高等数学解题分析1000例

张德培　俞良甫
白银凤　陈文光　编

水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　30.625印张　682千字
1985年12月第一版　1985年12月北京第一次印刷
印数00001—40000册　定价5.00元
书号　7143·6044

前　言

为了加深对基本概念和基本理论的理解，提高解题能力，学习数学，做习题是必不可少的环节。鉴于社会上广大青年工人、干部和科技工作者自学高等数学蔚然成风，他们渴望得到老师的辅导，但机会不多。编写《高等数学解题分析一千例》的目的，是想在这方面提供一些我们力所能及的帮助。

我们在选题时侧重于那些具有典型性和代表性的题。其中有些题目做了较详尽的解答，分析了考虑问题的思路，希望读者深入体会，以达触类旁通的效果；有些题则力求简明扼要，给读者留下回味的余地。

本书可作为电视大学、职工业大和理工科大学学生及有关人员的参考资料，希望能够是自学高等数学的青年和科技工作者的良师益友。

本书特点：①每章开头的《内容提要》列出了必要的理论知识和常用的计算公式，便于读者复习及查阅；②取材由浅入深，文字简炼，突出重点、难点；③编者力求把多年在数学中的经验、体会熔化在解题过程中，以期收到举一反三的效果。

全部书稿承蒙金子瑜副教授、董克诚副教授进行了审阅，并提出了宝贵的修改意见，谨此一并致谢。

限于编者水平，缺点、错误在所难免，敬请批评指正。

编者1985.7.1于保定

目　录

第一章　函数及其图形

一、预备知识

（一）内容提要

1.区间及其表示法

满足不等式$a<x<b$的所有实数x的集合叫做开区间，记作(a,b)。

即　　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的所有实数x的集合叫做闭区间，记作$[a,b]$。

即　　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的所有实数x的集合叫做半开区间，记作$[a,b)$，或$(a,b]$。

即　　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$。

记号$(-\infty,+\infty)$表示所有实数的集合，也可写为$-\infty<x<+\infty$。

记号$(a,+\infty)$表示大于a的所有实数的集合，可写为$a<x<+\infty$。

类似可以规定$(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$等记号的含义。

满足不等式$|x-a|<\delta$的所有实数x的集合叫做点a的δ邻域，记作$N(a,\delta)$。

即　$N(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$。

2.绝对值及其性质

（1）绝对值的定义

$$|x|=\begin{cases}x & \text{当}x\geqslant 0\text{时，}\\ -x & \text{当}x<0\text{时。}\end{cases}$$

（2）绝对值的四则运算

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$$

（3）$|a|<\varepsilon$ 的充分必要条件是：$-\varepsilon<a<\varepsilon$。

（二）例题与分析

1.1 对照写出等价的不等式与区间：

（1）$\lvert x\rvert<3$	1° $4<x<6$
（2）$\lvert x-1\rvert<3$	2° $-3<x<3$
（3）$\lvert 3-2x\rvert<1$	3° $x>3$ 或 $x<-1$
（4）$\lvert 1+2x\rvert\leqslant 1$	4° $x>2$
（5）$\lvert x-1\rvert>2$	5° $-2<x<4$
（6）$\lvert x+2\rvert\geqslant 5$	6° $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$
（7）$\lvert 5-x^{-1}\rvert<1$	7° $1<x<2$
（8）$\lvert x-5\rvert<\lvert x+1\rvert$	8° $x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$
（9）$\lvert x^2-2\rvert\leqslant 1$	9° $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$
（10）$x<x^2-12<4x$	10° $-1\leqslant x\leqslant 0$

分析： 解带有绝对值的不等式，首先应该利用绝对值的性质3°，将它化为不带绝对值的不等式，然后求解。有时还需要利用不等式两端“≥”（或“>”）和“≤”（或“<”）

两部分，进而将不等式化为不等式组来求解。

解 （1）$\Leftrightarrow 2°$；（2）$\Leftrightarrow 5°$；（3）$\Leftrightarrow 7°$；（4）$\Leftrightarrow 10°$；（5）$\Leftrightarrow 3°$；（6）$\Leftrightarrow 8°$；（7）$\Leftrightarrow 9°$；（8）$\Leftrightarrow 4°$；（9）$\Leftrightarrow 6°$；（10）$\Leftrightarrow 1°$；

例如，（7）$|5-x^{-1}|<1 \Leftrightarrow -1<5-x^{-1}<1$，即 $-6<-\dfrac{1}{x}<-4$，或 $4<\dfrac{1}{x}<6$。所以 $\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{4}$，故（7）$\Leftrightarrow 9°$。

（8）$|x-5|<|x+1|$ 即 $\left|\dfrac{x-5}{x+1}\right|<1 \Leftrightarrow -1<\dfrac{x-5}{x+1}<1$，当 $x+1>0$ 时，即 $x-5<x+1$，且 $x-5>-(x+1)$。解以上不等式组得 $x>2$。当 $x+1<0$，有 $x+1<x-5<-(x+1)$，无解。故（8）$\Leftrightarrow 4°$。

（9）$|x^2-2|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant x^2-2\leqslant 1$，即 $1\leqslant x^2\leqslant 3$；而欲使 $x^2\geqslant 1$，需 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

欲使 $x^2\leqslant 3$，需 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$

而欲使 $x^2\geqslant 1$ 且 $x^2\leqslant 3$，即 $1\leqslant x^2\leqslant 3$，$x$ 需满足不等式 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$。

故（9）$\Leftrightarrow 6°$

1.2 证明下列不等式

（1）$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$；

（2）若 $a>0$，$b>0$，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

（3）$x>0$，则 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$；当且仅当 $x=1$ 时，等式成立。

解 （1）因为 $a\leqslant|a|$ 对任何实数 a 成立

所以 $$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big| \quad (1)$$

又 $|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$

所以有 $$|x|-|y|\leqslant|x-y| \quad (2)$$

类似可得 $|y-x|\geqslant|y|-|x|=-(|x|-|y|)$

但 $|x-y|=|y-x|$，故有 $|x-y|\geqslant-(|x|-|y|)$，或

$$|x|-|y|\geqslant-|x-y| \quad (3)$$

综合（2）、（3）两式，可得

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y| \quad (4)$$

最后，因为 $|x-y|=|x+(-y)|\leqslant|x|+|(-y)|=|x|+|y|$ 故 $$|x-y|\leqslant|x|+|y| \quad (5)$$

综合（1）、（4）、（5）三式，便得所证。

（2） 因为 $(a-b)^2\geqslant 0$，即 $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

所以 $a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$ 即 $(a+b)^2\geqslant 4ab$

又 $a>0$，$b>0$，所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$。

不等式两端除 2，便得所证。

（3） 因 $(x-1)^2\geqslant 0$，即 $x^2-2x+1\geqslant 0$，或 $x^2+1\geqslant 2x$，因为 $x>0$，故可两端同除以 x，所以有

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2.$$

1.3 解不等式：

（1）$\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|>\dfrac{x-2}{x+1}$；（2）$\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$；

解 （1）因为，只有当 $a<0$，才有 $a<|a|$，所以由 $\dfrac{x-2}{x+1}<\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|$ 知 $\dfrac{x-2}{x+1}<0$。即 $x-2>0$，$x+1<0$。或 $x-2<0$，$x+1>0$；

解上述两个不等式组：$\begin{cases}x-2>0\\x+1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2<0\\x+1>0\end{cases}$，

得$-1<x<2$。

解 （2） $\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$

分析 解这类不等式的步骤，一般是：①将不等式左端$f(x)=\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$分解因式；②找出各因子的零值点，这些零值点将数轴分成若干个区间；③逐个考察$f(x)$在这些区间上的符号（看是否使不等式成立），便可求出该不等式的解。

解 $f(x)=\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$的分子和分母中各个因子的零值点分别为：$-1$，$2$，$\dfrac{1}{3}$。按由小而大的次序，它们将数轴分成四个区间：

$$[-\infty,\ -1],\ \left[-1,\ \frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3},\ 2\right],\ [2,\ -\infty]$$

下面考察$f(x)$在这些区间上的符号，列表由下表可以看出：

x	$(-\infty-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},\ 2\right)$	2	$(2,\ +\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	无意义	$-$	0	$+$

当 $-1<x<\dfrac{1}{3}$时，$\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$；

当 $2<x<+\infty$时，$\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$。

所以，不等式的解为：$-1<x<\frac{1}{3}$或$x>2$。

本题的另一解法是：

若 $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$，必须分子、分母同号。即或者$\begin{cases}(x+1)(x-2)>0\\3x-1>0\end{cases}$，或者$\begin{cases}(x+1)(x-2)<0\\3x-1<0\end{cases}$；

同理，$(x+1)(x-2)>0$的充要条件是$\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1<0\\x-2<0\end{cases}$；

$(x+1)(x-2)<0$的充要条件是$\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\end{cases}$，或者$\begin{cases}x+1<0\\x-2>0\end{cases}$

于是，得到 $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$ 等价于下列四个不等式组：

$$\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\\3x-1>0\end{cases};$$

或
$$\begin{cases}x+1<0\\x-2<0\\3x-1>0\end{cases};$$

或
$$\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\\3x-1<0\end{cases};$$

或
$$\begin{cases} x+1<0 \\ x-2>0 \\ 3x-1<0 \end{cases}$$

解上述四个不等式组 得：$x>2$或$-1<x<\frac{1}{3}$，即为所求不等式的解。

1.4　解高次不等式：

（1）　$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$；

（2）　$-2x^2+4x-7>0$；

解　（1）因为$x^2-3x+2<|x^2-3x+2|$，所以　$x^2-3x+2<0$，即$(x-1)(x-2)<0$，即x应满足不等式组：$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2<0 \end{cases}$　或$\begin{cases} x-1<0 \\ x-2>0 \end{cases}$

解上述不等式组得　$1<x<2$。

（2）　因$-2x^2+4x-7>0$，即　$2x^2-4x+7<0$

又　$2x^2-4x+7=2(x^2-2x+1)+5=2(x-1)^2+5$恒大于0，故　$2x^2-4x+7<0$或$-2x^2+4x-7>0$是不可能的。故原题无解。

二、函数概念及其性质

（一）内容提要

1.函数定义

设有两个变量x和y，如果对于变量x在其变化范围内取的每一个值，变量y按一定规律有一个或多个确定的值与之对应。则称变量y是变量x的函数。记作$y=f(x)$

特别地，有一个且仅有一个y值与之对应时，称$y=f(x)$为单值函数。

称 x 为自变量，称 y 为因变量或函数。

2.定义域

对于自变量变化范围内的每一个x_0，函数y有确定的一些值与之对应，则称函数在x_0处有定义。使函数有定义的自变量值的全体（即 x的变化范围）称为函数的定义域。

对于由解析式子表示的函数，如对其定义域未作声明，那末，其定义域通常被理解为：使该数学表达式有意义的自变量的一切实数值。

3.反函数定义

设函数$y=f(x)$为单值函数，当变量x在区域X内变化时，变量y在区域Y内变化；如果对于变量y在区域Y内任取的一个值y_0，变量x在X内有x_0，使$y_0=f(x_0)$；则变量x构成变量y的函数。记作$x=\varphi(y)$。并称$x=\varphi(y)$为$y=f(x)$的反函数。

4.复合函数定义

若y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，则$y=f[\varphi(x)]$是x的函数，并称之为由函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，称u为中间变量。

复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域D是由$u=\varphi(x)$的定义域D_1中具有这样性质的点组成：点x必须使$\varphi(x)$的值落在$f(u)$的定义域D_2中。

5.函数的基本性质

（1）函数的单调性

若对于任意的x_1，$x_2\in(a, b)$，当$x_1<x_2$时总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad （或 \quad f(x_1)>f(x_2)）$$

则称函数$f(x)$在（a，b）内为一单调增加（或减少）的函数。