北京大学数学丛书

代　数　学

上　册

莫宗坚 蓝以中 赵春来 著

北京大学出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册出版。

上册主要讲述近世代数的初步知识，内容包括集合论与数论、群论、多项式论、线性代数以及域论。

本书内容丰富，直观性强，推理自然，解释详尽。此书的独到之处是特别注重对于代数学的背景、基本思想以及与其它学科的联系等方面的介绍。书中精选了大量的例题和习题。本书的起点低，由浅入深。具有高等代数基础知识的读者就可以阅读本书，进而学到现代代数学的较大部分基础知识。

本书可作为高等学校数学系高年级学生以及研究生的教材，也可供数学工作者参考。

北京大学数学丛书

代 数 学

上 册

莫宗坚 等著

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北下关印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

850×1168毫米 32开本 12印张 302千字

1986年10月第一版 1987年10月第二次印刷

印数：12001—17500册

统一书号：13209 · 140 定价：2.95元

上册目录

第一章　集合论与数论

§1 集　合　论

我们假定读者已熟悉集合论的基本概念，如**交集**、**并集**、**子集**、**包含**及**映射**等。请参考前面的“符号说明”。

定义1.1　设S及T为集合，$\rho: S\to T$是由S到T的映射。任取S中的二元素s_1及s_2，如果$\rho(s_1)=\rho(s_2)$时，必有$s_1=s_2$，则称ρ为**一一映射**，或**单射**。如果对于T中任意元素t，必有$s\in S$，使$\rho(s)=t$，则称ρ为S到T**上的映射**，或**满射**。如果ρ同时为单射及满射，则称ρ为**单满映射**。

集合论中最有意义的概念之一是“基数”。我们有如下的定义：

定义1.2　设S及T为集合。如有一单满映射$\rho: S\to T$，则称S与T**同基数**。

讨论　1）如集合S与整数集合$\{1,2,\cdots,n\}$同基数，则称S为**有限集**，而称其基数为n。反之则称之为**无限集**。设S及T为同基数的有限集，$\rho: S\to T$为一映射，则易证：如ρ为单射，则ρ必为满射。反之，如ρ为满射，则ρ必为单射。此一命题可谓之**鸽笼定理**，即设想S为一群鸽子，T为等数的鸽笼，则上命题即：如果每一鸽子已一一进笼，则鸽笼必无空者；反之，如鸽笼皆无空者，则必然每一笼中仅有一只鸽子。

2）如集合S与正整数集合$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$同基数，则称$S$为**可数无限集**。有限集与可数无限集统称**可数集**。除此之外，皆称为**不可数集**。

3）对所有的无限集而言，鸽笼定理皆不成立，然而证法比较

复杂，远离本书的趣旨，请读者参考集合论的专书。现在我们仅举一例以说明此种现象，即所谓的“希尔伯特的旅馆”：设一旅馆有可数无限个房间$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，已住满房客。如同时又来了可数无限个新房客$\{g_1,g_2,\cdots,g_n,\cdots\}$，则一个简易的安排方法是令原住$n$号房间的老房客移入$2n$号房间，于是空出$\{1,3,5,\cdots,2n+1,\cdots\}$所有奇数号房间。令新房客依序住入即可，也即令新房客g_n住入$2n-1$号房间。从此例中，可以看出单射不一定必是满射。反之，如令头两个人挤一间房，其余的人依序住入空出的房间，则满射又不一定是单射了。

定理1.1 有理数集$\boldsymbol{Q}$是可数无限集。

证明 我们采用所谓“三角数法”。考虑正有理数的集合$\boldsymbol{Q}_+$。把$\boldsymbol{Q}_+$中的元素按分母大小排成如下的无限矩阵：

$$\boldsymbol{Q}_+=\begin{pmatrix}\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots\cdots\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots\cdots\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{pmatrix},$$

然后我们把整个矩阵的元素，按箭头所指的顺序，依次对应到所有正的偶数，自然，已经出现过的有理数则略去。例如，

$$\frac{1}{1}\to 2,\quad \frac{1}{2}\to 4,\quad \frac{2}{1}\to 6,\quad \frac{1}{3}\to 8,\quad \frac{3}{1}\to 10,$$

等等。这样就把$\boldsymbol{Q}_+$对应到了正偶数集。同法，我们可以把负有理数集$\boldsymbol{Q}_-$对应到大于1的正奇数集。再把0对应到1。不难看出，这个对应是由$\boldsymbol{Q}$到正整数集$\boldsymbol{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$的单满映射。

于是Q是可数无限集。▌

系 设有可数集$S_i=\{s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{in},\cdots\}$，$i\in$可数集$I$。则这些可数个$S_i$的并集$\bigcup_{i\in I}S_i$也是可数集。

证明 利用三角数法。▌

定理1.2 实数集$\boldsymbol{R}$为不可数集。

证明 假设$\boldsymbol{R}$为可数集，则所有实数可以排成一行：$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$。我们用“对角线法”来证明这是不可能的。

把$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$用十进小数写出如下：

$$r_1=a_1.b_{11}\,b_{12}\cdots b_{1n}\cdots,$$
$$r_2=a_2.b_{21}\,b_{22}\cdots b_{2n}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n=a_n.b_{n1}\,b_{n2}\cdots b_{nn}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中诸a_i为整数，b_{ij}为0,1,2,…,9之一。现取一实数

$$r=0.c_1\,c_2\cdots c_n\cdots$$

如下：如果$b_{nn}\neq5$，则取$c_n=5$，否则取$c_n=4$ $(n=1,2,\cdots)$。显然$r\neq r_n$ $(\forall\, n=1,2,\cdots)$。故r不在集合$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$之中。由此知$\boldsymbol{R}$为不可数集。▌

在代数学中，经常应用构造“直积”、“商集”的方法。我们有如下定义。

定义1.3 设I为一个集合。如果对每一个$i\in I$，都有一个集合S_i，则S_i的**直积**$\prod_{i\in I}S_i$定义为

$$\{(s_i)_{i\in I}:\ s_i\in S_i\},$$

即I到$\bigcup_{i\in I}S_i$的所有映射s，而且能适合$s(i)=s_i\in S_i$者。如I为可数集时，$\prod_{i\in I}S_i$中的元素常写成一行$(s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots)$。

定义1.4 设T为一集合。如果T为一些分离的子集的并集，

即$T=\bigcup_{j\in J}T_j$，并且不同的子集T_j的交集为空集，则这些子集T_j的集合$\{T_j: j\in J\}$称为T的一个**商集**。

讨论 1) 设T为所有中国人民的集合，按照某种法定年龄的标准，T可以划分为T_1=未成年人的集合和T_2=成年人的集合。则$\{T_1, T_2\}$构成T的一个商集。此商集中仅有两个元素。

2) 设$\{T_j: j\in J\}$为T的一个商集，则可在T中定义一个相应的"等价关系"～如下：

$$a\sim b \iff a,b\text{属于同一个}T_j.$$

一般言之，任意关系"～"如具有下列三条性质，则称为一个**等价关系**：

(a) 反身性：$a\sim a$；

(b) 对称性：如果$a\sim b$，则$b\sim a$；

(c) 传递性：如果$a\sim b$，$b\sim c$，则$a\sim c$。 ▌

我们也可以用等价关系来定义商集如下。

定义1.4* 设～为集合T上的等价关系。令

$$T_a=\{b: b\in T,\ b\sim a\},$$

则$\{T_a: a\in T\}$是T的一个商集，称之为**关于等价关系～的商集**，T_a称为一个**等价子集**。

讨论 为说明定义1.4*中的$\{T_a\}$确实是商集，我们仅须验证两点：1) $T=\bigcup_{a\in T}T_a$；2) 如果$T_a\cap T_c\neq\varnothing$，则$T_a=T_c$。1)是显然的，这因为$a\sim a$，所以$a\in T_a$；关于2)，设$b\in T_a\cap T_c$，令$d$为$T_c$中任意元素，则有

$$a\sim b\sim c\sim d,\quad a\sim c\sim d,\quad a\sim d.$$

即$d\in T_a$。所以$T_c\subset T_a$。同法可得出$T_a\subset T_c$，于是$T_a=T_c$。 ▌

下面的"数学归纳法"是正整数集N的公理之一，其详情请见附录中正整数的"皮诺公理"。

数学归纳法 设对每个正整数m，有命题$P(m)$。如能证明：

1) $P(1)$是正确的；

2) 设n是任意大于1的正整数。如对所有小于n的正整数l，$P(l)$都是正确的，则$P(n)$是正确的，

那么所有的命题$P(m)$皆是正确的。

讨论 这个数学归纳法不能从更简明的公理系统导出，然而可以从下面的讨论中理解其合理性：根据1)，已知$P(1)$是正确的。运用2)，令$n=2$，则知$P(2)$是正确的。再运用2)，令$n=3$，则知$P(3)$是正确的。如此反复运用2)，则知所有的命题$P(m)$皆是正确的。

在代数学里，经常应用“Zorn引理”。此引理等同于“选择公理”及“良序原理”，是集合论的公理之一。为了讨论Zorn引理，我们先引入“序”与“半序”的概念。

定义1.5 设S为一集合。S的一个关系“$\geqslant$”如适合下列条件，则称之为一个**半序**：

1) $s_1 \geqslant s_1$，$\forall s_1 \in S$；

2) $s_1 \geqslant s_2$，$s_2 \geqslant s_3 \Longrightarrow s_1 \geqslant s_3$，$\forall s_1, s_2, s_3 \in S$；

3) $s_1 \geqslant s_2$，$s_2 \geqslant s_1 \Longrightarrow s_1 = s_2$，$\forall s_1, s_2 \in S$。

定义1.6 设S为一集合，$\geqslant$为S的半序。如果适合下列条件，则称$\geqslant$为S的**序**：

4) 对任意的$s_1, s_2 \in S$，总有$s_1 \geqslant s_2$或$s_2 \geqslant s_1$。

定义1.7 设$\geqslant$为S的半序，T为S的子集。如果S的一个元素s，适合$s \geqslant t$ ($\forall t \in T$)，则称s为T的一个**上限**。如果s具有如下性质：$\forall s_1 \in S$，只要$s_1 \geqslant s$，必有$s_1 = s$，则称s为S的一个**极大元素**。

定义1.8 设S为一集合，$\geqslant$为S的半序，T为S的子集。如果局限于T中$\geqslant$是一个序，则称T为一**链**。

Zorn引理 设S为一非空集合，$\geqslant$为S的半序。如果任意链皆有上限，则S有一极大元素。

讨论 1) 在集合论中，已经证明了Zorn引理实际上是一个

公理，所以不可能从其它较简单的公理系统中导出。

2) 利用Zorn 引理可以简化许多证明，也可以证明一些除此之外的其它方法不能证明的结果。例如，我们可以证明平面上的任何有界区域D内皆有极大的开圆盘，证法如下：(a) 令S为D内所有开圆盘构成的集合，用包含$\subset$定义半序$\leqslant$；(b) 由于D内至少有一个开圆盘，所以S是非空的；(c) 如果一些开圆盘构成的集合$\{D_i: i\in I\}$成为一链，则$\bigcup_{i\in I} D_i$也显然是D的一个开圆盘，它是此链的上限；(d) 于是根据Zorn 引理，有界区域D内必有极大的开圆盘。

习　题

1. 设ρ为集合S到集合T的映射。证明ρ是一个单射的充要条件是下列两条件中任一条成立：

(1) 存在T到S的映射τ，使$\tau\rho = 1_S$；

(2) 不存在某集合U到S的两个不同映射τ_1, τ_2，使

$$\rho\tau_1 = \rho\tau_2.$$

2. 设ρ为集合S到集合T的映射。证明ρ是一个满射的充要条件是下列两条件中任一条成立：

(1) 存在T到S的映射τ，使$\rho\tau = 1_T$；

(2) 不存在T到某集合U的两个不同映射τ_1, τ_2，使

$$\tau_1\rho = \tau_2\rho.$$

3. 设S是一基数为$n(n\geqslant 1)$的有序集。证明在S中存在一个元素a，使$\forall b\in S$，有$a\leqslant b$。举例说明无限的有序集不一定具有此性质。

4. 设ρ是集合S到集合T的映射，A, B是S的子集。证明

$$\rho(A\cup B) = \rho(A)\cup\rho(B), \quad \rho(A\cap B)\subset\rho(A)\cap\rho(B).$$

举例说明$\rho(A\cap B)$不一定等于$\rho(A)\cap\rho(B)$。

5. 设ρ是集合S到集合T的映射，A是S的子集。证明在

一般情况下 $\rho(S\setminus A)\not\subset T\setminus\rho(A)$。

6. 设$\omega_1,\omega_2\in C$，且$\omega_1/\omega_2\in R$。在C内定义等价关系：

$$\alpha\sim\beta \iff \beta=\alpha+a\omega_1+b\omega_2 \quad (a,b\in Z)。$$

试求C对上述等价关系的商集。

7. 令$Q[x]$表示所有有理系数的多项式集。证明$Q[x]$是一个可数集。

8. 令C表 Cantor 点集。C的构造法如次：在区间[0,1]中挖去中间的1/3长的开线段(1/3,2/3)。其次，在所余的两个闭线段[0,1/3]，[2/3,1]中各挖去中间的1/3长的开线段。如此反复作下去，所得的余集即是C。证明C是一个不可数集。

9. 证明“兄弟”是一个等价关系，“子女”不是一个等价关系。

10. 证明在整数集Z中，通常用的“$\geqslant$”是一个序。

11. 证明在任何一个集合S中，包含“$\supset$”是子集族的一个半序。

12. 证明题10中的半序不适合Zorn 引理的条件，而题11中的半序适合之。

§2 唯一分解定理

数学的起源之一是对整数的研究。近世代数从整数的“**皮诺公理系**”开始讨论，由此公理系引出整数集的四则运算的法则，如交换律、结合律、分配律等，并进一步建构有理数集Q、实数集R、复数集C。这种讨论法自有其逻辑的严谨性，然而对于代数学的读者而言，似嫌迂远，旁离本旨。本书将这部分的推理列入附录中。以下我们将假设读者已熟悉整数集Z、有理数集Q、实数集R及复数集C的四则运算的法则。

整数论中，最重要的定理之一是“辗转相除法”。汉代的数学书《九章算术》中，有求两正整数的公因数的“更相减损求

等”之法，即“辗转相除法”也。秦九韶于《数书九章》（1247年）又曾论及。在现代，此法通常被称为“欧几里得算法”。我们先引入如下的概念。

定义1.9 设a为一实数，以$[a]$表示小于或等于a的最大整数，即a的**整数部分**。

讨论 例如，$[3.1]=3$，$[-3.1]=-4$，$[5]=5$。

定理1.3(欧几里得算法) 令d为一正实数，n为任意实数。则必有一整数q及一实数r，使得

$$n=qd+r, \quad 0\leqslant r<d.$$

证明 应用定义1.9，读者自证。|

系1 在以上定理中，q及r皆为唯一确定的。

证明 读者自证。|

系2 如在上定理中n及d皆为整数，则r也为整数。

欧几里得算法的应用之一是研究几个整数的因数及公因数。为此，我们定义如下：

定义 1.10 设a,b,c为整数。如果$a=bc$，则称a是b的**倍数**，b是a的**因数**，用符号$b|a$表示之。如果$b|a_1,b|a_2,\cdots,b|a_n$，则称b是$a_1,a_2,\cdots,a_n$的**公因数**。$a_1,a_2,\cdots,a_n$的公因数中的最大者，称为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的**最大公因数**。如果$b_1|a,b_2|a,\cdots,b_m|a$，则称a是$b_1,b_2,\cdots,b_m$的**公倍数**。$b_1,b_2,\cdots,b_m$的公倍数中最小非负整数，称为$b_1,b_2,\cdots,b_m$的**最小公倍数**。如果a与b的最大公因数是1，则称a与b**互素**。

定理1.4 设$a_1,a_2\in\boldsymbol{Z}$，且a_1,a_2不全为零，则a_1,a_2的最大公因数是集合

$$(a_1,a_2)=\{b_1a_1+b_2a_2:\ b_1,b_2\in\boldsymbol{Z}\}$$

中的最小正整数。

证明 令集合(a_1,a_2)中的最小正整数为

$$d=c_1a_1+c_2a_2, \quad c_1,c_2\in\boldsymbol{Z}.$$

按照欧几里得算法，存在整数 q_1 及 r_1，使得

$$a_1 = q_1 d + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < d.$$

如果 $r_1 \neq 0$，则有

$$r_1 = a_1 - q_1 d = (1 - c_1 q_1) a_1 + (-q_1 c_2) a_2 \in (a_1, a_2),$$

即 r_1 是 (a_1, a_2) 中比 d 更小的正整数。这显然是不可能的。故知 $r_1 = 0$，即

$$a_1 = q_1 d,$$

亦即

$$d \mid a_1.$$

同法可证 $d \mid a_2$。即 d 是 a_1, a_2 的公因数。

现设 d' 为 a_1, a_2 的另一公因数，则有

$$d' \mid a_1,\ d' \mid a_2 \Longrightarrow d' \mid c_1 a_1 + c_2 a_2,$$

即 $d' \mid d$。而 d 为正整数，故 $d \geqslant d'$。

以下，我们将证明“算术基本定理”。即整数分解成“素数”的连乘积的“唯一分解定理”。为此，我们要引入“不可约数”及“素数”的概念。值得注意的是，在整数集中有乘法逆元素的数仅是 1 与 -1，即如果 n 与 n^{-1} 皆为整数，则 n 必为 1 或 -1。

定义 1.11 设有一整数 a，非 $0, 1, -1$。如在 a 的任意分解式 $bc = a$ 中，必有 b 或 c 为 1 或 -1（即 b 和 c 之一必为可逆的），则称 a 是一个**不可分解数**（或称**不可约数**）。如果 $a \mid fg$ 时，必有 $a \mid f$ 或 $a \mid g$，则称 a 是一个**素数**。素数又称为**质数**。

引理 $\boldsymbol{Z}$ 的不可约数皆是素数，素数也皆是不可约数，

证明 设 a 是不可约数，不妨设 $a > 0$（否则讨论 $-a$）。设 $a \mid bc$。如果 a 不是 b 的因数，由于 a 的正因数只有 1 与 a，所以 a, b 的最大公因数必为 1。按照定理 1.4，有 $c_1, c_2 \in \boldsymbol{Z}$，使得

$$1 = c_1 a + c_2 b.$$

以 c 乘上式两边，得到

$$c = c(c_1a + c_2b) = \left(cc_1 + c_2\left(\frac{bc}{a}\right)\right)a.$$

由于$a|bc$，故$bc/a \in \boldsymbol{Z}$。由上式即知$a|c$。所以a为**素数**。反之，设a为素数，且$a = bc$。不妨设$a|b$，则a,b的最大公**因数必为**$|a|$及$|b|$，于是有$|a| = |b|$，故$c = \pm 1$。|

讨论 从上面的引理可以看出，在$\boldsymbol{Z}$中“不可约数”与“素数”是一物的二名。在以后的“环论”中可以看到，在广泛的情况下，这两个概念是各有所指的。这两个概念的同一性是下面的“唯一分解定理”的基石。

定理1.5(唯一分解定理) 任意大于1的整数a皆可分解成正素数的连乘积

$$a = \prod_i p_i.$$

在这个连乘积中，正素数p_i的次序自然可以调换。除此之外，这个连乘积是唯一的。

证明 我们首先证明这个分解是存在的，然后再证明其唯一性。

2是正素数，于是$2 = 2$是2的分解。按照数学归纳法，给定一个正整数$a > 1$，可以假定所有大于1小于a的整数皆可分解。如果a是素数，则$a = a$是a的分解；如果a不是素数，应用引理，得到

$$a = bc, \quad a > b > 1, \quad a > c > 1,$$

其中b及c皆可分解成正素数连乘积，于是a可分解为正素数连乘积，即$a = \prod_i p_i$。

下面证分解的唯一性。设$a = \prod_j q_j$是a的另一正素数连乘积分解式，则有

$$p_1 | a = q_1\left(\prod_{j>1} q_j\right),$$

于是有

$$p_1 | q_1 \quad 或 \quad p_1 \Big| \Big(\prod_{j>1} q_j\Big).$$

如果$p_1 \nmid q_1$，则必有 $p_1 \Big| q_2\Big(\prod_{j>2} q_j\Big)$，于是有

$$p_1 | q_2 \quad 或 \quad p_1 \Big| \Big(\prod_{j>2} q_j\Big).$$

如此推演下去，必有某个 q_s，使得

$$p_1 | q_s.$$

而q_s为素数，由引理，q_s 为不可约数，于是有

$$q_s = p_1.$$

考虑

$$\prod_{i>1} p_i = \frac{a}{p_1} = \frac{a}{q_s} = \prod_{j\neq s} q_j,$$

应用数学归纳法，即有唯一性。|

以后，除特别声明外，所谓“素数”皆指正素数而言。

例 1 不难导出下述命题：“设 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$均为素数，则$\Big(\prod_{i=1}^{n} p_i\Big)+1$ 的因数皆非 $p_1,p_2,\cdots,p_n$。”这是因为，如果 p_j 为$\Big(\prod_{i=1}^{n} p_i\Big)+1$的因数，则有$a\in \boldsymbol{Z}$，使得

$$ap_j = \Big(\prod_{i=1}^{n} p_i\Big)+1,$$

即

$$\Big(a - \prod_{i\neq j} p_i\Big)p_j = 1,$$

也即$p_j|1$。这显然是不可能的。由上面这个命题，又可推出“素数有无限多个”。事实上，如果仅有有限多个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，

则$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)+1$的素因子只能是$p_1,p_2,\cdots,p_n$中的某些个，这与上面的命题矛盾．故知素数有无限多个．

例2 取一正分数m/n，可以用欧几里得算法求得其连分数．我们且举祖冲之(430—501年)的“密率”$\frac{355}{113}$为例．

$$\frac{355}{113}=\frac{3\times113+16}{113}=3+\frac{16}{113}=3+\frac{1}{\frac{113}{16}}$$

$$=3+\frac{1}{\frac{7\times16+1}{16}}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}.$$

更一般地，任意实数r，都可以用此法求出其连分数．我们以$\pi=3.14159265358979323846\cdots$为例，以说明之．

$$\pi=\frac{\pi}{1}=3+\frac{0.14159265358979323846\cdots}{1}$$

$$=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.14159265358979323846\cdots}}$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{0.00885142787144737077\cdots}{0.14159265358979323846\cdots}}$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{0.14159265358979323846\cdots}{0.00885142787144737077\cdots}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{0.00882123551809317691\cdots}{0.00885142787144737007\cdots}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{0.0088514278714473700 7\cdots}{0.0000301923533541931 6\cdots}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}}.$$

这种连分数与“最佳渐近分数”有关，详见华罗庚著《数论导引》第十章。在上面的 π 的连分数中，如果我们只保留前边几项，弃去其余的项，则得到

$$3,\quad 3+\frac{1}{7},\quad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}},\quad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}},$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}},$$

也即

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},$$

而祖冲之的“密率”适在其中。

习　题

1. 设 n 为正整数，a 为实数。证明：

(1) $\left[\dfrac{[na]}{n}\right]=[a]$;