从这具体问题中，抛去其实际意义，抽象出数学概念，再上升为理论．

(3) 简单与复杂　如何从简单过渡到复杂，是高等数学中不可缺少的思想方法．例如从简单的一元函数微积分，过渡到复杂的多元函数微积分．

2．学习高等数学的方法

高等数学的学习方法和学习目的是不可分割的．有正确的学习目的，就会探讨出好的学习方法．所谓方法就是通过符合自己情况的手段，更有效的获得新的知识．无论何种方法，都必须通过勤学苦练，才会结出丰硕成果．一般说来，提供下面几点作参考，具体地结合内容在每章开头再提供．

(1) 预习　大学里教学进度快，理论性较强，应先预习．做到带着问题有目的性地听课．

(2) 听课　必须认真地听课，在不影响听课的原则下，尽可能记笔记．每听完课后，必须知道，这堂课的重点、关键、思路是什么？解决了什么问题，自己有什么体会．

(3) 复习　趁热打铁及时复习，把所讲内容全部搞懂，重要内容要记熟，在可能条件下再看有关参考书．

(4) 练习　把布置的作业及时作完，在可能条件下，自己再做一些未布置的作业．要总结解题的技巧性和方法的多样性．

(5) 阶段小结　每学完一个阶段，必须对这段的内容进行自我小结．小结时应把前后有联系的内容进行比较、归纳．在比较的基础上加以发挥，用自己的语言把主要内容表达出来，使知识条理化和系统化，了如指掌，融会贯通．由于高等数学是由基本概念，基本理论，基本运算和应用四个部分组成，要做到基本概念要清楚，基本理论要弄懂，基本运算要熟练，才能做到应用自由．

3．函授生学习高等数学的方法

由于函授生是在业余时间内，以自学为主，它不同于全日制大学和夜大学的教学形式．因此，在学习过程中还要做到“三性”．

(1) 艰苦性　在业余时间内进行自学，自学的征途上具有艰苦性，尤其是在自学方法还没有建立起来的条件下，首先自学理论性强，作业又多的《高等数学》，艰苦程度就会更大．因此，必须树立艰苦学习，知难而进，见苦不退的精神．

(2) 计划性　根据学校发下的自学周历表，结合本单位和自己的具体情况，制订出切实可行的自学计划，订计划时要留有余地，要同学校的教学进度保持同步或超前，每周或每月要检查计划的执行情况．如果因公出差等特殊原因，不能完成学习计划时，应做到提前学一点，出差途中学一点，出差后补学一点的办法，使工作与学习计划同时完成．

(3) 持久性　知识靠积累，自学要坚持．不断地自学过程就是不断地掌握自学方法的过程，也是知识积累的过程．五年半的函授学习，贵在坚持，要使自己学有成就，必须自始至终，持久性的进行自学．

总之，开动脑筋，独立思考，刻苦钻研，科学地使用时间，自觉性、创造性地学习．方法来自勤奋，功到必成．

目　　录

第一章 函　数

高等数学的研究对象基本上是函数．在中学数学课程中，就学过不少函数，在这一章里，将在原有函数知识的基础上，进行归纳和补充．

学 习 指 导

本章重点是函数概念、特性、基本初等函数和初等函数．

(1) 明定义　把函数的定义彻底搞明白，确切掌握．

(2) 树直观　几何直观是领会函数的重要途径．把函数和它的几何图形相结合，和平面解析几何中的方程相对照，这样结合和对照起来就既容易理解又记得住．应注意函数 $y=f(x)$ 中，x 总表示自变数，y 表示因变数．但在解析几何方程中的 x，y 是对称的，既可把 x 看作自变数，也可把 y 看作自变数，这是两者的区别之处．

(3) 抓特性　抓住函数所具有的单调性、奇偶性、周期性和有界性．注意，不是每一个函数都同时有这四个特性，但却有函数同时有这四个特性，如 $y=\sin x$．

(4) 记构造　哪些函数叫基本初等函数，怎样构造成复合函数和初等函数，非初等函数，必须记住．

1.1 函 数 概 念

1．常量与变量

在实际问题中，我们会经常遇到各种各样的量，如长度、重量、体积、温度、时间、速度等等．在某一个过程中，如果一个量只能取一个固定的数值，这个量就称为常量．如果一个量可以取不同的数值，这个量就称为变量．例如，取一铁块加热，则铁块重量不变，而铁块的温度、体积在变．因此，在这一铁块加热过程中，重量是常量，温度、体积是变量．

一个量是常量还是变量，随着所考虑的问题不同，可能会有变化的．例如重力加速度一般情况下看作常量，实际上，在不同的地方重力加速度是不同的．这就同所考虑的问题中精确度要求有关．如果精确度要求不高，把它看作常量；如果精确度要求比较高，就不能把它看作常量了．

常量与变量都各自具有其物理意义，脱离其物理意义，就其数值关系上说，某一过程中常量只能取某一固定的数值，而变量可以取不同的数值，因此常量又称常数，变量又称变数．通常用 a、b、c 等表示常数，x、y、z 等表示变数．

变数 x 所可能取值的全体，叫变数 x 的变域．最常见的变域是区间，但也可以不是区间．如果变数所取的数值是连续变化的，则它的变域是一个区间，这种变数称为连续变数．例如某天的最低温度是4°C，最高温度是15°C．温度 T 的变化是连续变化的，因此，变数 T

的变域是一个闭区间[4, 15]，并且 T 是连续变数. 如果变数所取的值是一个一个孤立的数值，则它的变域就不是一个区间，这种变数称为离散变数. 例如某工厂加工的零件数是一个变数，这个变数是离散变数，它的变域就不是一个区间，而是全体自然数 1, 2, 3, …. 如果一个变数的变域只有一个数 C，则这个变数就是常数 C，因此，常数可看作是变数的特殊情况.

2. 函数的定义

在同一过程中，往往不是只有一个变数，而是可能有两个或两个以上的变数出现. 这些变数也往往不是孤立的在变，而是相互联系并遵循着一种客观规律在变化. 我们首先研究两个变数之间所遵循着的变化规律即函数关系.

定义 设有两个变数 x 和 y，变数 x 的变域为 D. 如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某一种对应规律(用字母 f 表示对应规律)，都有变数 y 的一个或多个确定的值和它对应，称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

x 叫做自变数，y 叫做因变数. 从 x 到 y 的对应规律 f 称为函数关系，D 叫做函数的定义域.

这个定义，可简单而形象地表示为：每一 $x\in D \xrightarrow{f}$ 有确定的 y 值.

定义中，如果对于 D 中的每一个 x 值，有唯一的一个确定的 y 值和它对应，称 y 是 x 的单值函数. 这时简单的表示为：每一 $x\in D \xrightarrow{f}$ 有唯一确定的 y 值.

定义中，如果对于 D 中的每一个 x 值，有多个确定的 y 值和它对应，称 y 是 x 的多值函数. 这时简单地表示为：每一 $x\in D \xrightarrow{f}$ 有多个确定的 y 值.

高等数学中，主要讨论单值函数. 关于多值函数，今后将看到可以把它拆成几个单值函数来讨论.

例 1 自由落体运动的规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度.

在 $D=[0, T_0]$(其中 T_0 是落到地面时所需时间)中，对于 D 上每一个 t 值，由上式有唯一确定的一个 s 值和它对应，所以 s 是 t 的单值函数. 定义域为 $D=[0, T_0]$，或 $D=E\{t|0\leqslant t\leqslant T_0\}$.

例 2 变数 x 和 y 满足方程

$$x^2+y^2=a^2;\quad 或\ y=\pm\sqrt{a^2-x^2}\quad (其中\ a\ 为正常数).$$

在 $D=[-a, a]$ 中，对于 x 的每一个值，由上式都有两个确定的 y 值和它对应，因此 y 是 x 的多值函数，定义域为 $D=[-a, a]$，或 $D=E\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$.

由 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 可拆成 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, 则 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 是一个单值函数，定义域为 $D=[-a, a]$；而 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 也是一个单值函数，定义域为 $D=[-a, a]$.

由解析几何知道，$x^2+y^2=a^2$ 的图形是原点为心，a 为半径的圆周. 而 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 为上半圆周，$y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 为下半圆周.

例 3 变数 x 和 y 满足

$$y=C \quad (\text{其中 } C \text{ 为常数}).$$

在 $D=(-\infty, +\infty)$上，对于 x 的每一个值，都有一个确定的 y 值 C 和它对应，因此，y 是 x 的单值函数，定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$. 这里 $y=C$ 中，不含自变数 x，理解为不论 x 取什么实数，y 总是以确定的值 C 和它对应. 由解析几何知，$y=C$ 表示一条平行于 x 轴且距离 x 轴为 C 个单位的直线.

例 4 变数 x 和 y 满足

$$x=a \quad (\text{其中 } a \text{ 为常数}).$$

是否可以确定 y 是 x 的函数呢？不能. 因为当 x 取值 a 时，没有确定的 y 值和它对应，因此 y 不是 x 的函数. 事实上，$x=a$ 只表示 x 轴上的一个点.

可见，并不是任何两个变数之间的关系都是函数关系，而是符合定义中规定的那种关系才是函数关系.

函数记号 $y=f(x)$中的字母"f"，表示自变数 x 与因变数 y 之间的对应规律即函数关系，不能看作 f 乘 x，这种对应规律是指，对于定义域中某一个 x 值，得到确定的 y 值的某种规律. 当函数是由解析式子表示时，这种规律是解析式子中所指定的那些数学运算(如加、减、乘、除、乘方等等). 当然也可以用其它字母来表示函数关系，如 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=g(x)$等. 但是，如果同时考虑几个不同函数时，就不要用同一个字母表示不同的函数关系，以免发生混淆.

例 5 函数 $y=3x$ 的对应规律是自变数 x 乘 3.

例 6 函数 $y=\sin 5x$ 的对应规律是，自变数 x 乘 5 再取正弦.

函数定义域 D 是表示一个函数的自变数 x 可能取实数值的全体. 如果函数有实际意义，求定义域时，要从变数的实际意义来考虑. 如例 1 中，自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域叫做*有实际意义的定义域*. 如果函数是解析式子表示的，定义域就是使解析式子有意义的所有自变数的集合，称为*自然定义域*.

求自然定义域的方法是：在函数的式子里，如果有分式，则分母的值不能等于 0；如果有偶次根式，则根号里所含的式子的值必须大于等于 0；如果有对数记号，则真数必须是正数，底数必须是正数，且不等于 1；如果有正切函数，则正切函数符号下的式子的值不能等于 $n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$；如果有余切函数，则余切函数符号下的式子的值不能等于 $n\pi(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$；如果有反正弦函数或反余弦函数，则在反正弦函数、反余弦函数符号下的式子的绝对值必须小于等于 1. 在函数式子里，如果同时出现上述诸种情况的某几种，则定义域是它们的公共部分.

例 7 求 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ 的定义域.

解 $1-x^2\geqslant0$，则 $x^2\leqslant1$，$|x|\leqslant1$，$-1\leqslant x\leqslant1$；又 $x\geqslant0$，因此定义域为$[0,1]$或 $0\leqslant x\leqslant1$，或 $D=E\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$.

此外，还有一种*受限制的定义域*. 例如，$y=x^2$，它的自然定义域为$(-\infty, +\infty)$，我们也可以限制 x 只在$(-\infty, 0)$或者$(0, +\infty)$或 $[1, 2]$或$(2, 3)$等内取值，它是自然定义域的某一部分，用 X 表示这种定义域，X 既可以是自然定义域，也可以是自然定义域的一部分.

而用 D 表示自然定义域.

定义域 D 和对应规律 f 是确定一个函数的要素. 如果两个函数的定义域和对应规律都相同,才能说这两个函数是相同的. 只要两者之一不同,便不能表示相同的函数.

例 8 函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 不能表示同一函数. 因为 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 因为定义域不相同, 所以不能表示同一个函数.

例 9 函数 $y=ax^2$(其中 $x\geqslant 0$)与 $y=ax^2$(其中 $x<0$)也不能表示同一函数. 因为两者的对应规律相同,但定义域不同.

例 10 函数 $y=3x$ 与 $s=3t$ 是表示同一函数. 因为两者的定义域与对应规律都相同.

由此可见, 只要定义域及对应规律一样, 不管自变数与因变数采用什么字母, 总是同一个函数.

3. 函数值

定义 设函数 $y=f(x)$, 当自变数 x 取定义域中的某一个定值 x_0 时, 因变数 y 的对应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值. 记作 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

如果 $x=x_0$ 时, 有函数值 $f(x_0)$, 称 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义. 因此函数的定义域也就是使函数有定义的自变数的全体 而函数值的全体叫函数的值域, 记作 R. 这样, 函数的定义又可简单表示为

对任意一个 $x\in D \xrightarrow{f}$ 有确定的函数值 $f(x)\in R$

很明显, 只要函数的定义域及对应规律确定了, 那末这个函数的值域也确定了.

例 11 设 $f(x)=2x^2-5$, 求 $x=1$, $x=2$ 处的函数值.

解 $f(1)=2\times 1^2-5=-3$, $f(2)=2\times 2^2-5=3$.

例 12 设 $f(x)=\sqrt{x-1}$, 求 $f(1)$, $f(5)$, $f(x_0)$, 定义域及值域.

解 $f(1)=0$, $f(5)=2$, $f(x_0)=\sqrt{x_0-1}$ 定义域是 $x\geqslant 1$; 或 $[1, +\infty)$. 值域是 $[0, +\infty)$.

4. 分段函数

有些函数, 不能在整个定义域上用一个解析式子表示 而必须用多个解析式子表示, 这种函数叫做*分段函数*. 简单的说, 由几个解析式子联立表示的函数就是分段函数. 分段函数与一个解析式子表示的函数, 在性质上是不同的, 主要表现在各段的分段点(也叫做联结点)上的性质, 通常要单独研究(今后再研究).

例 13 函数

$$y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

是一个分段函数(图 1.1).

例 14 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

是分段函数(图 1.2). 这个函数叫做*符号函数*, sgn 是它的特定记号, 并求 $f(0)$, $f(3)$,

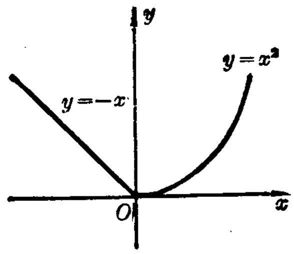

图 1.1

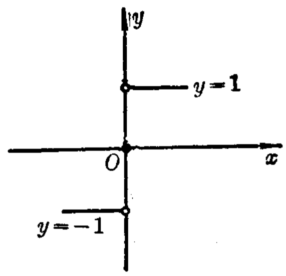

图 1.2

$f(7.5)$. $f(-10.5)$, $f(-1)$.

解 $f(0)=0$, $f(3)=1$, $f(7.5)=1$, $f(-10.5)=-1$, $f(-1)=-1$.

5. 函数的表示法

在初等数学中我们知道，函数有列表法、图象法、解析法三种常用表示方法. 其中解析法用得最多. 此外，有时还直接用语句来反映一个函数. 例如，"y是不超过x的最大整数"，这句话表示y是x的一个函数，并且用记号$y=[x]$来表示这个函数.

例 15 $y=[x]$中，如$y=[-7]=-7$，$y=[-\pi]=-4$，$y=[0]=0$，$y=[1]=1$，$y=[\pi]=3$，$y=[6.5]=6$，….

显然，对于$D=(-\infty, +\infty)$上任一个x，都有唯一确定的y值和它对应. 因此，y是x的单值函数，定义域为$D=(-\infty, +\infty)$；值域为$R=\{$全体整数$\}$（图 1.3）.

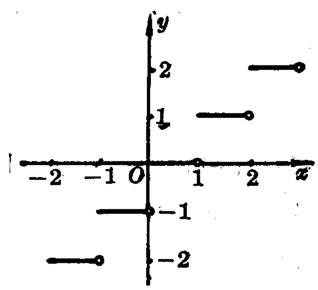

图 1.3

例 16 "设x是有理数时，y的值是1；x是无理数时，y的值是0"，这句话表示y是x的一个函数，并用符号$D(x)$表示，即

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数};\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

叫做狄利克来函数. 并求$D(-5)$, $D(-\pi)$, $D(0.1)$, $D(\sqrt{2})$, $D(\pi)$, $D(100)$, $D(3.1416)$.

因为对于$D=(-\infty, +\infty)$上任一个x，都有唯一确定的y值和它对应，因此y是x的单值函数，定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$R=\{0, 1\}$即0与1两个数.

显然$D(-5)=1$，$D(-\pi)=0$，$D(0.1)=1$，$D(\sqrt{2})=0$，$D(\pi)=0$，$D(100)=1$，$D(3.1416)=1$.

6. 函数的图形

一个函数$y=f(x)$也就是给了一个x, y的方程，由解析几何知道，满足$y=f(x)$的点(x, y)或$[x, f(x)]$的轨迹是$y=f(x)$的图形，因此，一个函数$y=f(x)$的图形一般说来是一条曲线. $x=x_0$处的函数值$f(x_0)$表示这条曲线上点$[x_0, f(x_0)]$处的纵坐标. 单值函数则在定义域内平行y轴的直线与这曲线只有一个交点（图 1.4）. 而多值函数则在定义域内平行y轴的直线与这曲线有两个以上的交点. 例如，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$或$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$是一个多值（双值）函数. 而$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$是一个单值函数，其图形是上半椭圆；$y=$

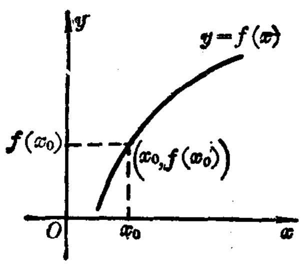

图 1.4

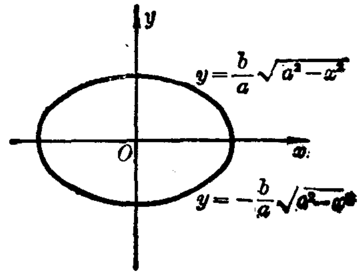

图 1.5

$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 是一个单值函数，其图形是下半椭圆(图 1.5)。

习　题　1.1

1. 如果 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(a+b)$。

2. 如果 $f(x)=\frac{1}{x}$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$。

3. 如果 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$。

4. 如果

$$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1;\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

求 $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f(0)$, $f(3)$。

5. 如果 $\psi(x)=\ln x$，证明 $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$。

6. 如果 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$。

7. 如果 $F(x)=e^x$，证明 $F(x+y)=F(x)\cdot F(y)$; $F(x-y)=\frac{F(x)}{F(y)}$。

8. 指出下列函数的定义域，对应规律，值域。

   (1) $y=\sqrt{3x+4}$;

   (2) $y=\lg(2x-1)$。

9. 求下表中各函数的定义域。

函　　数	定 义 域
$y=\sqrt{-x^2}$	
$y=\sqrt{(-x)^2}$	
$y=\arcsin(\sin x)$	
$y=\sin(\arcsin x)$	
$y=10^{\lg x}$	
$y=\lg 10^x$	

10. 求函数 $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域。

11. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1;\\ 1, & x>1\end{cases}$$ 的定义域和值域。

12. 求函数

$$y=\begin{cases}x^2+1, & -1<x\leqslant 2;\\ x^3-1, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$ 的定义域。

13. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ 求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)$; $(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)$. $(a>0)$.

14. 在下列各题中，$f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是否表示同一个函数，为什么？在那一个区间内，它们是同一个函数:

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$, $\phi(x)=1$; (2) $f(x)=x$, $\phi(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=x$, $\phi(x)=\sqrt{x^2}$; (4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $\phi(x)=1$.

15. 某公共汽车路线全长为 20 里，票价规定如下：乘坐不满 4 里者收费 5 分；乘坐 4～10 里者收费 1 角；超过 10 里者收费 1 角 5 分. 将票价表示为路程的函数，求定义域并作图形.

16. 火车站托运行李收费的规定是：当行李不超过 50 公斤时，按基本运费计算，每公斤收 0.15 元，当超过 50 公斤时，超重部分按每公斤收 0.25 元，但最多不能超过 M 公斤($M>50$)，求运费 y(元)与重量 x(公斤)的函数关系，并求定义域且作图形.

17. 求证 $|x|=x\operatorname{sgn}x$，并作 $y=x\operatorname{sgn}x$ 的图.

习 题 答 案

1. $0, -4, \frac{|a-2|}{a+1}, \frac{|a+b-2|}{a+b-1}$. **2**. $-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$. **3**. t^6+1, t^6+2t^3+1. **4**. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$. **8**. (1) $D=\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $R=[0, +\infty)$, x 乘 3，再加 4 开平方根. (2) $D=\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $R=(-\infty, +\infty)$, x 乘 2 减 1 再取 10 为底的对数. **9**. (1) $D=\{0\}$, (2) $D=(-\infty, +\infty)$, (3) $D=(-\infty, +\infty)$, (4) $D=[-1, 1]$ (5) $D=(0, +\infty)$, (6) $D=(-\infty, +\infty)$. **10**. $D=[-2, 1]$. **11**. $D=(0, 1)\cup(1, +\infty)$, $R=\{-1, 1\}$. **12**. $D=(-1, 4]$. **13**. (1) $D=[0, 1]$, (2) $D=[2n\pi, (2n+1)\pi]$，其中 n 为整数. (3) $D=[-a, 1-a]$, (4) $D=[-a, 1-a]\cap[a, 1+a]$. **14**. (1) 不是同一个函数，当 $x\neq 0$ 时，为同一个函数. (2) 不是同一个函数，当 $x\geqslant 0$ 时，为同一个函数. (3) 不是同一个函数，当 $x\geqslant 0$ 时，为同一个函数. (4) 是同一个函数. **15**. $y=0.5$, $0<x<4$; $y=1$, $4\leqslant x\leqslant 10$; $y=1.5$, $10<x\leqslant 20$, $D=(0, 20]$. **16**. $y=0.15x$, $0<x\leqslant 50$; $y=7.5+0.25(x-50)$, $50<x\leqslant M$, $D=(0, M]$.

1.2 函数的几种特性

1. 奇偶性

定义 设有函数 $y=f(x)$，如果对于定义域 X 内任意 x，都有 $-x\in X$，且 $f(-x)=f(x)$. 称函数 $y=f(x)$ 为*偶函数*.

偶函数的定义域对称原点. x 和 $-x$ 处的函数值相等，其图形关于 y 轴对称(图 1.6).

利用定义证明函数 $f(x)$ 是偶函数的方法是:

(1) 定义域关于原点对称或对称区间 $[-l, l]$;

(2) 等式 $f(-x)=f(x)$ 在定义域上成立.