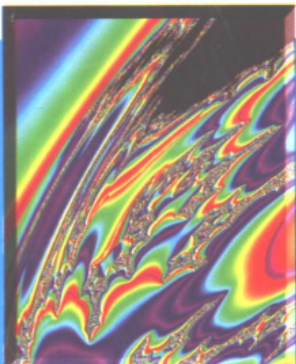
初中学生数学课外阅读系列

GENYU XISHUDE GUANXI JIQI YINGYONG



根与系数的关系及其应用

毛鸿翔 编著

上海教育出版社

世纪集团

责任编辑 冯 贤
封面设计 张国梁

ISBN 7-5320-5338-5

9 787532 053384 >

ISBN 7－5320－5338－5/G・5580

定 价: 3.90 元

初中学生数学课外阅读系列

根与系数的关系及其应用

毛鸿翔 编著

上 海 教 育 出 版 社

初中学生数学课外阅读系列　**根与系数的关系及其应用**

毛鸿翔 编著

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行
（上海永福路 123 号）

各地新华书店经销　上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 4　字数 82,000

1981 年 10 月第 1 版　2000 年 6 月第 11 次印刷

印数 146,731—151,730 本

ISBN 7-5320-5338-5/G・5580　定价：3.90 元

序

在中学阶段，数学是很重要的课程，对于提高学生的文化素质，有极大的作用．学生将来无论从事哪一种职业，都需要打好数学基础，有好的数学修养，更不必说从事理工科、经济管理方面的专门工作了．

怎样学好初中数学？课堂学习是最重要的一个环节，练习一定数量的习题也是完全必要的．但是现在有一种倾向，认为题目做得越多越好，越难越好；又有一种倾向，认为课外再要请老师辅导，老师辅导得越多越好．这样不仅造成学生课业负担过重，而且会影响学生智力的发展．

我认为要想学好数学（其他学科也如此），培养自学能力和思考能力最为重要，即使在初中阶段，能使学生有自行阅读课外读物的能力是很重要的事，特别对那些学习较好的同学，尤其如此．任课教师最好在提高课堂教学的同时，留一些时间让学生自学，启发学生思考，这样也就能进一步提高学生的兴趣和水平．因此好的课外读物就显得非常重要了．

上海教育出版社出版了《初中学生数学课外阅读系列》，内含10本小册子：《漫游勾股世界》、《绝对值》、《多项式的乘法和因式分解》、《怎样列方程解应用题》、《怎样解不等式》、《怎样用配方法解题》、《面积关系帮你解题》、《怎样添辅助线》、《根与系数的关系及其应用》、《反证法》．这些专题是中学数学中极其重要的基本内容，并且是初等数学的基础．这些专题有的注重于与横向知识的联系，以培养初中学生初

步运用知识解决问题的综合能力；有的适当介绍了知识的自身发展并注重于与后续内容的联系，以便让学生领略数学知识的应用和作用．例如《面积关系帮你解题》，看来似乎只是讲几何的，其实却蕴含着许多三角、代数的内容．又如《根和系数关系及其应用》，从二次方程的判别式和韦达定理出发，引出了许多几何和代数的问题，还包含了解析几何的思想．这套丛书还将趣味性寓于知识性之中，例如《漫游勾股世界》中，有许多有趣的故事和问题．总之，这是一套开拓学生视野，训练学生思维，为学生终身受益的一套课外读物．这套书由专家和有经验的教师所撰写，所以质量是有保证的．初中学生如果能够读懂其中的某些分册或某些部分，就会得到很多益处．

胡和生

于复旦大学数学所

1995.5.

目　录

一、二次方程根的判别式的应用

1. 二次方程根的判别式

我们知道，对于一般二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，可以用配方法，求得它的根，就是

将方程两边同除以二次项系数，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

方程两边同加上一次项系数的一半的平方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，根据平方根的意义，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac>0$，方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac=0$，方程有两个相等的实数根

$$x_1=\frac{-b}{2a},\quad x_2=\frac{-b}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac<0$，那末，不论 x 是任何实数都不适合这个方程，因为任何实数，它的平方不等于负数．这时方程没有实数根．

从以上对方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根过程中可以得到如下定理．

定理 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

(1) 如果 $b^2-4ac>0$，那末方程有两个不等的实数根；

(2) 如果 $b^2-4ac=0$，那末方程有两个相等的实数根；

(3) 如果 $b^2-4ac<0$，那末方程没有实数根．

这个定理的逆命题也是正确的．

逆定理 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

(1) 如果有两个不等的实数根，那末 $b^2-4ac>0$；

(2) 如果有两个相等的实数根，那末 $b^2-4ac=0$；

(3) 如果没有实数根，那末 $b^2-4ac<0$．

证明 (1) 如果方程有两个不等的实数根，证明 $b^2-4ac>0$．用反证法证明．假设 $b^2-4ac=0$，由原定理得方程有两个相等的实数根，这与题设相矛盾．假设 $b^2-4ac<0$，由原定理得方程没有实数根，这也与题设相矛盾．所以 $b^2-4ac>0$ 成立．

同理可证，如果方程有两个相等的实数根，则 $b^2-4ac=$

0；如果方程没有实数根，则 $b^2-4ac<0$.

由原、逆两定理，我们得到，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac>0$； 有两个相等的实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac=0$； 没有实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac<0$.

由于根据 b^2-4ac 的值可以判定二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质，因此我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**根的判别式**，并记为 $\Delta=b^2-4ac$.

在解一元二次方程时，一般先用根的判别式去鉴别一下方程的根的情况，然后求根. 若求出判别式 $\Delta<0$，那末这个方程无实数根，就不必去解方程了.

下面我们侧重谈谈怎样用二次方程的根的判别式来判定根的性质以及根据二次方程的根的性质来确定方程中的参数的值.

(1) 判别二次方程根的性质

[例 1] 不解方程，判别它们的根的性质：

(1) $3x^2+4x-4=0$;

(2) $9x^2-12x+4=0$;

(3) $5y^2-7y+10=0$.

解 (1) $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot3(-4)=16+48>0$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根.

(2) $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$,

$\therefore$ 这个方程有两个相等的实数根.

(3) $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot5\cdot10=49-200<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根.

[例 2] 不解方程，判别下列方程的根的性质：

(1) $(n^2+1)x^2-2nx+(n^2+4)=0$; （n 为实数）

(2) $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$. （a、b、c 为实数）

解 (1) $\Delta=(-2n)^2-4(n^2+1)(n^2+4)$

$$=4n^2-4n^4-20n^2-16$$

$$=-4(n^4+4n^2+4)=-4(n^2+2)^2.$$

不论 n 是什么实数，$(n^2+2)^2$ 都是正数，所以 $-4(n^2+2)^2$ 是负数，$\Delta<0$，所以方程没有实数根.

(2) $\Delta=(a+b)^2-4(ab-c^2)=(a-b)^2+4c^2\geqslant 0$.
所以方程有两个实数根.

当 $a=b$, $c=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $a\neq b$, $c\neq 0$ 时，方程有两个不相等的实数根.

[例 3] a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，讨论方程

$$x^2+2ax+b^2+c^2=0$$

的根的情况.

解 $\Delta=4a^2-4(b^2+c^2)$. (1)

$\because$ a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，由余弦定理得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

代入(1)式，得

$$\Delta=4(b^2+c^2-2bc\cos A)-4(b^2+c^2)$$

$$=-8bc\cos A.$$

$\because$ a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，$\therefore$ $a>0$, $b>0$, $c>0$.

当 $\angle A$ 为锐角时，$\cos A>0$，

$\therefore$ $\Delta<0$，方程没有实数根；

当 $\angle A=90^\circ$ 时，$\cos A=0$，

$\therefore$ $\Delta=0$，方程有两个相等的实数根；

当 $\angle A$ 为钝角时，$\cos A<0$，

$\therefore \Delta>0$, 方程有两个不等的实数根.

[例 4]　若 a、b、c 为不相等的实数，证明以下三个二次方程：

$$ax^2+2bx+c=0,$$
$$bx^2+2cx+a=0,$$
$$cx^2+2ax+b=0$$

不可能都得到等根.

证明　若三个二次方程都得到等根，则

$$4b^2-4ac=0, \tag{1}$$
$$4c^2-4ab=0, \tag{2}$$
$$4a^2-4bc=0. \tag{3}$$

$[(1)+(2)+(3)]\div 2$, 得

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ac-2ab-2bc=0,$$

即

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,$$
$$\therefore\quad a=b=c.$$

这与假设 a、b、c 为不相等的实数相矛盾，所以三个二次方程不可能都得到等根.

[例 5]　已知方程

$$x^2+px+q=0$$

有两个相等的实数根，求证方程

$$(p^2-2q+2)x^2-2p(1+q)x+p^2+2q^2-2q=0$$

也有两个相等的实数根.

证明　由题设条件

$$\Delta_1=p^2-4q=0,\quad \therefore\quad p^2=4q.$$

将 $p^2=4q$ 代入第二个方程的判别式，得

$$\begin{aligned}\Delta_2&=[2p(1+q)]^2-4(p^2-2q+2)(p^2+2q^2-2q)\\&=4[p^2+2p^2q+p^2q^2\\&\quad-(p^4-4p^2q+2p^2q^2-4q^3+8q^2+2p^2-4q)]\\&=4[p^2+2p^2q+p^2q^2-p^4+4p^2q\\&\quad-2p^2q^2+4q^3-8q^2-2p^2+4q]\\&=4[-p^2+6p^2q-p^2q^2-p^4+4q^3-8q^2+4q]\\&=4[-4q+24q^2-4q^3-16q^2+4q^3-8q^2+4q]\\&=4\cdot 0=0.\end{aligned}$$

所以第二个方程也有两相等的实数根.

(2) 确定二次方程中的参数

应用二次方程根的判别式,由二次方程根的性质,可以确定方程中的参数.

[例 6] 当 a 为何值时,方程 $ax^2-12x+9=0$ 有两个相等的实数根?

解 要使方程有两个相等的实数根,必须 $\Delta=0$,即

$$\Delta=(-12)^2-4\cdot a\cdot 9=0.$$

解这个方程,得 $a=4$.

∴ 当 $a=4$ 时,方程有两个相等的实数根.

[例 7] 当 k 为何值时,方程 $4x^2-8x+k=0$ 有两个不相等的实数根?

解 要使方程有两个不相等的实数根,必须 $\Delta>0$,即

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 4\cdot k>0.$$

解这个不等式,得

$$k<4.$$

∴ 当 $k<4$ 时,原方程有两个不相等的实数根.

[例 8] 已知方程 $2x^2-4x\cos\theta+3\sin\theta=0$ 的两根相等,

且θ是锐角，求θ和这个方程的两个根.

解 要使方程有两个相等的实数根，必须$\Delta=0$，即

$$\Delta=16\cos^2\theta-24\sin\theta=0.$$

解这个方程，得

$$8(2\cos^2\theta-3\sin\theta)=0,$$

$$2-2\sin^2\theta-3\sin\theta=0,$$

$$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=-2.\quad (\text{不适合，舍去})$$

$$\because\quad \theta\text{为锐角},\quad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}.$$

将$\sin\theta=\frac{1}{2}$代入原方程，得

$$2x^2-2\sqrt{3}\,x+\frac{3}{2}=0,$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0,$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[例 9] 若整数系数方程

$$2ax^2+2(2a-b-1)x+(2a-2b-1)=0$$

和

$$x^2+(2a+b+3)x+(a^2+ab+6)=0$$

都有两个相等的实数根．求a、b的值.

解 由题意知这两个方程的根的判别式皆等于零，即

$$\begin{cases}4(2a-b-1)^2-8a(2a-2b-1)=0,\\(2a+b+3)^2-4(a^2+ab+6)=0.\end{cases}$$

化简整理，得

$$\begin{cases} b^2-2a+2b+1=0, \\ b^2+12a+6b-15=0. \end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{50}{49}, \\ b=\dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

因为原方程为整数系数方程，所以 $a=2$, $b=-3$ 为所求的值.

[例 10] 若实数 a、b、c、d 都不等于零，且满足

$$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0,$$

求证 a、b、c 成等比数列，且公比为 d.

证明 把 $(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0$ 看作未知数为 d 的二次方程，因为 a、b、c、d 是实数，所以 d 的二次方程的根的判别式 Δ 不小于 0，即

$$[-2b(a+c)]^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqslant 0.$$

化简，得 $$-4(b^2-ac)^2\geqslant 0,$$

即 $$(b^2-ac)^2\leqslant 0.$$

$\because$ a、b、c 都为实数，$\therefore$ $(b^2-ac)^2\geqslant 0$.

既要使 $(b^2-ac)^2\leqslant 0$，必须 $b^2-ac=0$，即 $\Delta=0$.

$$\therefore\ b^2=ac,\ a、b、c\ 成等比数列.$$

又 $$\because\ d=\frac{2b(a+c)\pm\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}=\frac{2b(a+c)}{2(a^2+ac)}=\frac{b}{a},$$

$$(a+c\neq 0)$$

$$\therefore\ d\ 为公比.$$

2. 二次三项式的值的讨论

实系数二次三项式 ax^2+bx+c 与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是有一定联系的. 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根就是使二次三项式 ax^2+bx+c 的值为零的 x 的值，所以二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根也叫做二次三项式的**根**. 下面我们讨论二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式之间的关系.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

(1) 若 $b^2-4ac<0$,

$$\because\quad b^2-4ac<0,\ \therefore\quad -\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0,$$

而 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0,\quad \therefore\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0.$$

当 $a>0$ 时，$ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时，$ax^2+bx+c<0$.

因此有，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(2) 若 $b^2-4ac=0$, 则

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

(i) 如果$x=-\frac{b}{2a}$,那末$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$,因此$ax^2+bx+c$的值等于零.

(ii) 如果 $x\neq-\frac{b}{2a}$,那末$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$.

当 $a>0$ 时,有 $ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时,有 $ax^2+bx+c<0$.

因此有,当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,若 $x=-\frac{b}{2a}$,则 $ax^2+bx+c=0$,若 $x\neq-\frac{b}{2a}$,则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(3) 若 $b^2-4ac>0$,

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&\quad\cdot\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&\quad\cdot\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).
\end{aligned}
$$

这里$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$和$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$就是二次方程 $ax^2+bx+c=0$,当 $b^2-4ac>0$ 时的两个根,显然

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$