现代数学译丛

解析数论基础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著

科学出版社

内 容 简 介

本书以解析数论的三个著名问题：素数分布、哥德巴赫问题和华林问题为中心，很好地阐明了解析数论的三个重要方法：复积分法、圆法及三角和法．本书的特点是少而精，叙述和证明简洁．阅读本书仅需要初等数论、微积分及复变函数基础知识．书中有不少习题，其中一些是近代解析数论的最重要的成果，读者可通过这些习题了解近代解析数论的研究领域．

本书可供大专院校数学系师生、研究生及有关的科学工作者阅读．

А. А. Карацуба

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», 1975

现代数学译丛

解析数论基础

〔苏〕A. A. 卡拉楚巴 著

潘承彪　张南岳 译

责任编辑　吕　虹　张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年3月第一版　开本：850×1168 1/32

1984年3月第一次印刷　印张：5 7/8

印数：0001—12,000　字数：149,000

统一书号：13031·2512

本社书号：3451·13—1

定价：1.15元

序　　言

数论是研究整数性质的．解析数论乃是数论的一个分支，除了数论特有的方法外，它本质上是利用数学中的解析工具来研究数论．

本书的目的是向广大读者介绍解析数论的中心问题．撇开次要的细节，作者力求叙述那些导致该理论的现代状况的主要内容．所以书中给出的结果常常不是目前已知的最好结果，但二者之间并无原则差异．

本书讨论解析数论中的三个问题：素数在自然数列和算术数列中的分布，Goldbach 问题与 Waring 问题．以解决这些问题为例，阐明解析数论的基本方法：复积分法，G. H. Hardy-J. E. Littlewood-S. Ramanujan 的圆法，以及 И. М. Виноградов 三角和方法．

从第三章开始，每章后面都配有问题，这些问题和主题紧密相关，建议读者依次去做．这些问题进一步阐明所证明的定理，或者引出现代数论的新想法．

本书要求读者具备 И. М. Виноградов 的《数论基础》，大学数学分析教程，以及 И. И. Привалов 的《复变函数引论》范围内的知识．

书中所涉及到的一些问题，历史发展以及参考文献可在专著[1—10] 中找到．

命题和公式在每章中各自编排，在引用其他章节的命题时，将指出其所在的章节．

作者对于 С. М. Воронин 和 А. Ф. Лаврик 的宝贵意见表示衷心感谢．

记　　号

c, c_0, c_1, $\cdots$表示绝对正的常数，一般地说，在不同的定理中它们是不同的.

当A是正的时，记号 $B = O(A)$, $B \ll A$ 表示 $|B| \leqslant cA$；记号 $A \asymp B$ 表示

$$c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A.$$

ε, ε_1, $\cdots$表示任意小的正常数. n, m, k, l, N 表自然数；除第一章外，p, p_1, $\cdots$表素数. $\mu(n)$ 表 Möbius 函数，

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ 0, & n = p^2 m; \\ (-1)^k, & n = p_1 \cdots p_k. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时，

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{du}{u}; \ \mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + c_0,$$

其中

$$c_0 = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{du}{\ln u} \right);$$

$\Lambda(n)$ 表 Mangoldt 函数，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k; \\ 0, & n \neq p^k. \end{cases}$$

$\varphi(k)$ 表 Euler 函数——不大于 k 且与 k 互素的自然数的个数.

$\psi(x)$ 表 Чебышев 函数，

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n); \qquad \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1;$$

当 $l \leqslant k$, $(l, k) = 1$ 时，

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod{k} \\ n \leqslant x}} \Lambda(n);$$

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l \pmod{k} \\ p \leqslant x}} 1.$$

$\tau(n)$ 表 n 的正除数的个数；$\tau_k(n)$ 表方程 $x_1 x_2 \cdots x_k = n$ 的解数，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是自然数；因此 $\tau_2(n) = \tau(n)$；$\Omega(n)$ 表 n 的素因子个数． 对于实数 α，$[\alpha]$ 表 α 的整数部分，即不超过 α 的最大整数；$\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ 表 α 的小数部分；$(\alpha) = \min(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\})$ 表 α 到最近整数的距离．

s 表复数，$s = \sigma + it$，其中 $i^2 = -1$，$\mathrm{Re}\, s = \sigma$，$\mathrm{Im}\, s = t$；$\bar{s} = \sigma - it$；一般地，$\bar{f}$ 表与 f 共轭的量．

目　　录

第一章　有穷级整函数

这章具有辅助性质，它包含以后所必需的整函数知识。

§ 1. 无穷乘积. Weierstrass 公式

我们引进无穷乘积的概念.

定义 1. 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 是异于 -1 的无穷复数序列. 形如

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots \tag{1}$$

的表达式称为无穷乘积。

形如

$$\prod_{n=1}^{k}(1+u_n)=(1+u_1)\cdots(1+u_k)=v_k \tag{2}$$

的表达式称为部分乘积。

定义 2. 如果序列 (2) v_k 当 $k\to\infty$ 时趋于 $v\neq 0$，则称无穷乘积 (1) 收敛，其值为 v，即

$$v=\lim_{k\to\infty}v_k=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n). \tag{3}$$

如果序列 v_k 不收敛，或者 $v=0$，则称无穷乘积 (1) 发散.

对于大多数情形，下面的收敛判别法是够用的.

定理 1. 如果级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{4}$$

绝对收敛，则乘积 (1) 收敛。

证　因为级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0;$$

不失一般性，可以设 $|u_n| \leqslant \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \cdots$. 首先设 $u_n = a_n$ 是实数，$n = 1, 2, \cdots$. 那么 $|\ln(1 + u_n)| \leqslant 2|u_n|$. 由此推出序列

$$\ln(1 + u_1) + \cdots + \ln(1 + u_n) = \ln(1 + u_1)\cdots(1 + u_n)$$

收敛，所以乘积 (1) 收敛.

现在设 u_n 是任意复数，需要证明，当 $n\to\infty$ 时，两个实数序列

$$\begin{aligned} |v_n| &= |(1 + u_1)(1 + u_2)\cdots(1 + u_n)| \\ &= |1 + u_1|\cdots|1 + u_n|, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \arg v_n &= \arg(1 + u_1)(1 + u_2)\cdots(1 + u_n) \\ &= \arg(1 + u_1) + \cdots + \arg(1 + u_n) \end{aligned} \tag{6}$$

均收敛.

序列 (5) 收敛的充分必要条件是序列 $|v_n|^2$ 收敛. 由于

$$|1 + u_n|^2 = |1 + \alpha_n + i\beta_n|^2 = 1 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n,$$

$$\alpha_n = \operatorname{Re} u_n, \quad \beta_n = \operatorname{Im} u_n,$$

以及

$$|\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n| \leqslant |u_n|^2 + 2|u_n|,$$

所以从已经证明的结果立即推出 $|v_n|^2$ 收敛. 序列 (6) 的收敛性从以下事实推出：对于充分大的 n_0，当 $n > n_0$ 时，

$$|\arg(1 + u_n)| = \left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2}}\right| < \pi|\beta_n|.$$

定理 1 证毕.

现在转向研究某区域内的解析函数的无穷乘积.

定理 2. 设 $u_n(s)$ 是在某区域 G 内解析函数的无穷序列，且

a) $u_n(s) \neq -1$, $n = 1, 2, \cdots$, $s \in G$;

b) $|u_n(s)| \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \cdots$, $s \in G$;

c) 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

那么，对于任意的 $s\in G$，乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s)) \tag{7}$$

收敛．由等式

$$v(s)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

定义的函数 $v(s)$ 在 G 内是解析的，且 $v(s)\neq 0$, $s\in G$.

证．对于 $s\in G$，乘积 (7) 的收敛性从定理 1 推出．要证明 $v(s)$ 的解析性，只要证明解析函数序列

$$v_k(s)=\prod_{n=1}^{k}(1+u_n(s))$$

对于 $s\in G$ 是一致收敛到 $v(s)$ 的．然后再应用 Weierstrass 定理．

设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=p$，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=p_n$.

首先我们证明对于任意的 $s\in G$，有

$$\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant\frac{p}{p_n}-1. \tag{8}$$

事实上，如果 $k\geqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{v_{n+k}(s)}{v_n(s)}-1\right| &= |(1+u_{n+1}(s))\cdots(1+u_{n+k}(s))-1|\\ &= |u_{n+1}(s)+\cdots+u_{n+k}(s)+u_{n+1}(s)u_{n+2}(s)\\ &\quad+\cdots+u_{n+1}(s)\cdots u_{n+k}(s)|\\ &\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}+a_{n+1}a_{n+2}+\cdots\\ &\quad+a_{n+1}\cdots a_{n+k}\\ &= \frac{p_{n+k}}{p_n}-1.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$，便得到式 (8)．这样，对于 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 以及任意的 $s\in G$，有

$$|v(s)-v_n(s)|=|v_n(s)|\left|\frac{v(s)}{v_n(s)}-1\right|\leqslant p_n\left(\frac{p}{p_n}-1\right)$$

$$= p - p_n < \varepsilon.$$

定理证毕.

定义 3. 在 s 平面上的任意有穷部分是解析的函数，称为整函数.

现在,我们来证明两个定理：一是存在整函数,以且仅以给定无穷序列中的数为其零点；二是整函数可按其零点展为无穷乘积(代数基本定理的推广).

定理 3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$是无穷复数序列,且

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| \leqslant \cdots$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = 0.$$

则存在整函数 $G(s)$，它仅以 a_n 为其零点(如果其中 a_n 有相同的，那么 $G(s)$ 的零点有相应的重数).

证. 设

$$u_n = u_n(s) = \left(1 - \frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}, n = 1, 2, \cdots,$$

并考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n(s) \tag{9}$$

我们来证明这个乘积在复平面的每个点 $s \neq a_n$ 收敛，并且是以 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$为其零点的整函数 $G(s)$. 考虑以原点为中心,以 $|a_n|$ 为半径的圆 C 及无穷乘积

$$\prod_{r=n}^{\infty} u_r(s).$$

我们要证明这个乘积在圆 $|s| < |a_n|$ 内收敛到解析函数. 从而无穷乘积 (9) 在这个圆内也是解析的，它仅以 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 为零点. 因为 $|a_n| \to \infty$，所以就证明了定理. 对于 $|s| < |a_n|$，$r \geqslant n$，设

$$\ln u_r(s) = \ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)+\frac{s}{a_r}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_r}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{r-1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r-1},$$

这里 $\ln\left(1-\frac{s}{a_r}\right)$ 是对数主值，即 $s=0$ 时它等于0。

于是，当 $r=n,\ n+1,\cdots$ 和 $|s|<|a_n|$ 时，

$$\ln u_r(s) = -\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \cdots$$

及

$$u_r(s) = e^{-\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r - \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} - \cdots}$$

因此，我们应当证明，级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots\right] \tag{10}$$

在 $|s|<|a_n|$ 内收敛到一个解析函数．对于任意的 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，及 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$，有

$$\left|\frac{1}{r}\left(\frac{s}{a_r}\right)^r + \frac{1}{r+1}\left(\frac{s}{a_r}\right)^{r+1} + \cdots\right| \leqslant \frac{1}{r}(1-\varepsilon)^r + \frac{1}{r+1}(1-\varepsilon)^{r+1} + \cdots < \frac{(1-\varepsilon)^r}{\varepsilon r}.$$

因此，级数 (10) 在区域 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 内一致收敛，即无穷乘积 (9) 在圆 C 内是解析的．定理证毕．

推论 1 (Weierstrass 公式)．设 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\ \cdots$ 是满足定理 3 的条件的复数序列，则函数

$$G(s) = s^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}$$

是整函数，且仅以 $0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\cdots$ 为其零点．

推论 2. 设序列 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\ \cdots$ 满足定理 3 的条件，且存在整数 $p\geqslant 0$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

收敛，则函数

$$G_1(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

满足定理 3 的要求。

事实上，在这种情况下，当 $|s|\leqslant(1-\varepsilon)|a_n|$ 时，级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{p+2}+\cdots\right]$$

有控制级数

$$\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)\varepsilon}\cdot\left(\frac{|a_n|}{|a_r|}\right)^{p+1}<+\infty.$$

定理 4. 每个整函数 $G(s)$ 可以表为以下形式

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1}}, \quad (*)$$

其中 $H(s)$ 是整函数，而数 $0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是 $G(s)$ 的零点，且按其模的增长顺序排列. 如果除此以外，序列 a_n，$n=1,2,\cdots$，满足推论 2 的条件，则

$$G(s)=e^{H(s)}s^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)e^{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p}$$

证. $G(s)$ 的零点不能有极限点，即它们能按模的增长顺序排列. 由定理 3，我们可以构造整函数 $G_1(s)$，它以 $G(s)$ 的零点为其零点. 设 $\varphi(s)=\frac{G(s)}{G_1(s)}$，$s\neq a_n$；$\varphi(a_n)=\lim\limits_{s\to a_n}\varphi(s)$. 可以看出，$\varphi(s)$ 是不等于零的整函数，即 $\varphi(s)$ 的对数是整函数. 于是

$$\varphi(s)=e^{H(s)},$$

其中 $H(s)$ 是整函数. 这就证明了定理的第二个断言. 定理证毕.

§ 2. 有穷级整函数

我们引进今后所必需的一些定义.

定义 4. 设 $G(s)$ 是整函数,

$$M(r)=M_G(r)=\max_{|s|=r}|G(s)|.$$

如果存在 $a>0$, 使得

$$M(r)<e^{r^a},\quad r>r_0(a)>0, \tag{11}$$

则称 $G(s)$ 是有穷级整函数; 在这种情形, $\alpha=\inf a$ 称为 $G(s)$ 的级. 如果不管怎样的 $a>0$, 式(11)都满足, 则称 $G(s)$的级等于∞.

定义 5. 设 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$是复数序列, 且

$$0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots, \tag{12}$$

如果存在 $b>0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}<+\infty, \tag{13}$$

则称序列(12)有有穷收敛指数; 在这种情形, $\beta=\inf b$ 称为序列(12)的收敛指数. 如果不管怎样的 $b>0$, 式(13)都不成立, 则称序列(12)的收敛指数等于∞.

这节的基本结果是:

定理 5. 设 $G(s)$ 是有穷级 α 的整函数, $G(0)\neq 0$, s_n是 $G(s)$ 的零点序列, 且 $0<|s_1|\leqslant|s_2|\leqslant\cdots\leqslant|s_n|\leqslant\cdots$, 则序列$s_n$有有穷收敛指数 $\beta\leqslant\alpha$,

$$G(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

其中 $p\geqslant 0$ 是使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<+\infty$$

的最小整数. $g(s)$ 是次数 $g\leqslant\alpha$ 的多项式, 并且 $\alpha=\max(g,\beta)$. 除此以外, 如果对于任意的 $c>0$, 能够找到无穷序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots, r_n\to+\infty$, 使得

$$\max|G(s)| > e^{cr_n^{\alpha}}, \quad |s| = r_n, n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\alpha = \beta$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^{-\beta}$ 发散.

为了证明定理 5，需要一些辅助结果——引理. 在这些引理中，我们假定满足定理 5 中的条件，且利用这个定理中的记号.

引理 1. 设 $0<r<R$，m 是 $G(s)$ 在圆 $|s| \leqslant r$ 上的零点个数，则

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \leqslant \frac{M(R)}{|G(0)|}, \text{ 其中 } M(R) = \max_{|s|=R} |G(s)|.$$

证. 考虑

$$F(s) = G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}, \quad s \neq s_n,$$

$$F(s_n) = \lim_{s \to s_n} G(s) \prod_{n=1}^{m} \frac{R^2 - s\bar{s}_n}{R(s - s_n)}$$

其中 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 是 $G(s)$ 在 $|s| \leqslant r$ 上的零点.

函数 $F(s)$ 在圆 $|s| \leqslant R$ 上是解析的，且在 $|s| = R$ 上

$$|F(s)| = |G(s)|.$$

因此，由最大模原理，

$$|F(0)| = |G(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{R}{|s_n|} \leqslant \max_{|s|=R} |F(s)| = M(R),$$

由此推出引理的断言.

推论. 如果 m 是函数 $G(s)$ 在以原点为中心、$\frac{R}{2}$ 为半径的圆上的零点数，则

$$m \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M(R)}{|G(0)|}.$$

引理 2. 如果 $N(r)$ 表示 $G(s)$ 在圆 $|s| \leqslant r$ 上的零点数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，能够找到 $c = c(\varepsilon) > 0$，使得

$$N(r) \leqslant c r^{\alpha+\varepsilon};$$

此外有 $\beta \leqslant \alpha$.

证. 第一个不等式由引理 1 和 $G(s)$ 的级的定义推出. 现在我们来证明,对于任意的 $b>\alpha$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-b}$$

收敛. 由此就推出引理的第二个断言. 由已经证明的不等式可知,对于任意的 $\varepsilon>0$, 有 $n\leqslant c|s_n|^{\alpha+\varepsilon}$, 即

$$|s_n|^{-b}\leqslant c^{\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}$$

如果 $b>\alpha$, 那么对于充分小的 $\varepsilon>0$, $\dfrac{b}{\alpha+\varepsilon}>1$.因此上述级数收敛.

引理 3. 设 s_n 是具有有穷收敛指数 β 的序列 (12), $p\geqslant 0$ 是使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-(p+1)}<+\infty$ 的最小整数. 又设 $P(s)$ 是由下面等式给定的整函数:

$$P(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p}. \qquad (14)$$

那么, $P(s)$ 的级等于β. 此外,如果 $|s_n|\to+\infty$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}<+\infty$$

则

$$|P(s)|\leqslant e^{cr^{\beta}},\quad |s|=r.$$

证. 设 $P(s)$ 的级是 α. 由引理 2 推出, $\beta\leqslant\alpha$. 剩下要证明, 对于任意的 $\varepsilon>0$, $\alpha\leqslant\beta+\varepsilon$, 即应证明当 $|s|\to+\infty$ 时,

$$\ln|P(s)|<c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon}.$$

为了简明起见,乘积 (14) 中的因子用 $u(s,s_n)$ 表示. 设

$$\ln|P(s)|=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

其中 $\sum_1=\sum\limits_{\left|\frac{s}{s_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}}\ln|u(s,s_n)|$, $\sum_2=\sum\limits_{\left|\frac{s}{s_n}\right|>\frac{1}{2}}\ln|u(s,s_n)|$.

其次,对于 $\sum_1$ 中的项

$$\ln|u(s,s_n)| \leqslant \frac{1}{p+1}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1} + \frac{1}{p+2}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+2}$$
$$+\cdots \leqslant 2\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1};$$

对于$\sum_2$中的项

$$\ln|u(s,s_n)| \leqslant \ln\left(1+\left|\frac{s}{s_n}\right|\right)+\left|\frac{s}{s_n}\right|+\cdots+\frac{1}{p}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p$$
$$=r_p\left(\frac{|s|}{|s_n|}\right) \leqslant \begin{cases} c(p)\left|\frac{s}{s_n}\right|^p, & p \geqslant 1; \\ c(\varepsilon)\left|\frac{s}{s_n}\right|^\varepsilon, & p=0. \end{cases}$$

因此，

$$\ln|p(s)| \ll \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1} + \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} r_p\left(\left|\frac{s}{s_n}\right|\right).$$

如果 $\beta=p+1$，那么第一个和

$$\ll |s|^\beta.$$

设$\beta<p+1$和$\beta+\varepsilon<p+1$，则第一个和

$$\ll |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1-(\beta+\varepsilon)} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

于是，对于任意的$p \geqslant 0$，第一个和 $\ll |s|^{\beta+\varepsilon}$. 如果$p \geqslant 1$，那么第二个和(因为$\beta \geqslant p$)

$$\ll \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \cdot \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p-(\beta+\varepsilon)}$$
$$\ll |s|^{\beta+\varepsilon};$$

如果$p=0$，那么第二个和

$$\ll \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}}\left|\frac{s}{s_n}\right|^\varepsilon = |s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{\left|\frac{s}{s_n}\right| > \frac{1}{2}} \frac{1}{|s_n|^{\beta+\varepsilon}} \cdot \left|\frac{s}{s_n}\right|^{-\beta} \ll |s|^{\beta+\varepsilon}.$$

引理的第一部分证毕. 对于第二部分的证明，我们注意到这时一定有$\beta>0$(因为$|s_n| \to +\infty$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n|^{-\beta}$收敛). 于是在