高等学校教材

离散数学

方世昌 编

西安电子科技大学出版社

高 等 学 校 教 材

离 散 数 学

方世昌 编

西安电子科技大学出版社

1 9 9 5

(陕)新登字010号

内容简介

本书介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识，共八章，包括数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数、格与布尔代数、图论等，并含有较多的与计算机科学和工程有关的例题和习题。本书适合于高等理工科院校计算机科学、工程和应用专业作教材，也可供教师、研究生、高年级学生和有关工程技术人员作参考书。

高等学校教材
离 散 数 学
方世昌 编

西安电子科技大学出版社出版
（原西北电讯工程学院出版社）
西安电子科技大学印刷厂印刷
陕西省新华书店发行　各地新华书店经售
开本 787×1092 1/16　印张 19 10/16　字数 473 千字
1985 年 6 月第 1 版　1995 年 7 月第 10 次印刷　印数 67 051—77 050

ISBN 7-5606-0007-7/O·0001
统一书号：15322·79
定价：12.50 元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二 ～ 一九八五年教材编审出版规划。列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系由电子工业部计算机与自动控制教材编审委员会工科电子类计算机教材编审小组评选审定，并推荐出版。由中国人民解放军通信工程学院方世昌编写，上海交通大学左孝凌担任主审。

教材介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识，主要内容有数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数系统、格与布尔代数、图论等。教材均按工科电子类计算机教材编审小组审定的大纲进行编写和审阅。故适合于工科大学计算机专业作为教材。

鉴于离散数学在现代科学中的重要性日益增加，它不仅是计算机专业的必修课程，也为其它某些专业和工程技术人员所必需。所以，书中内容的阐述较为详尽，力求深入浅出，适于自学。

教完全书约需110小时，毋需特殊先修知识，但在大学二、三年级开设较好。书中习题数量较多，可选做二分之一，但勿少于三分之一。

打*的节和小节大多是为了扩展知识的深广度而列入，或为了某些专业特殊需要而列入。在课时不充裕的情况下，宜略去，不会影响后继内容的学习。

打*的习题是较难的题，供优秀学生选做，可不作要求。

本书在编写过程中得到南京工学院王能斌、杨祥金老师的指导和帮助，他们审阅了全部稿件，提出许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编者　1983年12月24日

符 号 表

逻 辑

1. $\neg P$　非 P
2. $P\vee Q$　P 或 Q
3. $P\wedge Q$　P 并且 Q
4. $P\longrightarrow Q$　P 蕴涵 Q
5. $P\longleftrightarrow Q$　P 等值于 Q
6. $P\Longrightarrow Q$　P 永真蕴涵 Q
7. $P\Longleftrightarrow Q$　P 恒等于 Q
8. $\forall$　全称量词
9. $\exists$　存在量词
10. $\exists\,!$　存在唯一的…

集 合

1. $a\in A$　a 是集合 A 的元素(a 属于A)
2. $a\notin A$　a 不属于 A
3. $A\subseteq B$　集合 A 包含于集合 B 中
4. $A\subset B$　集合 A 真包含于集合B 中
5. $\varnothing$　空集合
6. U　全集合（论述域）
7. $A\cup B$　集合 A 和集合 B 的并
8. $A\cap B$　集合 A 和集合 B 的交
9. $A-B$　集合 B 关于集合 A 的相对补
10. $\overline{A}$　集合 A 的绝对补
11. $\rho(A)$　A 的幂集合
12. $\bigcup_{i\in S} A_i$　$\{x\mid\exists i(i\in S\wedge x\in A_i)\}$
13. $\bigcap_{i\in S} A_i$　$\{x\mid\forall_i(i\in S\longrightarrow x\in A_i)\}$
14. $A\times B$　A 和 B 的笛卡儿乘积
15. $\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$　A_1 到 A_n 的笛卡儿乘积
16. $\langle a_1,a_2,\cdots a_n\rangle$有序 n 重组

字 符 串 集 合

1. Σ　字母表
2. Λ　空串
3. $\|x\|$　串 x 的长度
4. Σ^+　字母表 Σ 上的所有非零有限长度的串的集合
5. Σ^*　$\{\Lambda\}\cup\Sigma^+$
6. AB　连结积$\{xy\mid x\in A\wedge y\in B\}$
7. A^n　$\{x_1x_2,\cdots x_n\mid x_i\in A\}$
8. A^+　$\bigcup_{i\in I+} A^i$
9. A^*　$\bigcup_{i\in N} A^i$

数

1. $\lceil x\rceil$　x 的顶函数，即数 n，$x\leqslant n< x+1$
2. $\lfloor x\rfloor$　x 的底函数，即数 n，$x-1< n\leqslant x$
3. N　自然数集合$\{0,1,2,\cdots\}$
4. I　整数集合

5.	I_+	正整数集合	6.	Q	有理数集合
7.	Q_+	正有理数集合	8.	R	实数集合
9.	R_+	正实数集合	10.	(a,b)	$\{x \mid x\in R\wedge a<x<b\}$
11.	$[a,b]$	$\{x \mid x\in R\wedge a\leqslant x\leqslant b\}$	12.	$(a,b]$	$\{x \mid x\in R\wedge a<x\leqslant b\}$
13.	$[a,b)$	$\{x \mid x\in R\wedge a\leqslant x<b\}$	14.	(a,∞)	$\{x \mid x\in R\wedge x>a\}$
15.	$[a,\infty)$	$\{x \mid x\in R\wedge x\geqslant a\}$	16.	N_k	$\{0,1,2,\cdots k-1\}$

关 系 和 划 分

1.	aRb	a 对 b 有关系 R	2.	$a\not R b$	a 对 b 没有关系 R
3.	I_A或E_A	集合A上的相等关系	4.	$\langle A,R\rangle$	集合 A 上关系 R 的有向图
5.	$R_1\cdot R_2$	R_1 和 R_2 的合成关系	6.	R^n	关系 R自身 n 次合成
7.	$r(R)$	关系R 的自反闭包	8.	$s(R)$	关系R 的对称闭包
9.	$t(R)$	关系R 的传递闭包	10.	$\widetilde{R}$	关系R 的逆关系
11.	R^+	$t(R)$	12.	R^*	$rt(R)$
13.	$\preccurlyeq$	偏序	14.	$\prec$	拟序
15.	$a\equiv b(\mathrm{mod}\ k)$	a 与 b 模 k 等价	16.	$[a]_R$	在等价关系 R 下，a 的等价类
17.	π	划分	18.	A/R	等价关系R 诱导的 A的划分
19.	$\pi_1+\pi_2$	划分 π_1 与 π_2 的和	20.	$\pi_1\cdot\pi_2$	划分 π_1 与 π_2 的积

函 数

1.	$f(a)$	函数 f 对于自变元 a 的值	2.	$f:A\longrightarrow B$	具有前域A 陪域B 的函数 f
3.	$f(A)$	在映射f 下，集合A 的象	4.	$f\cdot g$	函数g 和f 的合成
5.	A^B	从集合B 到集合A 的所有函数的集合	6.	1_A或I_A	A 上的恒等函数
7.	f^{-1}	函数f 的逆函数	8.	$f^{-1}(A)$	在函数f 下A 的原象
9.	$f\|_A$	函数 f 到集合A 的限制	10.	Ψ_A	集合A 的特征函数
11.	$P_1\diamondsuit P_2$	置换 P_1 和 P_2 右合成			

基 数

1.	$\|A\|$	集合A 的基数	2.	$\aleph_0$	N的基数（读做阿列夫零）
3.	C	$[0,1]$的基数			

代数和布尔代数

1.	$\langle A, \circ, \Delta, k\rangle$	具有载体 A，二元运算 $\circ$，一元运算 Δ，常数 k 的代数
2.	$+_k$	模 k 加法
3.	$\times_k$	模 k 乘法
4.	$A \times A'$	代数 A 和 A' 的积代数
5.	$A/\sim$	代数 A 在同余关系 $\sim$ 下的商代数
6.	$\text{lub}(A)$	集合 A 的最小上界
7.	$\text{glb}(A)$	集合 A 的最大下界

图　论

1.	$\langle V, E\rangle$	具有顶点集合 V 和边集 E 的图
2.	$\langle a, b\rangle$	从结点 a 到结点 b 的有向边
3.	(a, b)	从结点 a 到结点 b 的无向边
4.	$[a, b]$	结点 a 和 b 之间的边
5.	$\deg(v)$	顶点 v 的度数（次数）
6.	$W(i, j)$	边 $[i, j]$ 的权
7.	Φ	流
8.	$(P, \overline{P})$	割

目　录

第一章 数理逻辑

逻辑是研究推理的科学，分为形式逻辑和辩证逻辑。数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑的一门科学，也就是用数学方法研究推理的科学。所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑。现代数理逻辑有四大分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论。我们介绍它们的共同基础——命题演算和谓词演算，即一般所谓古典数理逻辑。

§1.1 命　　题

1.1.1 命题

断言是一陈述语句。一个**命题**是一个或真或假而不能两者都是的断言㊀。如果命题是真，我们说它的**真值**为**真**；如果命题是假，我们说它的真值是**假**。

例 1 下述都是命题：

(*a*) 今天下雪；

(*b*) $3+3=6$；

(*c*) 2 是偶数而 3 是奇数；

(*d*) 陈涉起义那天，杭州下雨；

(*e*) 较大的偶数都可表为二个质数之和。

以上命题，(*a*) 的真值取决于今天的天气，(*b*)和(*c*) 是真，(*d*) 已无法查明它的真值，但它是或真或假的，将它归属于命题。(*e*) 还难以确定真假，但它是有真值的，应归属于命题。

例 2 下述都不是命题：

(*a*) $x+y>4$。　　(*c*) 真好啊！

(*b*) $x=3$。　　(*d*) 你去哪里？

(*a*)和(*b*)是断言，但不是命题，因为它的真值取决于 x 和 y 的值。(*c*)和(*d*) 都不是断言，所以不是命题。下边我们再看一个例子。

例 3 一个人说："我正在说谎"。

他是在说谎还是在说真话呢？如果他是说谎，那末他说的是假；因为他领认他是说谎，所以他实际上是在说真话，我们得出结论如果他是说谎，那末他是讲真话。另一方面，如果他讲真话，那末他所说的是真，也就是他在说谎。我们得出结论如果他讲真话，那末他是在说谎。

㊀ 在一个系统中，命题的真值必须是真或假，则称系统的逻辑是**二值的**。它的特征"一个命题非真即假，反之亦然"。即是所知的排中律。我们所讨论的是**二值逻辑**，但亦有多于二个真值的逻辑系统。

从以上分析，我们得出他必须既非说谎也不是讲真话。这样，断言**“我正在说谎”**事实上不能指定它的真假，所以不是命题。这种断言叫**悖论**。

若一个命题已不能分解成更简单的命题，则这个命题叫**原子命题**或**本原命题**。例1中(a)(b)(d)(e)都是本原命题，但(c)不是，因为它可写成“2是偶数”和“3是奇数”二个命题。

命题和本原命题常用大写字母P、Q、R…表示。如用P表示“4是质数”，则记为

P：4是质数。

1.1.2 命题联结词

命题和原子命题常可通过一些联结词构成新命题，这种新命题叫**复合命题**。例如

P：明天下雪，　　　Q：明天下雨

是两个命题，利用联结词“不”，“并且”，“或”等可分别构成新命题：

“明天不下雪”；

“明天下雪并且明天下雨”；

“明天下雪或者明天下雨”等。

即

“非P”；

“P并且Q”；

“P或Q”等。

在代数式$x+3$中，x、3叫运算对象，+叫运算符，$x+3$表示运算结果。在命题演算中，也用同样术语。联结词就是命题演算中的运算符，叫**逻辑运算符**或叫**逻辑联结词**。常用的有以下五个。

1. 否定词$\neg$

设P表示命题，那末“P不真”是另一命题，表示为$\neg P$，叫做P的**否定**，读做“非P”。从排中律知：如果P是假，则$\neg P$是真，反之亦然。所以否定词$\neg$可以定义如右：

P	$\neg P$
假	真
真	假

这张表叫**真值表**，定义运算符的真值表，指明如何用运算对象的真值，来决定一个应用运算符的命题的真值。真值表的左边列出运算对象的真值的所有可能组合，结果命题的真值列在最右边的一列。为了便于阅读，我们通常用符号T(true)或1代表真，符号F(false)或0代表假。一般在公式中采用T和F，在真值表中采用1和0。这样，以上真值表可写成

P	$\neg P$
0	1
1	0

例4

(a) P：4是质数。

$\neg P$：4不是质数，或4是质数，不是这样。

(b) Q：这些都是男同学。

$\neg Q$：这些不都是男同学。（翻译成“这些都不是男同学”是错的。）

2. 合取词$\wedge$

如果P和Q是命题，那末“P并且Q”也是一命题，记为$P\wedge Q$，称为P和Q的**合取**，读做

"P与Q"或"P并且Q"。运算符$\wedge$定义如右：
真值表定义$P\wedge Q$是真当且仅当P和Q俱真。

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 5 P：王华的成绩很好，Q：王华的品德很好。$P\wedge Q$：王华的成绩很好并且品德很好。

3． 析取词$\vee$

如果P和Q是命题，则"P或Q"也是一命题，记作$P\vee Q$，称为P和Q的**析取**，读做"P或Q"。运算符$\vee$定义如右：
从真值表可知如果P或Q至少有一为真，则$P\vee Q$为真。

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 6

(a) P：今晚我写字，Q：今晚我看书。

$P\vee Q$：今晚我写字或看书

"或"字常见的含义有两种，一种是"可兼或"，如上例中的或，它不排除今晚既看书又写字这种情况。一种是"排斥或"，例如"人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛"中的"或"，它表示非此即彼，不可得兼。运算符$\vee$表示可兼或，排斥或以后用另一符号表达。

(b) P：今年是闰年，Q：今年她生孩子。

$P\vee Q$：今年是闰年或者今年她生孩子。

逻辑运算符可以把两个无关的命题联结成一新命题，作如此规定是因为有关和无关的界线难以划分，而如此规定不会妨碍应用。

4． 蕴涵词$\longrightarrow$（涵常简写作含）

如果P和Q是命题，那末"P蕴含Q"也是命题，记为$P\longrightarrow Q$，称为**蕴含式**，读做"P蕴含Q"或"若P则Q"。运算对象P叫做**前提**，**假设**或**前件**，而Q叫做**结论**或**后件**。运算符$\longrightarrow$定义如右：

命题$P\longrightarrow Q$是假，仅当P是真而Q是假。蕴含式$P\longrightarrow Q$可以用多种方式陈述：

P	Q	$P\longrightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

"如果P，那末Q"； "P是Q的充分条件"；
"P仅当Q"； "Q是P的必要条件"等。
"Q每当P"；

例 7

(a) P：天不下雨，Q：草木枯黄。

$P\longrightarrow Q$：如果天不下雨，那末草木枯黄。

(b) R：他是大学生，S：他会一门外语。

$R\longrightarrow S$：如果他是大学生，那末他会一门外语。

(c) T：桔子是紫色的，V：大地是不平的。

$T\longrightarrow V$：如果桔子是紫色的，那末大地是不平的。

在日常生活中用蕴含式来断言前提和结论之间的因果或实质关系，如上例(a)和(b)，这样的蕴含式叫**形式蕴含**。然而，在命题演算中，一个蕴含式的前提并不需要联系到结论，这

样的蕴含式叫**实质蕴含**。如上例(c)，桔子的颜色和大地的外形之间没有因果和实质关系存在，但蕴含式$T \longrightarrow V$是真，因为前提是假而结论是真。采用实质蕴含作定义，是因为前提和结论间有无因果和实质关系难以区分，且后者已包含前者，更便于应用。

给定命题$P \longrightarrow Q$，我们把$Q \longrightarrow P$，$\neg P \longrightarrow \neg Q$，$\neg Q \longrightarrow \neg P$分别叫做命题$P \longrightarrow Q$的**逆命题**，**反命题**，**逆反命题**。

5. 等值词$\longleftrightarrow$

如果P和Q是命题，那末“P等值于Q”也是命题，记为$P \longleftrightarrow Q$，称为**等值式**，读做“P等值于Q”。运算符$\longleftrightarrow$定义如右：

P	Q	$P \longleftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

把蕴含式和等值式的真值表加以比较，易知如果$P \longleftrightarrow Q$是真，那末$P \longrightarrow Q$和$Q \longrightarrow P$俱真；反之如果$P \longrightarrow Q$和$Q \longrightarrow P$俱真，那末$P \longleftrightarrow Q$是真。由于这些理由，$P \longleftrightarrow Q$也读做“P是Q的充要条件”或“P当且仅当Q”。

从以上五个定义可看出，联结词之意义由其真值表唯一确定，而不由命题的含义确定。

使用以上五个联结词，可将一些语句翻译成逻辑符。翻译时为了减少圆括号（一般不用其它括号）的使用，我们作以下约定：

- 运算符结合力的强弱顺序为

  $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$

凡符合此顺序的，括号均可省去。

- 相同的运算符，按从左至右次序计算时，括号可省去。
- 最外层的圆括号可以省去。

例如：$(\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \longrightarrow ((R \vee P) \vee Q))$

可写成

$$\neg(P \wedge \neg Q \vee R) \longrightarrow R \vee P \vee Q$$

但有时为了看起来清楚醒目，也可以保留某些原可省去的括号。

例 8

(a) 设P表示“他有理论知识”，Q表示“他有实践经验”，则“他既有理论知识又有实践经验”可译为：$P \wedge Q$。

(b) 设P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去学校。则

(i) “如果明天不是雨夹雪则我去学校”可写成

$$\neg(P \wedge Q) \longrightarrow R$$

(ii) “如果明天不下雨并且不下雪则我去学校”可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \longrightarrow R$$

(iii) “如果明天下雨或下雪则我不去学校”可写成

$$P \vee Q \longrightarrow \neg R$$

(iv) “明天，我将雨雪无阻一定去学校”可写成

$$P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

(v) “当且仅当明天不下雪并且不下雨时我才去学校”可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \longleftrightarrow R$$

(*c*) 用逻辑符表达“说小学生编不了程序，或说小学生用不了个人计算机，那是不对的”

设 P：小学生会编程序，Q：小学生会用个人计算机。则上句可译为

$$\neg(\neg P \vee \neg Q)$$

(*d*) 用逻辑符表达“若不是他生病或出差了，我是不会同意他不参加学习”。

设 P：他生病了，Q：他出差了，R：我同意他不参加学习，则上句可译为

$$\neg(P \vee Q) \longleftrightarrow \neg R$$

或

$$P \vee Q \longleftrightarrow R$$

翻译时要按逻辑关系翻译，而不能凭字面翻。例如，设 P：林芬做作业，Q：林芳做作业，则“林芬和林芳同时做作业”可译为 $P \wedge Q$，但“林芬和林芳是姐妹”就不能翻译成两个命题的合取，它是一个原子命题。

1.1.3 命题变元和命题公式

通常，如果 P 代表真值未指定的任意命题，我们就称 P 为命题变元；如果 P 代表一个真值已指定的命题，我们就称 P 为命题常元。但由于在命题演算中并不关心具体命题的涵义，只关心其真假值。因此，我们可以形式地定义它们。

以“真”、“假”为其变域的变元，称为**命题变元**；T 和 F 称为**命题常元**。

习惯上把含有命题变元的断言称为命题公式。但这样描述过于表面，它没能指出命题公式的结构。因为不是由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式。因此在计算机科学中常用以下定义。

单个命题变元和命题常元叫**原子公式**。由以下形成规则生成的公式叫**命题公式**（简称公式）：

1. 单个原子公式是命题公式。

2. 如果 A 和 B 是命题公式，则 $(\neg A)$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \longrightarrow B)$、$(A \longleftrightarrow B)$ 是命题公式。

3. 只有有限步应用条款 1 和 2 生成的公式才是命题公式。

这种定义叫归纳定义，也叫递归定义。由这种定义产生的公式叫**合式公式**。如何构成这种定义，以后再专门叙述。

命题公式的真假值一般是不确定的。当命题公式中所有的命题变元代以命题时，命题公式就变为命题。在不产生混乱时，我们把命题公式也叫做命题。

例 9

(*a*) 说明 $(P \longrightarrow (P \vee Q))$ 是命题公式。

解 (i) P 是命题公式	根据条款 1
(ii) Q 是命题公式	根据条款 1
(iii) $(P \vee Q)$ 是命题公式	根据(i)(ii)和条款 2
(iv) $(P \longrightarrow (P \vee Q))$ 是命题公式	根据(i)(iii)和条款 2

(*b*) 以下不是命题公式，因为它们不能由形成规则得出。

$\wedge Q$, $(P\longrightarrow Q$, $P\longrightarrow\wedge Q$, $((PQ)\wedge R)$

为了减少圆括号的使用，以后手写命题公式时，可按过去的约定省略。

下面举例说明命题公式真值表的构成方法。

例 10

(*a*) $\neg((P\vee Q)\wedge P)$的真值表如下所示：

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

(*b*) 两个命题公式，如果有相同的真值，则称它们是**逻辑等价命题**。证明$P\longleftrightarrow Q$与$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$是逻辑等价命题。

证：用真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\longleftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

因后二列的真假值完全一致，所以它们是逻辑等价命题。

1.1 习　题

1．设P是命题“天下雪”；Q是命题“我去镇上”；R是命题“我有时间”。

(*a*) 用逻辑符号写出以下命题。

(i) 如天不下雪和我有时间，那末我去镇上。

(ii) 我去镇上，仅当我有时间。

(iii) 天不下雪。

(iv) 天正在下雪，我也没去镇上。

(*b*) 对下述命题用中文写出语句。

(i) $Q\longleftrightarrow(R\wedge\neg P)$

(ii) $R\wedge Q$

(iii) $(Q\longrightarrow R)\wedge(R\longrightarrow Q)$

(iv) $\neg(R\vee Q)$

2．否定下列命题。

(*a*) 上海处处清洁。

(*b*) 每一个自然数都是偶数。

3. 说出下述每一命题的逆命题和逆反命题。

(a) 如果天下雨，我将不去。

(b) 仅当你去我将逗留。

(c) 如果 n 是大于 2 的正整数，则方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解（这是至今未能证明的费尔马最后定理）。

(d) 如果我不获得更多帮助，我不能完成这个任务。.

4. 给 P 和 Q 指派真值 T，给 R 和 S 指派真值 F，求出下列命题的真值。

(a) $P\vee Q\wedge R$

(b) $P\wedge Q\wedge R\vee\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee S))$

(c) $(\neg(P\wedge Q)\vee\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\vee\neg R)\wedge S$

(d) $\neg(P\wedge Q)\vee\neg R\vee((Q\longleftrightarrow\neg P)\longrightarrow R\vee\neg S)$

(e) $(P\longleftrightarrow R)\wedge(\neg Q\longrightarrow S)$

(f) $P\vee(Q\longrightarrow R\wedge\neg P)\longleftrightarrow Q\vee\neg S$

5. 构成下列公式的真值表：

(a) $Q\wedge(P\longrightarrow Q)\longrightarrow P$

(b) $\neg(P\vee Q\wedge R)\longleftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

(c) $(P\vee Q\longrightarrow Q\wedge P)\longrightarrow P\wedge\neg R$

(d) $((\neg P\longrightarrow P\wedge\neg Q)\longrightarrow R)\wedge Q\vee\neg R$

6. 证明下列公式的真值与它们的变元值无关。

(a) $P\wedge(P\longrightarrow Q)\longrightarrow Q$

(b) $(P\longrightarrow Q)\longrightarrow(\neg P\vee Q)$

(c) $(P\longrightarrow Q)\wedge(Q\longrightarrow R)\longrightarrow(P\longrightarrow R)$

(d) $(P\longleftrightarrow Q)\longleftrightarrow(P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q)$

7. 用真值表证明如果 $P\longleftrightarrow Q$ 是真，那末 $P\longrightarrow Q$ 和 $Q\longrightarrow P$ 都真。反之，如果 $P\longrightarrow Q$ 和 $Q\longrightarrow P$ 都真，那末 $P\longleftrightarrow Q$ 是真。

8. 对 P 和 Q 的所有值，证明 $P\longrightarrow Q$ 与 $\neg P\vee Q$ 有同样真值。证明 $(P\longrightarrow Q)\longleftrightarrow(\neg P\vee Q)$ 总是真的。

9. 一个有两个运算对象的逻辑运算符，如果颠倒运算对象的次序，产生一逻辑等价命题，则称为可交换的。

(a) 确定下述逻辑运算符哪些是可交换的。$\wedge$、$\vee$、$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$。

(b) 用真值表证明你的断言。

10. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价，那末运算符 $*$ 是可结合的。

(a) 确定逻辑运算符 $\wedge$、$\vee$、$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$ 哪些是可结合的。

(b) 用真值表证明你的断言。

11. 指出以下各式哪些不是命题公式，如果是命题公式，则说明它为什么是的。

(a) $(((\neg P)\longrightarrow(P\wedge Q))\vee R)$

(b) $(PQ\vee R)$