

科學圖書大庫

# 勒普拉斯轉換法

解微分方程式

王昌銳譯

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫

版權所有

不許翻印

中華民國六十八年三月二十六日再版

## 勒普拉斯轉換法

### 解微分方程式

基本定價 1.60

譯者 王昌銳 台灣省立高雄工業專科學校教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號  
7815250 號

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

<h1 style="margin: 0;">勒普拉斯轉換法</h1> <h2 style="margin: 0;">解微分方程</h2> <h3 style="margin: 0;">筆記卡</h3>
---

1.  $\mathcal{L}\{f(t)\} = f$  \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3.  $\mathcal{L}^{-1}\{ \quad \} =$  \_\_\_\_\_

成對轉換表

	$f(t) \quad t \geq 0$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
4.		
5.	$Ae^{at}$	
6.	$A$	
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		

$n =$  正整數

12. 定 理 1:  $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} =$  \_\_\_\_\_
13. 定 理 2: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
14. 定 理 3: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
15. 定 理 4: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
16. 定 理 5: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
17. 定 理 6: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
18. 定 理 6a: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_  $t \geq 0$

## 譯 序

線性微分方程式，爲工程數學之重要部門；而解線性微分方程式，又爲電力、電子、機械等工程設計與研究之最要手段。數學家勒普拉斯所創轉換微分方程式（D. E.），爲代數方程式，以解微分方程式之L. T.方法，又爲解線性微分方程式之最佳方法。

本書爲勒普拉斯轉換法解微分方程的一種節目編排式教材，亦可說是一種“一面做，一面學”，“自己考試，自己評分”的表演式教材。教師可用於課堂講授，學生可用於個別進修。

翻開本書，即可發現其一方面於偶數頁（左方書頁），提供問題，說明作業方法，規格，與參考內容，指定學生於規定時間內，於該頁空白處或橫線上，自由書寫作業及演算內容，獲得最後答案。另一方面於奇數頁（右方書頁）之對應位置，提出問題之原案，以資學者對證。如作業錯誤，應於作業頁上各題末印好之方格中，劃一“×”號，並用紅筆改正錯誤，以利複習時，提高該題曾犯作業錯誤之警惕，如錯誤太多，即應中止進度，向前溫習，直至完全瞭解，而後繼續前進。通常規定，每十題中，不能有一題以上之錯誤，否則，應重新研究。此種編排與學習規定，如學者能竭誠合作，努力以赴，必能邊做邊學，澈底瞭解此種轉換解法真諦。

本書編排，取材，均係由簡而繁，由淺入深。頗適我國大專學生及社會人士學習微分方程參考，而爲深造及進修之良好讀物。故予遂譯，以饗同好。

書中譯名，力求通俗易曉，所有符號，除原書中以 $\epsilon$ 代常用之 $e$ ，以 $j$ 代常用之 $i$ （ $=\sqrt{-1}$ ），均仍其舊外，餘均同於通用符號。本譯稿承吾妻蔣君英女士協助整校，致得早觀其成，深致謝意，復蒙徐氏基金會諸先生斧正付梓，尤深感激。

中華民國五十八年八月穀旦  
湘潭王昌銳序於左營自強齋

## 前 言

本節目包含常線性微分方程式之勒普拉斯轉換解法介紹。其目的在確立線性體系力學研究之有效基礎。為指示研究方向及引起學習動機，遂由各種工程方面，蒐集例題。

參加本課應有之主要條件，為曾學完微積分，並具有用行列式解聯立代數方程式之能力，亦應有歐拉（Euler）關係產生之複數知識。至微分方程式系如何組成之事先介紹，雖可提供額外動機，但非必要條件。

本節目可用於教室講授，及個別自修。且曾極成功的應用於各種場合——由電工方面介紹與電路課程（未授過微分方程式。），至線性一系統分析之各種程度不一學生，均認為本節目內容，對勒普拉斯轉換解法之介紹，及技能方面之溫故知新兩端，均有裨益。

### 節目教學

著者相信，節目教學，對教學雙方，兩均有益，此非謂全部課程，均應排成節目施教，惟安排相互有利之重要概念與技能而已。對學生而言，應勿

視爲空泛，而實能提出一種適應性，和一種交互作用程度，以達成個人傳授。教者應有效保證，凡完成此節目之學生，可熟練題材處理之技巧。而後能憑其強力知識，適應課程需要，進行實驗與應用。

節目教學之基本特性，產生優點如下：

1. 學生需要全部自動參加，以“作”求“學”（Learns by doing）。
2. 教學自動前進，學生於仔細安排之步驟下，依序前進；不能依其個人領悟而一往直前；於其完成足夠之準備條件以前，亦不能着手一新的課題。
3. 規定學生對應其作業能力，繼續衡量，而手頭常有協助之資料。

此乃最少提供直覺建議，爲何節目教學，能有成就——以其係吻合學者特性與需要也。

最重要者爲節目準備，專注於計劃之工作進行；設計，測驗，再設計及研判，節目設計，在迎合奠基於學習程序知識之已予計劃或目標；其測驗於實際學習環境，詳細實施；缺點予以修正；而最後比較學生測驗（考試）結果於原始計劃，以求節目成果之研判。

## 教學方式

觀看本教材之任一頁，將發現“問題”在左，對應“答案”在右之特殊順序，學者回答每一問題，校對答案，然後走向另一問題。書首有一掩蓋卡片，可於對應答案求出以前，遮掩右方答案，以防學者事先窺閱。

值得一提之書本式節目書大優點，爲輕便而利於學者攜帶，隨時使用，通常不可視爲教學機械，或教學計算站，進而言之，本書可由學者留作參考，而經驗顯示，頗有價值，本方法之早期努力，曾得海軍專科學校斤福特基金會及其他 1965 - 66 之 ASEE 節目學習計劃贊助者之部份經費支援。著者特別感謝能有機會參與此計劃。並對 1965 夏令工作會所予之支助表示感激，該會係由巴奈巴尼安（Norman Bacabanian）及賀南德（James Holland）所組織與領導者，亦對勞特（A.A. Root），計劃編輯人之熱心及遇到之指示，表示謝意。

本節目之技術性內容，著者應對許多以前之教師，學生，同事及教科書著者之負欠多多，表示感激。

最後，應對於節目中，曾經作業之學生，所指出之未竟部份，表示感謝。相信由於彼等所經困難，已使節目達一有效之進境。

司 楚 姆 / 華 德

## 致教師

節目式教學之基本特質，已於前言扼要提出。此處將就此特別節目之技術方面，予以描述。

目錄表，表示本節目之一般範圍與編組，熟讀主題，將與著者詳細方法，確立主題擊節之處，簡言之，注意力集中於勒普拉司轉換方法之最要元素，而使教者有充份機會，引伸於其認為適合之處理方式。重點偏於方程式解法方面——收斂性問題，存在性及獨一性等問題，均力求避免。對等於積分法之反變換，亦不提及。經過許多次討論之後，決定原始時間，應視為  $t = 0$ ，而非為  $t = 0_+$  或  $t = 0_-$ 。已往，定積分會全部使用。例如，容電器上之電壓書為：

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0) \quad \text{而非爲} \quad v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$



節目開始時，有 17 個問題，用以測驗學生程度。學生對此測驗之任何部份，發生困難者，應不允許繼續，直至缺點矯正為止。

## 節目標的

目標之仔細週全計劃，為節目教學之一特徵，於此意義之中，節目設計，在發展學生解 19—22 節，與示範考試諸題之能力。

## 節目研判

去年，某約三百之學生，曾使用節目於不同班級，由九位教師施教從事測驗及研判。節目修訂，基於學生答案（及意見）之分析，由測驗表現（使用現所結合於教材之試驗）及學生程度之正式觀察上為之。結果所得之節目，學生錯誤率，正常良好，而在 10% 以下（粗率之代數誤差除外），進而言之，每班至少於一測驗中，有 80% 者，能達計分 90%，或以上，如節目末尾者，而其餘 20%，得分應在 80% 以上，當然，此假定為學生已完成準備條件之甄別測驗，且曾作忠實打算，完成全部節目，以後範圍，應無困難——已熱心接受節目。

## 教室使用之建議

要求學生，從事全部節目作為，乃簡單而可靠之程序。無需其他說明與意見。且已發現不需“銷售”節目教學之觀念——學生常回敬老師，以技術之銷售！

著者建議，教室集合應保持約一週一次，且應不予課程其他方面之課外作業及考試。因節目中包含“講演”及“課外作業”兩者題材，此種條件，非不合理，而將保證學生，自由專心於節目之上。

最後測驗，於節目完成後，建議應儘可能，立即舉行，此測驗可循節目末尾範例線，或其省略現象行之，於各情況，應小心僅測驗由節目所發展之技能。問題尋找，如“區分兒童與成人”，則輕易破壞節目教學之全部精神。學生已隱約告知，彼等將不致被要求回憶任何定理，恒等式，註解，或技能之未於節目中練習者。

最後，學生應對下列諸項留意：

1. 教學週期，係節目完成之時間；
2. 教師用於回答問題之時間；及
3. 需從事最後測驗之教學週期。

## 現在 節目開始

### 致學者

歡迎！此書係為諸位而作，其實、如諸生依據規則作此演習，當無法避免學習所期望之一切，此將成為繁重工作，但如不目為滑稽可笑之事，將使人驚異，祝君幸運！

開始時，先作一次甄別測驗，費時將不超過半小時左右，使諸君慣於節目教材作業。請勿遺漏。

首先，撕下掩蓋卡（在封面內側），將之夾於此頁之後（空白面朝上）。

而後，翻開此頁。

以下問題答案，在下頁掩蓋卡下。

**問題 1**

當  $t = 0$ ，時  $\epsilon^{at} =$  \_\_\_\_\_

( 將使用  $\epsilon^x$ ，而不用  $e^x$ ，以示指數函數 )

滑下掩蓋卡，達於此線，校對所得答案。



**問題 2**

$\epsilon^{at} \rightarrow 0$  由於  $\rightarrow \infty$  規定 \_\_\_\_\_

滑下掩蓋卡，達於此線，校對所得答案。



**問題 3**

求方程式  $s^2 + 2s + 2 = 0$  之根

答:  $s_1 =$  \_\_\_\_\_

$s_2 =$  \_\_\_\_\_

**問題 4**

以兩項之乘積，表示  $s^2 + 2s + 2$  :

答 ( \_\_\_\_\_ )( \_\_\_\_\_ )

$$\epsilon^{a0} = \underline{1}$$

將掩蓋卡置於原處，以回答問題 2

---

由於  $t \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon^{at} \rightarrow 0$ , 規定  $a < 0$  或  $a$  為負。

現進行第三題。

---

使用二次公式，

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2} \{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)}\}$$

$$s_1 = \underline{-1 + j1} \quad (\text{將以 } j, \text{ 表示 } \sqrt{-1})$$

及  $s_2 = \underline{-1 - j1}$

---

$$s^2 + 2s + 2 = (s - s_1)(s - s_2)$$

$$= \underline{(s + 1 - j1)(s + 1 + j1)} \quad \leftarrow \text{注意符號!}$$

復將掩蓋卡，插入此頁之後。

而後，翻開此頁。

---

### 問題 5

解 
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{求未知數 } x, \\ \text{用行列式 (克拉瑪法) (Cramer's rule)} \end{array}$$

答:  $y =$  \_\_\_\_\_

---

### 問題 6

完成長除

$$s + 2 \overline{) \frac{s^2}{s^3 + 2.5s^2 + 0.9s - 2}}$$

---

### 問題 7

$\frac{d}{dt}(e^{at}) =$  \_\_\_\_\_ 及  $\frac{d}{dt}(\cos \omega t) =$  \_\_\_\_\_

---

### 問題 8

$\int x dx =$  \_\_\_\_\_ 及  $\int_0^1 x dx =$  \_\_\_\_\_

---

### 問題 9

$\int e^{at} dt =$  \_\_\_\_\_ 及  $\int \cos \omega t dt =$  \_\_\_\_\_

---

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -8 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-16 - 5}{-4 - 3} = \frac{-21}{-7} = 3$$

請勿先睹為快



$$s + 2 \left[ \frac{s^2 + 0.5s - 1}{s^3 + 2.5s^2 + 0.0s - 2} \right]$$

$$\frac{s^3 + 2.0s^2}{s^3 + 2.5s^2 + 0.0s - 2}$$

$$\frac{0.5s^2 + 0s}{0.5s^2 + s}$$

$$\frac{-s - 2}{-s - 2}$$

$$\frac{0}{0}$$

$a e^{at}$  及  $-\omega \sin \omega t$  (如假定  $a$  及  $\omega$  均為已予常數)

$x^2/2 + C$  及  $x^2/2 \Big|_0^t$  或  $t^2/2$

$\frac{1}{a} e^{at} + C$  及  $\frac{1}{\omega} \sin \omega t + C$

如前移置掩蓋卡，並翻開本頁。

問題 10

已予  $\int u dv = uv - \int v du,$

計算  $\int te^t dt$  用分部積分法：

答： \_\_\_\_\_

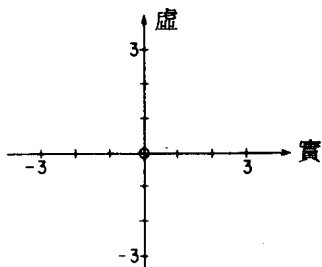
問題 11

於鄰近之圖上，標誌對應於複數

$$-3 + j3$$

之點。

(將用  $j$  表示  $\sqrt{-1}$ )



問題 12

如  $-3 + j3$ ，以極（指數）式示為  $Me^{j\theta}$

$M =$  \_\_\_\_\_

及  $\theta =$  \_\_\_\_\_ 度

問題 13

$-3 + j3$  之共軛複數為 \_\_\_\_\_

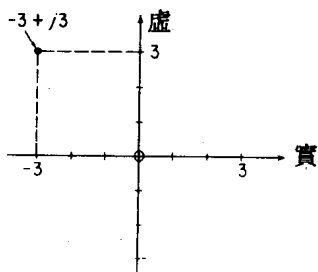


令  $u = t$ , 而  $dv = e^t dt$

則  $du = dt$ , 而  $v = \int e^t dt = e^t$

由是  $uv = te^t$ , 而  $\int v du = \int e^t dt = e^t$

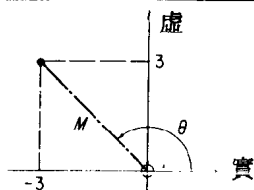
而  $\int te^t dt = \underline{te^t - e^t + C}$



由圖

$$M = \sqrt{3^2 + 3^2} \text{ 或 } 3\sqrt{2}$$

$$\text{而 } \theta = 90^\circ + \tan^{-1} \frac{3}{3} = \underline{135^\circ}$$



---

$-3 - j3$  (簡單的, 以  $-j$  代  $j$ )

完畢各頁之後, 先移置掩蓋卡於該頁之下。