数理化自学丛书

第二版

代　数

第一册

赵宪初 编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是《数理化自学丛书》第二版中的代数第一册，内容包括有理数、代数式、整式的运算、因式分解、分式的变形和运算、数的进位制等六章，只要具备算术的基本知识即可阅读．书中在一些重要的地方都作了直观的反复说明或分析，并附有大量例题、习题、复习题、测验题，供练习巩固之用，书末还附有答案．

本书可供青年工人，知识青年，在职干部自学，也可供中等学校教师参考．

数 理 化 自 学 丛 书

第 二 版

代 数

第 一 册

赵宪初 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

（上 海 瑞 金 二 路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张 10　字数 262,000

1963 年 10 月第 1 版

1982 年 10 月第 2 版　1983 年 7 月第 11 次印刷

印数 919,601—1,079,600

统一书号：13119·533　定价：（科二）0.70 元

目　　录

1

有 理 数

读者们都学过了算术．我们现在要开始学习代数了．代数和算术，虽然是数学的两门分科，但它们却是紧密地联系着的．算术里有许多内容，都是在学习代数时必须用到而且经常要用到的，因此，我们在开始学习代数的时候，先来复习一下算术里学过的一些有关数的运算知识．

§1·1 算术里有关数的运算知识

1. 算术里学过的数

算术里学过哪一些数呢？我们先来看一看下面这些数：

(1) 1, 2, 3, 5, 16, 30, 132, 478;

(2) 0;

(3) 3.5, 0.326, 0.0037, 364.24;

(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{13}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{13}{7}$.

在第一类数里，1, 2, 3, 5, 16 等，它们都是在我们按照 1, 2, 3, 4, 5, 6, … 这样的次序一个一个顺次数数时会数到的．这样的数叫做**自然数**．自然数的个数是无限多的．对于任何一个自然数来说，总还有比它更大的自然数．

第二类数只有一个，就是 0，读做“零”．零不是自然数．

第一类和第二类数都叫做整数，也就是说，**自然数和零**

都是整数.

第三类数 3.5, 0.326, 0.0037 等叫做小数, 小数里的圆点叫做小数点.

第四类数 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{13}$, $1\frac{2}{3}$ 等叫做分数. 各个分数中间的一条横线叫做分数线, 分数线上面的数叫做分子, 分数线下面的数叫做分母.

在算术里所学过的小数, 实际上就是分母为 10, 100, 1000, … 的分数. 例如, 3.5就是 $3\frac{5}{10}$, 0.326 就是 $\frac{326}{1000}$, 0.0037 就是 $\frac{37}{10000}$, 364.24 就是 $364\frac{24}{100}$. 所以我们说: 算术里所学过的数就是整数和分数.

2. 算术里学过的运算

(1) 四种基本运算: 我们在算术里学过哪几种运算呢?

我们学过四种运算, 就是加法、减法、乘法和除法. 这四种运算, 总起来叫做四则运算.

加法是求两个数的和的运算. 这两个数都叫做加数. 如 $3+5=8$, 就是

加数甲＋加数乙＝和.

任意两个数, 总可以相加, 求出它们的和.

减法是已知两个加数的和与其中一个加数求另一个加数的运算. 已知的和叫做被减数, 已知的一个加数叫做减数, 所求的另一个加数叫做差. 如 $8-5=3$, 就是

被减数－减数＝差.

在算术里, 减法不是一定可以进行的. 只有当减数小于或者等于被减数的时候, 减法才能够进行. 如果减数大于被减数, 如 $3-4$, 在算术里, 这个减法就不能做.

乘法是求两个数的积的运算. 这两个数中的一个叫做

被乘数，另一个叫做乘数，也可以把这两个数都叫做因数。如 $8\times5=40$，这里是

被乘数×乘数＝积；

或

因数甲×因数乙＝积.

任意两个数，总可以相乘，求出它们的积.

除法是已知两个因数的积与其中一个因数求另一个因数的运算. 已知的积叫做被除数，已知的一个因数叫做除数，所求的另一个因数叫做商. 如 $40\div5=8$，就是

被除数÷除数＝商.

当我们只学到整数的时候，除法不一定可以除尽. 例如 $16\div3$ 就不能除尽，只能得到部分的商 5，同时得余数 1. 但当我们学习了分数以后，那末只要除数不是零，除法就总可以进行. 例如

$$16\div3=5\frac{1}{3}.$$

零不能作为除数，因为零和任何数相乘所得的结果都等于零，所以用零作为除数是没有意义的.

(2) 逆运算关系：**减法是加法的逆运算**. 被减数就是减数与差的和. 例如 $13-5=8$，$13=5+8$.

除法是乘法的逆运算. 被除数就是除数与商的积. 例如 $40\div5=8$，$40=5\times8$.

3. 算术里学过的运算符号和关系符号

在算术里，我们学过下面这三类符号：

(1) 有关运算种类的符号：

加号	$+$	读做“加”，或“加上”；
减号	$-$	读做“减”，或“减去”；
乘号	$\times$	读做“乘以”；
除号	$\div$	读做“除以”.

注　除号的读法要特别注意，有人读做"除"，那是不确切的．如 $16\div2$，应该读做"十六除以二"，不要读做"十六除二"．我们要养成正确读出符号的习惯．

分数里把分子分母隔开的这条"分数线"，实际上也是一个除号．例如 $\frac{11}{12}$，实际上就是 $11\div12$．

(2) 有关运算顺序的符号：括号．括号是用来表示运算顺序的一种符号．括号有小括号(　)、中括号[　]和大括号{　}．

注　有些书中还应用"括线"，例如 $\{[(3-\overline{5-4})\times8+3]\times2+1\}\times3+5$，小括号里边 $\overline{5-4}$ 上面的一条线就是括线，表示 $5-4$ 要先进行运算．

在分数里的分数线，既有除号的意义，有时也带有括号的意义．例如 $\frac{25-4}{8+6}$，$25-4$ 与 $8+6$ 都要先做，然后再把分子除以分母，这里的分数线就既有除号的意义，又有括号的意义．在繁分数里，我们还要依照分数线的长短来确定运算次序的先后，例如 $\dfrac{32}{\frac{4}{2}}$ 就是 $32\div(4\div2)=32\div2=16$，而 $\dfrac{\frac{32}{4}}{2}$ 就是 $(32\div4)\div2=8\div2=4$．这里两条分数线的长短，就相当于括号的区别了．

(3) 数的大小关系的符号：在算术里，我们学习过三种关于数的大小关系的符号：

等　号	$=$	**读做"等于"．**	**例如** $3+5=8$．
大于号	$>$	**读做"大于"．**	**例如** $5>2$．
小于号	$<$	**读做"小于"．**	**例如** $1<4$．

算术里学过的运算顺序的规定

在一个包含几种运算的式子里，对运算的先后次序，有下面这些规定：

(1) 在一个没有括号的算式里，如果只含有加减运算

(叫做第一级运算)，或者只含有乘除运算(叫做第二级运算)，应该从左往右依次运算.

(2) 在一个没有括号的算式里，如果既含有第一级运算，也含有第二级运算，应该先做第二级运算(乘、除)，后做第一级运算(加、减). 简单说起来，就叫做"**先乘除、后加减**".

(3) 一个算式里有括号的，括号里面的运算要先做. 如果有几种括号，先算最里层的小括号里面的运算，再算较外面的中括号里面的运算，最后才算最外面的大括号里面的运算. 如果括号里面也有几种运算，同样按照上面(1)、(2)两条规定的次序进行演算.

5. 四舍五入法和近似小数

在算术里，我们还学习过四舍五入法和近似小数，例如把小数 1.34596 用四舍五入法可以得到:

精确到一位小数的近似小数　1.3;

精确到二位小数的近似小数　1.35;

精确到四位小数的近似小数　1.3460.

在运用四舍五入法时，要注意两点:

(1) 是舍或入，主要是看要求得到的小数位的下一位数，因此不能把 1.34596 先化到 1.35，再化到 1.4，这样做是错误的.

(2) 四舍五入后，如果最后的一位数字是 0，要保留下来，不能省略，因此不能把 1.3460 省略成 1.346，这与准确小数是不同的.

在把小数四舍五入得出它的近似值时，我们经常用一个近似符号 $\approx$(或 $\doteq$).

如 $1.34596\approx1.3$. "$\approx$"读做"近似于"或"约等于".

例 1　计算: $16+5-8+100-113$.

[审题]　　这里只有第一级运算——加、减运算，按照规定(1)，运算从左到右一步一步地进行.

[解]　　$16+5-8+100-113=21-8+100-113$

$=13+100-113=113-113=0.$

例 2　　计算：$18\div3\times2\times4.$

[审题]　　这里只有第二级运算，按照规定(1)，运算从左到右一步一步进行.

[解]　　$18\div3\times2\times4=6\times2\times4=12\times4=48.$

例 3　　计算：$540\div18+5\times64-40\div2.$

[审题]　　这里既有第一级运算，又有第二级运算，按照规定(2)，先做乘除，后做加减.

[解]　　$540\div18+5\times64-40\div2=30+320-20$

$=350-20=330.$

例 4　　计算：$8-\{7-[6-(5-1)-2]-1\}.$

[审题]　　这里有三层括号，先做小括号里面的运算，再做中括号里面的运算，然后做大括号里面的运算，最后做括号外面的运算．每一次把括号内的式子算出结果以后，这个括号就失去作用，可以不必再写了.

[解]　　$8-\{7-[6-(5-1)-2]-1\}$

$=8-\{7-[6-4-2]-1\}$

$=8-\{7-0-1\}=8-6=2.$

例 5　计算：$\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right)\div3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]\div8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}.$

[解]　　$\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right)\div3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]\div8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}$

$=\left[4\frac{1}{6}\div3\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right]\div8\frac{8}{9}+\frac{1}{4}$

$=\left[\frac{25}{6}\times\frac{4}{15}-\frac{2}{5}\right]\div\frac{80}{9}+\frac{1}{4}$

$$=\left[\frac{10}{9}-\frac{2}{5}\right]\div\frac{80}{9}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{32}{45}\times\frac{9}{80}+\frac{1}{4}=\frac{2}{25}+\frac{1}{4}=\frac{33}{100}.$$

〔注意〕　分数的加减法里，如果原有的分母不相同，必须先进行通分. 在乘除运算中，各个带分数要化成假分数，并须随时注意约分，化成最简分数.

例 6　计算：$\dfrac{3+\dfrac{1}{7}}{5-\dfrac{1}{3}}$.

[审题]　这是繁分数，中间的分数线兼有括号的作用，所以 $3+\frac{1}{7}$ 的加法与 $5-\frac{1}{3}$ 的减法都要先做.

[解]　$$\frac{3+\dfrac{1}{7}}{5-\dfrac{1}{3}}=\frac{\dfrac{22}{7}}{\dfrac{14}{3}}=\frac{22}{7}\div\frac{14}{3}=\frac{22}{7}\times\frac{3}{14}=\frac{33}{49}.$$

例 7　计算：$\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times 0.4+1\frac{1}{8}$.

[审题]　这个算式里既有分数又有小数，因为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{8}$ 都可以化做有限小数，所以这个题目可以用两种方法来计算：(1) 把小数先化成分数后再算；(2) 把分数先化成小数后再算.

[解 1]　化成分数做：

$$\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times 0.4+1\frac{1}{8}$$

$$=\left(5\frac{1}{2}-\frac{37}{100}\right)\times\frac{4}{10}+1\frac{1}{8}$$

$$=5\frac{13}{100}\times\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}=\frac{513}{100}\times\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}$$

$$=\frac{513}{250}+1\frac{1}{8}=2\frac{13}{250}+1\frac{1}{8}=3\frac{177}{1000}.$$

[解 2] 化成小数做：

$$\left(5\frac{1}{2}-0.37\right)\times0.4+1\frac{1}{8}$$
$$=(5.5-0.37)\times0.4+1.125$$
$$=5.13\times0.4+1.125$$
$$=2.052+1.125=3.177.$$

例 8 计算：$\left(3\frac{1}{3}+0.33\right)\times\frac{1}{2}-1.35.$

[审题] 这里 $\frac{1}{3}$ 不能化成有限小数，所以要先把小数化成分数后再算.

[解]

$$\left(3\frac{1}{3}+0.33\right)\times\frac{1}{2}-1.35$$
$$=\left(3\frac{1}{3}+\frac{33}{100}\right)\times\frac{1}{2}-1\frac{35}{100}$$
$$=3\frac{199}{300}\times\frac{1}{2}-1\frac{35}{100}=\frac{1099}{300}\times\frac{1}{2}-\frac{135}{100}$$
$$=\frac{1099}{600}-\frac{810}{600}=\frac{289}{600}.$$

习题 1·1

回答下列问题(1～7)：

1. 写出三个自然数. 写出最小的自然数. 有没有最大的自然数?
2. 在算术里，“整数”和“自然数”这两个名称有没有区别? 有什么区别?
3. 写出四个分数，其中两个是真分数，两个是假分数. $\frac{3}{3}$ 是真分数还是假分数?
4. 写出三个繁分数，其中一个的分母是整数，分子是分数；另一个的分母是分数，分子是整数；还有一个的分母分子都是分数. 再把它们化成普通分数.
5. 写出三个小数，并把它们化成分数.
6. 在算术里，加法、乘法、减法、除法是不是总可以进行? 哪些运算在怎样的情况下不能进行?

7. 零可以做除数吗？零可以做被除数吗？

计算(8～20)：

8. $328+672\div(72\div9\times4)$.

9. $(56+44)\times0+1\div1+0\div100+9$.

10. $1+2\times\{2+3\times[3+4\times(4+5\times6)\times7\div8]-9\}$.

11. $18\div\left\{1-\left[\frac{2}{5}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}\right]\right\}$.

12. $\left(13\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}\times1+5\frac{5}{12}\div2\frac{1}{6}\right)\times\frac{3}{37}$.

13. $3.6+43.05+1.8-13.08-4.87$.

14. $7.5\times15.2\div(38\times2.5\times0.06)$.

15. $(3.54-2.54\times0.7)\times1.2$.

16. $\left[\left(\frac{1}{2}+0.3\right)\times0.5+\frac{1}{4}\times0.16\right]\div11$.

17. $0.3\times0.2-\frac{1}{7}\times0.15$.

18. $\dfrac{3}{\frac{2}{5}}-\dfrac{\frac{3}{2}}{5}$.　　　　19. $\dfrac{\frac{1}{3}}{5}\div\dfrac{1}{\frac{3}{5}}$.

20. $\left(1-\dfrac{426}{697}+\dfrac{2\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}\right)\div\dfrac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}$.

21. 把下列小数四舍五入到二位小数：

(1) 0.3649.　　　　(2) 4.5974.

22. 51 是 72 的百分之几(精确到 1%)？

23. 42 比 36 多百分之几？36 比 42 少百分之几(精确到 0.1%)？

§1·2 负数的引进

让我们看这样的问题：

在温度计上，某一天下午的温度是 7°（通常记为 7°C，以下 C 省去）. 如果半夜里的温度比下午的温度下降 6°，那末半夜里的温度是多少呢？

这个问题很容易做，只要用减法，得

$$7-6=1,$$

就可以知道半夜的温度是 $1°$.

现在让我们再看一个类似的问题：

在温度计上，某一天下午的温度是 $3°$，如果半夜里的温度比下午的温度下降 $4°$，那末半夜里的温度是多少呢？

这个问题和上面问题的性质是一样的. 照理它也可以用减法来解. 但是，如果我们列出式子，就得到 $3-4$. 这里被减数小于减数，在算术里这个算式是没有意义的.

这个问题到底有没有意义呢？

在实际生活中，我们都了解这个问题是有意义的. 从 $3°$ 下降 $4°$，半夜里的温度是零下 $1°$.

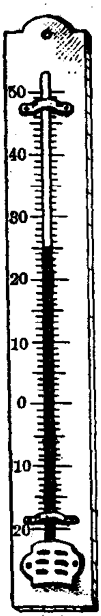

图 1·1

从温度计上，我们知道，有零上 $1°$，也有零下 $1°$，虽然同样是 $1°$，实际意义是不同的. 要说明它们之间的区别，必须说明是"零上"还是"零下".

如果我们想省去"零上""零下"这些字眼，而又不使零上的度数与零下的度数混淆不清，那么，除了原有算术里所学过的数以外，还需要引进新的数来解决这个问题.

我们采用原有的算术里的数来表示零和零上的度数，如零度写成 $0°$，零上 1 度写成 $1°$，把原来算术里的数的前面加上一个符号"$-$"(读做"负")来表示零下的度数，如零下 1 度就写成 $-1°$，零下 20 度就写成 $-20°$. 这里 -1, -20 是一种新的数，叫做**负数**. 在引进了负数以后，我们把算术里学过的数，除了 0 以外，都叫做**正数**. 为了使正数与负数区别清楚起见，我们也可以在正数的前面加上一个符号"$+$"(读做"正")，如 20 写成 $+20$，1 写成 $+1$ 等.

$+30$ 读做正三十，-30 读做负三十，正数前面的"$+$"

号叫做“正号”，负数前面的“－”号叫做“负号”.

注　正号“＋”和负号“－”，它们指出数的性质，所以把它们叫做性质符号.

$+1$，-1，$+20$，-20 这些数是不是只有温度计里用得到呢？让我们再看一个例子.

某人在一条公路上骑自行车要从甲地到乙地. 有人告诉他要行 20 公里路程. 这个人骑自行车走了 20 公里之后一问，并没有到达乙地，却和乙地相差 40 公里了.

为什么会这样呢？

原来他走错了一个方向. 从甲地到乙地，应该是往东走的，但他却往西走，所以越走越远了.

从这里可以看出有一个方向的问题. 例如向东和向西是两个相反的方向，同样走 20 公里路，方向不同，效果就完全不一样. 向东走 20 公里和向西走 20 公里是两个具有相反方向的量，这和温度计上零上与零下的温度是两个具有相反方向的量一样. 为了表示路程及其方向，我们可以象温度计上的度数一样，指定一个方向作为正方向，譬如把向东作为正方向，那末向东的 20 公里就用 $+20$ 公里或 20 公里来表示，读做正二十公里，把相反的方向向西的 20 公里用 -20 公里来表示，读做负二十公里，这样，相反的方向就可以区别开来了.

在生活实践中，具有两种相反方向或两种相反意义的量是很多的，都可以用正数和负数来表示. 例如，把高出海面的高度作为正方向，那末某一个高山高出海面 7000 米可以写做高度是 $+7000$ 米或 7000 米，另一个低地低于海面 100 米可以写做高度是 -100 米；又如把收入当做正，支出当做负. 某人每月工资收入 60 元可以写做 $+60$ 元，生活支出 20 元可以写做 -20 元等. 具有相反意义或相反方向的量是很多的，因此负数的应用是非常广泛的.