

内 容 简 介

本书是一部介绍数学构模理论的入门书，主要阐述数学模型的构造、验证和使用方法，以及应用时需注意的问题。全书分两部分：第一部分为基础篇，着重叙述构造数学模型时必须了解的数学概念；第二部分为应用篇，通过对自然科学及社会科学领域中的一系列实例，讨论了许多具体模型。本书在推导数学模型时避免了抽象和复杂的演算，因此，只要具备一些微积分知识的读者都能掌握本书的内容。

读者对象：中专、大专物理及数学专业低年级学生，从事运筹学及数学模拟工作的广大读者。

责任编辑：刘莉蕾

责任校对：刘兴昌

Principles of Mathematical Modeling

C.L.Dym E.S.Ivey

数学构模原理

[美] C.L.戴姆 著
E.S.艾维

新 华 译

海 洋 出 版 社 出 版 (北京市复兴门外大街)

新华书店北京发行所发行 八九九二〇部队印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9 字数：200千字

1985年8月第一版 1985年8月第一次印刷

印数：9350册

统一书号：7193·0449 定价2.00元

译者前言

数学构模这一术语用通俗的话说，就是建立或构造研究对象的数学模型。人们所熟知的物理学中的许多基本公式，如电学中的 $V=RI$ ，力学中的 $F=ma$ 等等，都是数学模型的例子。严格地说，数学模型是现实世界的本质反映或科学的抽象，它是一个或一组数学公式，这些数学公式从数量角度反映了研究对象的有关参数和因素及其相互关系，描述了其固有的特性和运动规律，因此，一个真正能代表研究对象的数学模型不仅客观地反映了实际，而且又简单、明了、易于处理。由于这些特点，使数学模型在科学技术的各个领域得到了广泛的应用，成为人们研究客观世界的有力工具之一。

那么，怎样构造一个研究对象的数学模型？构造了以后怎样验证它，怎样使用它？对于这些问题，许多初学者往往感到束手无策。为此，我们翻译了这本数学构模理论的入门书，希望能对这些同志有所帮助。

本书较为全面地介绍了数学构模理论的基本知识，内容深入浅出。全书主要由两个部分组成，第一部分介绍了构模所必需的一些数学概念，第二部分讨论了一系列模型。在推导这些模型时，作者避免了抽象的理论推导和复杂的演算，而是通过许多有趣的实例来加以说明，因此，只要具备了普通微积分的知识就不难读懂它。此外，各章后均附有一定量的习题供读者练习，以便更好地掌握本书的内容。全书反映了数学构模理论在科学技术领域内的广泛应用，因此，本书

既可作为一般读者的入门书，也可供从事构模工作的同志参考。

本书呈蒙单荣华同志校对，并由南弓同志审校，在此我们表示衷心感谢。由于我们的水平有限，译文中错误在所难免，恳请读者批评指正。

译者

前 言

科学上和工程上十分重视建立模型的概念，因此，理工科的学生在学习过程中，应尽早接触这些概念。基于这一考虑，我们根据数学构模原理编写了这本入门书。

本书是由基础和应用两个主要部分组成。在第Ⅰ部分中，我们安排了对模型构造者感兴趣的许多数学概念，即量纲分析、换算以及函数和曲线近似法的基本概念。在第Ⅱ部分中，我们推导了一系列模型，并讨论了它们的起因、有效性及意义。这些模型包括摆的线性和非线性振动模型、各种简单（线性）振子模型，以及交通流、指数、运筹学、声波和光波模型。

读者应该记住本书中的两个重要特点。首先，本书中两个部分的联系并不紧密，即在推导模型时，我们并没有屈从于本书第Ⅰ部分的大纲。这是为了使读者在适当参阅本书基础部分的条件下，就能很容易接受本书的第Ⅱ部分。下页表中的矩阵给出了各章之间的联系。

读者还要注意，习题是本书的一个组成部分。除第一章外，其他各章末尾都有习题。在这些习题中，多数是为读者提供一定的技巧训练；但也有一些习题是在推导新模型或为讨论过的模型提供数值数据时，推广了有关章节的实质性内容。例如：在第三章中，我们用两个问题说明了在分析实验结果时无量纲量群的作用。在第五章中，我们在导出摆的方程时，说明了量纲分析与其他方法是如何相互影响的。在第六章中，我们把各种各样振子的谐振和阻抗数据编入了习题

数学工具和模型两者间的矩阵表示

工 具 模 型	摆 (第五章)	振 子 (第六章)	交通流 (第七章)	总体、经济 (第八章)	运筹学 (第九章)	衍 射 (第十章)
量纲分析 (第二章)	●					
换 算 (第三章)	●		●	●	●	●
近 似 法 (第四章)	●	●	●	●		
初等函数 (附录 1)	●	●		●		
方程 $dN/dt = \lambda N$ (附录 2)	●			●		
方程 $md^2x/dt^2 + kx = F(t)$ (附录 3)	●	●		●		●

中。

我们期望本书中提到的几种方法都能够得到应用。本书的内容已作为卡内基-梅隆大学和马萨诸塞大学低年级工科学生构模课程的基础教材。本书也可作为应用数学科目的基础课教材。此外，本书也是数学专业的一门课程，而且它的大部分内容可作为在理、工科课程中的基础物理课的补充。考虑到这些方面的应用，我们力图使本书尽可能为广大的读者容易接受。为此，只要求读者具备微积分和初等力学的基础知识。

C.L.戴姆

E.S.艾维

1979年9月于马萨诸塞州阿姆赫斯特

目 录

第一章 概述 内容安排	(1)
-------------------	-------

I. 基础部分

第二章 量纲分析	(9)
量纲和单位	(9)
量纲分析——动机	(12)
量纲分析——过程	(15)
单位	(25)
小结	(25)
习题	(27)
第三章 换算	(29)
尺寸和形状	(29)
尺寸和功能	(36)
尺寸和限制	(41)
选择一种比例尺的重要性	(45)
小结	(51)
习题	(53)
第四章 近似法和答案的合理性	(55)
泰勒级数	(55)
二项式展开	(58)
三角级数	(61)
代数近似和有效数字	(63)
模型论证——误差	(68)
求平均——均值、中值、众数	(72)

曲线拟合: 最小二乘法; 连续性假设	(75)
模型论证——实验	(84)
小结	(85)
习题	(86)

I. 应用部分

第五章 摆的自由振动	(89)
实验结果	(89)
初步的量纲分析	(92)
运动方程	(93)
进一步的量纲分析	(97)
摆的线性模型	(100)
能量考虑——守恒	(103)
能量考虑——损耗	(106)
摆的非线性模型	(109)
小结	(114)
习题	(114)
附录 运动方程的变换	(116)
第六章 线性振子的受迫运动	(119)
弹簧-质量振子	(119)
建筑物的振动	(123)
汽车悬挂系统	(127)
声学谐振器	(130)
磁场中粒子的运动	(133)
电路和电-机类比	(135)
线性振子的受迫振动 共振和阻抗	(138)
小结	(144)
习题	(145)

第七章 交通流模型	(147)
宏观交通流理论(一)——连续性假设	(148)
宏观交通流理论(二)——基本曲线	(151)
线性汽车跟随模型	(157)
对线性汽车跟随模型的稳定性分析	(162)
非线性汽车跟随模型	(164)
小结	(166)
习题	(167)
第八章 指数模型	(170)
指数特性	(170)
指数函数	(175)
放射性衰减	(179)
RC电路中电容的放电	(181)
RC电路中电容的充电	(182)
通货膨胀	(184)
复利	(186)
公路需要量的增长	(188)
人口增长	(189)
洛卡-伏特拉方程	(192)
兰切斯特定律	(198)
小结	(202)
习题	(203)
第九章 运筹学：线性规划	(205)
利用微积分最优化	(208)
利用线性规划最优化	(214)
运输问题	(220)
网络分析	(225)
小结	(230)

习题	(231)
第十章 衍射和换算	(234)
衍射几何学	(235)
衍射光栅	(243)
X射线和原子粒子的衍射	(248)
声波衍射	(252)
小结	(256)
习题	(256)
附录	(258)
1. 初等超越函数	(258)
2. 微分方程 $dN/dt = \lambda N$	(261)
3. 微分方程 $md^2x/dt^2 + kx = F(t)$	(262)
索引	(266)

第一章 概述 内容安排

模型是实物、过程的表示形式，也可以是我们所要描述的其他别的对象、及分析它们行为方式的表示形式。本书涉及的是数学模型，即怎样产生模型，怎样论证、应用模型以及模型的应用在什么时候受到限制和受到怎样的限制等等。乍看起来这似乎是一个耸人听闻的议题，然而用分析术语来说，我们所要讨论的并不那么复杂。其实作为本书基础的基本概念是很简单的。由于概念是基于我们的经验而产生的，因而许多人容易把模型特别是数学模型，与物理学或人们所要处理的现实问题相混淆。这就是说，当进行与一个问题有关的数学运算时，人们往往难以意识到我们所涉及的是问题的抽象概念，而这种抽象概念与该问题仅仅有间接的联系。这种见解已有人恰如其分地阐述过了。

符号并非是用符号表示的事物；文字并非是事物；
地图也并非它是它所代表的领土。

S.I. 哈阿卡瓦

上面的话是引自一本语义学的书籍，而不是引自数学构模的书籍！

我们将要提出一种方法或见解，而且我们也将发现在工程分析和设计以及科学研究中这种方法是有用的。对于数学模型来说，正是由于它本身固有的假定和近似，使它具有一

定的有效范围。这些有效范围常常是相当宽广的，而且，如果仔细地并合理地构造模型，那么，数学模型必能裕如地处理它所描述的那些物理问题。但是，我们往往会忘记我们正在处理模型。这样，由于疏忽会使模型大大超出合理的有效范围。

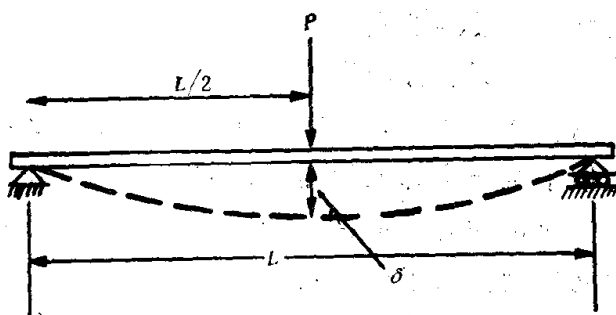


图1.1 在载荷作用下简单梁的挠曲

δ = 载荷作用下的挠曲 (夸大的)

我们以梁的理论作为一个简单实例来说明。在建筑中，梁或许是最常用的构件，人行桥就是为大家所熟悉的这种构件。图1.1给出了一个简单的梁。该梁中央承受一载荷 P ，在 P 作用下，梁挠曲一 δ 值。应用材料力学中的公式，可以计算出该挠曲（或挠度）为

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \quad (1.1)$$

式中， L 和 I 分别是梁的长度和横截面的转动惯量^①， E 是

① 转动惯量是一个梁的横截面特性，它代表抗转动性。乘积 EI 是被弯曲的梁的抗弯刚度。也可参看后述方程(6.10)的讨论。

该梁材料的弹性模量（它是一个刚性尺度）。此式是结构力学中的标准公式之一。虽然此式的运用相当广泛，而且，对建筑工程师感兴趣的大部分实际问题又是相当的精确，但是，该公式的适用范围仍有一定的限制。限制之一就是与梁的厚度相比梁的挠曲（或挠度）必须很小。因此，如果我们走过一座乡村小路上的简单木桥，那么应用方程(1.1)，桥的挠曲或弯曲量与桥的厚度相比较，前者必须很小。这就意味着，如果 d 是简单梁的厚度，则

$$\frac{\delta}{d} = \frac{PL^3}{48EI d} \ll 1 \quad (1.2)$$

这是一个约束条件，对已经建造的和计划建造并正在设计的梁，我们可用数值方法毫无疑问地检验这个条件。

在运用这一公式时，另一个重要的限制是假定梁是具有弹性的，也就是说，建造梁的材料应具有这样的特性：当移去载荷时，梁会回复到其未变形、未受力的状态，而且，它将沿着到达受力状态的同样的路径回复到这个初始状态。在梁模型中，对弹性的假定是通过模量 E 的常数值和不等式(1.2)的约束，体现在方程(1.1)和(1.2)中的。我们也可以验证，这样做并不违背线性弹性的限制。验证可以通过计算或实际的物理测量来进行。

在对梁的讨论中，我们再次注意到，可以通过验证公式去检验没有违背公式的基本假定。当然，还有其他的检验方法。例如，为了使方程(1.1)有意义，方程两边的物理量纲必须相同。也就是说，如果方程(1.1)左边的挠曲 δ 是用英寸、厘米或者其他一些长度单位来计算，那么载荷、长度、模量以及转动惯量的最终量纲（正如以 PL^3/EI 表示的）

也必须以长度为单位来度量。这就为模型提供了另一类检验方法，即在一个方程中所有的项必须具有相同的量纲。

本书中，我们无意去研究梁的理论，因为那些内容较深并且偏离我们目前所关心的问题。但是，工程师和科学家是如此地熟悉这一公式，以致在讨论定义模型时所含有的某些概念及模型的应用基础的某些假定和限制条件时，都可以此公式作为一个有用的出发点。这样，我们将把用简单的梁模型表明的种种检验方法如同把产生这种模型时所涉及的概念一样，贯穿于全书之中。

这里还要注意，这些基本原理的概念并非是我们提出的。事实上，它是一种科学方法的标志。这种科学方法的基础结构已经由社会学家、数学家和物理学家、以及对构模感兴趣的人们（诸如运筹学者和工程技术人员，以及许多其他专业人员）讨论过了。我们所要讨论的问题实际上只是这种科学方法的一部分。图1.2展示了表征这一科学方法的途径。在此图中，我们标出了“现实世界”和“概念世界”。外部世界是现实的，在那里，我们观察和记下自然界发生的各种现象，而不管这种现象是自然界引起的还是人为的。概念世界是理智世界，它是存在于我们头脑中的世界，或者说，当人们试图了解另一个（现实的）世界中所发生的事情时，人们与之生活、谈论或思考的头脑中的世界。通常，我们把这个概念世界分为三个阶段：观察、构模和预测。

观察阶段涉及我们觉察的现实世界，也涉及为了了解和研究现实世界，我们所使用的某些积累现实世界中正在发生的事情的方式。这些观察可以是直接的，如运用我们的感觉器官；也可以是间接的，如使用精密的科学仪器。科学方法

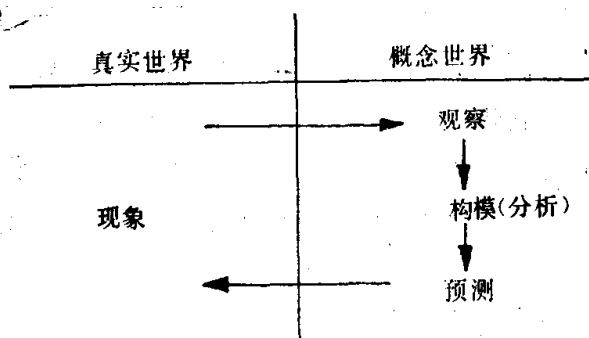


图1.2 科学方法的图解

的这部分的要点是致力于收集数据，以使我们认识所感受的世界。如果我们明确了要寻找什么，也就是说，如果我们有了一些模型来作为指南，以告诉我们要期望的是什么，那么对信息的检索过程就可以更合理地、更有效地进行。这样，即使我们尚未讨论这一科学方法的构模部分，也已经能看出构模部分将有助于指导这一科学方法的观察部分。

在概念世界的发展过程中，该科学方法的第二个主要组成部分是建立分析情况的模型。为了有助于我们了解已作过的观察，我们暂且撇开模型的产生问题，集中讨论模型的应用。这种了解是以所使用的模型，对当前观察作指导，对未来观察作预测，又可检验我们观察到的结果是否正确和一致。模型对于观察和预测都是极为重要的。换句话说，构模过程与观察和预测过程是复杂地交织在一起的。观察本身对模型是一个指导，而模型反过来对观察也是一个指导。

因为模型为设计提供了（分析的）依据，所以从工程的观点来看，我们会与模型打更多的交道。也就是说，在模型已被证实、可靠性的范围已得到检验和了解以后，就可以用

它们来提供因尚未存在而未被观察到的有关情况的信息。说得更具体些，例如，发展完善的结构理论就允许我们在建筑物建造之前对它进行分析，并且只要我们牢记模型中特有的假定，就能很有把握地做到这一点。因此，在工程设计过程中，一个模型不仅在观察和单纯预测中，而且在允许我们事前估价结果的一种改进预测中，都起着决定性的作用。这不象在单纯预测模型中那样，先预测某一事物，然后观察这一预测是否正确。相反，这是一个有着充分把握的预测过程，以致于我们可以花费时间、精力、财力去设计和建造事先知道其结果并能获得成功的一些设施。

这种科学方法的最后阶段是预测，正如我们已经看到的，预测是与观察和构模过程复杂地联在一起，事实上它是由两者提供信息的，因此，如果需要，这种单纯的预测过程可以修改或提炼成用于建造新设施的设计过程。其次，在这种科学方法中，模型的作用是清楚的：模型为信息的预测提供基础，而预测则是通过观察来检验模型的有效性。如果对后来状态的观察与根据模型的预测相吻合，就可以认为我们的模型得到了验证。如果不是这样，那么就需要做进一步的研究，以得到更为精确预测的模型。

在这件事上，显然有许多微妙的和可以无休止地讨论的哲理性的问题，但是我们的意图并非要把科学的基本原理的全部内容都压缩在这很有限的篇幅里。然而，这一背景是重要的，因为它为我们要做些什么划定了范围。在这本书中，我们所关心的是有关的构模过程，特别是模型是如何建立的，如何检验其内容的一致性以及如何使用它们预测关于设计情况和科学情况。本着这个目的，我们把这本书分成两个部

分：第Ⅰ部分是基础部分，第Ⅱ部分是应用部分。

本书的第Ⅰ部分研究了构模的数学工具。我们将按照各章的顺序，依次介绍量纲分析、换算、以及函数的数值近似和解析近似等概念。在量纲分析中，我们将讨论物理量纲和单位、选择变量的过程、以及提出变量的无量纲量群概念。接着在本书第三章中，将涉及到换算、尺寸和形状的概念、换算时应如何考虑问题的边界条件、选择某一特定的比例尺的数值结果。然后，我们讨论近似法以及如何用数值方法评价近似法的有效性。这里，我们感兴趣的是级数的展开、三角函数和其他复杂的函数级数的数值计算、曲线拟合、误差分析，以及在模型验证和预测中所包括的其他一些概念。

本书的第Ⅱ部分论述应用。其中，我们将介绍与物理学和自然科学以及某些工程方面有关的一系列模型。我们将说明，如何利用原始资料来建立模型和评价模型的有效性。我们将用模型作为预测器，还将说明如何从模型中得出信息（在多数情况中，不需求出通常所说的解），并将看到，这样的信息有什么用处以及借助什么方法进行变形而使它更加有用。我们还要讨论某些模型，特别是摆的线性和非线性振动模型，这些都是很典型的模型。可以从摆模型的问题中得到许多的信息，这种信息指明线性和非线性模型两者之间的重大的差别。摆模型的线性形式为讨论在各种不同的物理应用中的周期性运动作了准备。这些应用包括象建筑物的振动、汽车悬挂系统的响应、磁场中粒子的振动以及声学谐振器的响应等。此外，我们还将讨论阻抗、谐振等其他重要的物理概念。

然后，我们将讨论取自其他科学和工程领域的各种不

同的模型。首先我们将研究一种“汽车跟随”模型，在此模型中，我们会看到在监视一辆汽车和它前面的汽车之间的安全距离时，对人的状态作不同假定的结果。这些模型，不管是线性和非线性，都反映出当试图准确地评定人的因素时所出现的困难。但是，我们会看到解析描述是可以得到的，并且可把单个汽车驾驶员如何监视前面汽车状态的模型，成功地结合到对公路通行能力和往来汽车速度的总的模型中。

第八章研究指数模型。这里，我们将讨论增长率、指数特性以及未来人和物总体的估算，并讨论求这些估算的方法，以及在人类总体方面的假设和估算之间的相互影响；我们还将证明在经济和财政、运输以及战争中敌对兵力的损耗等这样一些不同领域中的指数特性。

上述最后的模型是典型的运筹学模型之一，因此，它很自然地作为第九章作了准备。在第九章中，我们将讨论微积分和线性规划的最优化、运输问题、网络分析以及有关的课题。在第十章中，我们将返回到物理学中，考察光学和声学的衍射，其中关键的因素是物体与光或其他波的波长相比时，物体的相对大小或尺寸。

在给出的每个例子和应用中，我们将应用本书第Ⅰ部分中所阐述的基本原理，具体说明如何构造和论证模型，并提供了由模型得到解答的合理性的评价，同时结合文献中现有的实验观察结果使模型具体化。实际上，第Ⅱ部分是自成一体的，也就是说，其中的内容可以直接阅读，仅当需要专门的技术或资料时，才有必要依靠本书的第Ⅰ部分。