

高等数学解题分析1000例

张德培 俞良甫 编
白银凤 陈文光

★

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

★

787×1092毫米 32开本 30.625印张 682千字

1985年12月第一版 1985年12月北京第一次印刷

印数00001—40000册 定价5.00元

书号 7143·6044

前 言

为了加深对基本概念和基本理论的理解,提高解题能力,学习数学,做习题是必不可少的环节。鉴于社会上广大青年工人、干部和科技工作者自学高等数学蔚然成风,他们渴望得到老师的辅导,但机会不多。编写《高等数学解题分析一千例》的目的,是想在这方面提供一些我们力所能及的帮助。

我们在选题时侧重于那些具有典型性和代表性的题。其中有些题目做了较详尽的解答,分析了考虑问题的思路,希望读者深入体会,以达触类旁通的效果;有些题则力求简明扼要,给读者留下回味的余地。

本书可作为电视大学、职工业大学和理工科大学学生及有关人员的参考资料,希望能够是自学高等数学的青年和科技工作者的良师益友。

本书特点:①每章开头的《内容提要》列出了必要的理论知识和常用的计算公式,便于读者复习及查阅;②取材由浅入深,文字简炼,突出重点、难点;③编者力求把多年在数学中的经验、体会融化在解题过程中,以期收到举一反三的效果。

全部书稿承蒙金子瑜副教授、董克诚副教授进行了审阅,并提出了宝贵的修改意见,谨此一并致谢。

限于编者水平,缺点、错误在所难免,敬请批评指正。

编者1985.7.1于保定

目 录

前言

第一章 函数及其图形	1
一、预备知识	1
(一) 内容提要	1
(二) 例题与分析	2
二、函数概念及其性质	7
(一) 内容提要	7
(二) 例题与分析	9
函数概念、定义域、函数符号	9
函数的基本性质及其图形	19
复合函数	30
第二章 极限与连续性	34
一、极限概念	34
(一) 内容提要	
(二) 例题与分析	
序列的极限	
函数的极限	41
单侧极限	46
无穷大与无穷小	49
二、极限运算与函数的连续性	53
(一) 内容提要	53
(二) 例题与分析	56
极限的求法	56
无穷小的比较	95

函数的连续性	100
第三章 导数与微分	113
一、导数及其运算	113
(一) 内容提要	113
(二) 例题与分析	117
导数概念	117
运用四则法则求导	124
运用反函数及复合函数求导法则求导	129
隐函数求导	150
用参变量表示的函数求导	153
高阶导数	155
相关变化率	161
二、微分及其应用	169
(一) 内容提要	169
(二) 例题与分析	171
第四章 中值定理	178
一、中值定理	178
(一) 内容提要	178
(二) 例题与分析	178
二、洛必达法则	185
(一) 内容提要	185
(二) 例题与分析	186
三、泰勒公式	199
(一) 内容提要	199
(二) 例题与分析	200
第五章 导数的应用	208
一、函数的单调性、极值、最值	208
(一) 内容提要	208
(二) 例题与分析	209

函数的单调性	209
函数的极值与最值	213
二、曲线的凹凸性、拐点与渐近线	223
(一) 内容提要	223
(二) 例题与分析	224
曲线的凹凸性与拐点	224
曲线的渐近线	228
三、函数的作图、曲率、极值应用	230
(一) 内容提要	230
(二) 例题与分析	232
函数的作图	232
平面曲线的曲率	240
极值应用	244
第六章 不定积分	255
(一) 内容提要	255
(二) 例题与分析	259
不定积分概念	259
简单不定积分和换元积分法	261
分部积分法	286
有理函数的积分	297
三角函数有理式的积分	302
简单无理函数的积分	306
第七章 定积分	327
一、定积分的基本概念及其性质	327
(一) 内容提要	327
(二) 例题与分析	329
基本概念	329
基本性质	332
二、定积分的计算	336

(一) 内容提要	336
(二) 例题与分析	340
定积分的计算	340
换元积分法	352
分部积分法	364
定积分的近似计算	374
广义积分	381
第八章 定积分的应用	410
一、几何应用	410
(一) 内容提要	410
(二) 例题与分析	413
二、物理应用	439
(一) 内容提要	439
(二) 例题与分析	441
第九章 矢量代数与空间解析几何	459
一、空间直角坐标系、矢量代数	459
(一) 内容提要	459
(二) 例题与分析	464
空间点的直角坐标	464
矢量代数初步	468
二、平面与直线	493
(一) 内容提要	493
(二) 例题与分析	496
曲面方程	496
平 面	498
空间直线	506
二次曲线	510
第十章 多元函数微分法及其应用	516
一、多元函数、一阶偏导数、全微分及其应用	516

(一) 内容提要	516
(二) 例题与分析	518
多元函数概念	518
一阶偏导数	529
全微分及其应用	534
二、复合函数微分法、高阶偏导数、隐函数	
微分法	540
(一) 内容提要	540
(二) 例题与分析	542
复合函数微分法	542
高阶偏导数	548
隐函数微分法	558
三、空间曲线的切线及法平面、多元函数的极值、	
方向导数	567
(一) 内容提要	567
(二) 例题与分析	570
空间曲线的切线及法平面	570
曲面的切平面及法线	574
多元函数极值	576
方向导数	584
第十一章 重积分	587
一、二重积分	587
(一) 内容提要	587
(二) 例题与分析	591
二、三重积分	622
(一) 内容提要	622
(二) 例题与分析	625
三、重积分的应用	642
(一) 内容提要	642

(二) 例题与分析	645
第十二章 曲线积分与曲面积分	672
一、曲线积分	672
(一) 内容提要	672
(二) 例题与分析	675
对弧长的曲线积分	675
对坐标的曲线积分	683
与路径无关的曲线积分	697
格林公式	705
曲线积分的应用	712
二、曲面积分	721
(一) 内容提要	721
(二) 例题与分析	725
对面积的曲面积分	725
对坐标的曲面积分	732
奥——高公式	744
曲面积分的应用	755
斯托克斯公式	762
第十三章 场论初步	768
(一) 内容提要	768
(二) 例题与分析	773
数量场与矢量场	773
梯度	775
散度	786
环量与旋度	793
有势场、管形场与调和场	803
第十四章 无穷级数	815
一、数项级数	815
(一) 内容提要	815

(二) 例题与分析	818
二、幂级数	842
(一) 内容提要	842
(二) 例题与分析	847
三、富里叶级数	866
(一) 内容提要	866
(二) 例题与分析	868
第十五章 微分方程	881
一、基本概念	881
(一) 内容提要	881
(二) 例题与分析	881
二、一阶微分方程	887
(一) 内容提要	887
(二) 例题与分析	890
可分离变量的微分方程	890
齐次方程	897
一阶线性方程	905
贝努里方程	917
全微分方程	921
三、高阶可降阶的微分方程	934
(一) 内容提要	934
(二) 例题与分析	935
四、常系数线性微分方程	942
(一) 内容提要	942
(二) 例题与分析	944

第一章 函数及其图形

一、预 备 知 识

(一) 内容提要

1. 区间及其表示法

满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合叫做开区间，记作 (a, b) 。

即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合叫做闭区间，记作 $[a, b]$ 。

即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的所有实数 x 的集合叫做半开区间，记作 $[a, b)$ ，或 $(a, b]$ 。

即 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 。

记号 $(-\infty, +\infty)$ 表示所有实数的集合，也可写为 $-\infty < x < +\infty$ 。

记号 $(a, +\infty)$ 表示大于 a 的所有实数的集合，可写为 $a < x < +\infty$ 。

类似可以规定 $(-\infty, a)$ ， $[a, +\infty)$ ， $(-\infty, a]$ 等记号的含义。

满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的所有实数 x 的集合叫做点 a 的 δ 邻域，记作 $N(a, \delta)$ 。

即 $N(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$ 。

2. 绝对值及其性质

(1) 绝对值的定义

$$|x| = \begin{cases} x & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

(2) 绝对值的四则运算

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

(3) $|a| < \varepsilon$ 的充分必要条件是: $-\varepsilon < a < \varepsilon$ 。

(二) 例题与分析

1.1 对照写出等价的不等式与区间:

$$(1) |x| < 3 \quad 1^\circ \quad 4 < x < 6$$

$$(2) |x - 1| < 3 \quad 2^\circ \quad -3 < x < 3$$

$$(3) |3 - 2x| < 1 \quad 3^\circ \quad x > 3 \text{ 或 } x < -1$$

$$(4) |1 + 2x| \leq 1 \quad 4^\circ \quad x > 2$$

$$(5) |x - 1| > 2 \quad 5^\circ \quad -2 < x < 4$$

$$(6) |x + 2| \geq 5 \quad 6^\circ \quad -\sqrt{3} \leq x \leq -1$$

或 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$

$$(7) |5 - x^{-1}| < 1 \quad 7^\circ \quad 1 < x < 2$$

$$(8) |x - 5| < |x + 1| \quad 8^\circ \quad x \leq -7 \text{ 或 } x \geq 3$$

$$(9) |x^2 - 2| \leq 1 \quad 9^\circ \quad \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$$

$$(10) x < x^2 - 12 < 4x \quad 10^\circ \quad -1 \leq x \leq 0$$

分析: 解带有绝对值的不等式, 首先应该利用绝对值的性质^{3°}, 将它化为不带绝对值的不等式, 然后求解。有时还需要利用不等式两端“ $\geq$ ”(或“ $>$ ”)和“ $\leq$ ”(或“ $<$ ”)

两部分, 进而将不等式化为不等式组来求解。

解 (1) $\Leftrightarrow 2^\circ$; (2) $\Leftrightarrow 5^\circ$; (3) $\Leftrightarrow 7^\circ$; (4) $\Leftrightarrow 10^\circ$; (5) $\Leftrightarrow 3^\circ$; (6) $\Leftrightarrow 8^\circ$; (7) $\Leftrightarrow 9^\circ$; (8) $\Leftrightarrow 4^\circ$; (9) $\Leftrightarrow 6^\circ$; (10) $\Leftrightarrow 1^\circ$;

例如, (7) $|5-x^{-1}| < 1 \Leftrightarrow -1 < 5-x^{-1} < 1$, 即 $-6 < -\frac{1}{x} < -4$, 或 $4 < \frac{1}{x} < 6$ 。所以 $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$, 故 (7) $\Leftrightarrow 9^\circ$ 。

(8) $|x-5| < |x+1|$ 即 $\left| \frac{x-5}{x+1} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-5}{x+1} < 1$, 当 $x+1 > 0$ 时, 即 $x-5 < x+1$, 且 $x-5 > -(x+1)$ 。解以上不等式组得 $x > 2$ 。当 $x+1 < 0$, 有 $x+1 < x-5 < -(x+1)$, 无解。故 (8) $\Leftrightarrow 4^\circ$ 。

(9) $|x^2-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2-2 \leq 1$, 即 $1 \leq x^2 \leq 3$; 而欲使 $x^2 \geq 1$, 需 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$

欲使 $x^2 \leq 3$, 需 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

而欲使 $x^2 \geq 1$ 且 $x^2 \leq 3$, 即 $1 \leq x^2 \leq 3$, x 需满足不等式 $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ 。

故 (9) $\Leftrightarrow 6^\circ$

1.2 证明下列不等式

(1) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$;

(2) 若 $a > 0$, $b > 0$, 则

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(3) $x > 0$, 则 $x + \frac{1}{x} \geq 2$; 当且仅当 $x = 1$ 时, 等式成立。

解 (1) 因为 $a \leq |a|$ 对任何实数 a 成立

$$\text{所以} \quad |x| - |y| \leq |x - y| \quad (1)$$

$$\text{又} \quad |x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

$$\text{所以有} \quad |x| - |y| \leq |x-y| \quad (2)$$

$$\text{类似可得} \quad |y-x| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|)$$

$$\text{但} \quad |x-y| = |y-x|, \text{故有} \quad |x-y| \geq -(|x| - |y|), \text{或}$$

$$|x| - |y| \geq - |x-y| \quad (3)$$

综合(2)、(3)两式, 可得

$$| |x| - |y| | \leq |x-y| \quad (4)$$

$$\text{最后, 因为} \quad |x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |(-y)| = |x| + |y| \quad \text{故} \quad |x-y| \leq |x| + |y| \quad (5)$$

综合(1)、(4)、(5)三式, 便得所证。

$$(2) \quad \text{因为} (a-b)^2 \geq 0, \text{即} a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\text{所以} \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad \text{即} \quad (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\text{又} \quad a > 0, b > 0, \text{所以} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

不等式两端除2, 便得所证。

$$(3) \quad \text{因} (x-1)^2 \geq 0, \text{即} \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0, \text{或} \\ x^2 + 1 \geq 2x, \text{因为} x > 0, \text{故可两端同除以} x, \text{所以有}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

1.3 解不等式:

$$(1) \quad \left| \frac{x-2}{x+1} \right| > \frac{x-2}{x+1}, \quad (2) \quad \frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0;$$

解 (1) 因为, 只有当 $a < 0$, 才有 $a < |a|$, 所以

$$\text{由} \quad \frac{x-2}{x+1} < \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \quad \text{知} \quad \frac{x-2}{x+1} < 0. \quad \text{即} \quad x-2 > 0,$$

$$x+1 < 0. \quad \text{或} \quad x-2 < 0, \quad x+1 > 0;$$

$$\text{解上述两个不等式组:} \quad \begin{cases} x-2 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases},$$

得 $-1 < x < 2$ 。

解 (2) $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$

分析 解这类不等式的步骤，一般是：①将不等式左端

$f(x) = \frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$ 分解因式；②找出各因子的零值

点，这些零值点将数轴分成若干个区间；③逐个考察 $f(x)$ 在这些区间上的符号（看是否使不等式成立），便可求出该不等式的解。

解 $f(x) = \frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$ 的分子和分母中各个因子

的零值点分别为： -1 ， 2 ， $\frac{1}{3}$ 。按由小而大的次序，它们将数轴分成四个区间：

$[-\infty, -1]$ ， $[-1, \frac{1}{3}]$ ， $[\frac{1}{3}, 2]$ ， $[2, +\infty]$

下面考察 $f(x)$ 在这些区间上的符号，列表由下表可以看出：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x+1$	—	0	+		+		+
$3x-1$	—		—	0	+		+
$x-2$	—		—		—	0	+
$f(x)$	—	0	+	无意义	—	0	+

当 $-1 < x < \frac{1}{3}$ 时， $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$ ；

当 $2 < x < +\infty$ 时， $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$ 。

所以，不等式的解为： $-1 < x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 2$ 。

本题的另一解法是：

若 $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$ ，必须分子、分母同号。即或

$$\text{者} \begin{cases} (x+1)(x-2) > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases}, \text{或者} \begin{cases} (x+1)(x-2) < 0 \\ 3x-1 < 0 \end{cases},$$

同理， $(x+1)(x-2) > 0$ 的充要条件是 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$

$$\text{或} \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases};$$

$(x+1)(x-2) < 0$ 的充要条件是 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ ，或者

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

于是，得到 $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} \geq 0$ 等价于下列四个不等式组：

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ 3x-1 > 0; \end{cases} \\ \text{或} & \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 < 0 \\ 3x-1 > 0; \end{cases} \\ \text{或} & \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 0 \\ 3x-1 < 0; \end{cases} \end{aligned}$$

或

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 > 0 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$$

解上述四个不等式组得: $x > 2$ 或 $-1 < x < \frac{1}{3}$, 即为所求不等式的解。

1.4 解高次不等式:

$$(1) \quad |x^2 - 3x + 2| > x^2 - 3x + 2,$$

$$(2) \quad -2x^2 + 4x - 7 > 0;$$

解 (1) 因为 $x^2 - 3x + 2 < |x^2 - 3x + 2|$,

所以 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 即 $(x-1)(x-2) < 0$, 即 x 应满足

$$\text{不等式组: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

解上述不等式组得 $1 < x < 2$.

$$(2) \quad \text{因 } -2x^2 + 4x - 7 > 0, \text{ 即 } 2x^2 - 4x + 7 < 0$$

又 $2x^2 - 4x + 7 = 2(x^2 - 2x + 1) + 5 = 2(x-1)^2 + 5$ 恒大于 0, 故 $2x^2 - 4x + 7 < 0$ 或 $-2x^2 + 4x - 7 > 0$ 是不可能的。故原题无解。

二、函数概念及其性质

(一) 内容提要

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y , 如果对于变量 x 在其变化范围内取的每一个值, 变量 y 按一定规律有一个或多个确定的值与之对应。则称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y = f(x)$

特别地, 有一个且仅有一个 y 值与之对应时, 称 $y = f(x)$ 为单值函数。

称 x 为自变量, 称 y 为因变量或函数。

2. 定义域

对于自变量变化范围内的每一个 x_0 , 函数 y 有确定的一些值与之对应, 则称函数在 x_0 处有定义。使函数有定义的自变量值的全体 (即 x 的变化范围) 称为函数的定义域。

对于由解析式子表示的函数, 如对其定义域未作声明, 那末, 其定义域通常被理解为: 使该数学表达式有意义的自变量的一切实数值。

3. 反函数定义

设函数 $y=f(x)$ 为单值函数, 当变量 x 在区域 X 内变化时, 变量 y 在区域 Y 内变化; 如果对于变量 y 在区域 Y 内任取的一个值 y_0 , 变量 x 在 X 内有 x_0 , 使 $y_0=f(x_0)$; 则变量 x 构成变量 y 的函数。记作 $x=\varphi(y)$ 。并称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。

4. 复合函数定义

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的函数, 并称之为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量。

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域 D 是由 $u=\varphi(x)$ 的定义域 D_1 中具有这样性质的点组成: 点 x 必须使 $\varphi(x)$ 的值落在 $f(u)$ 的定义域 D_2 中。

5. 函数的基本性质

(1) 函数的单调性

若对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或} \quad f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内为一单调增加 (或减少) 的函数。