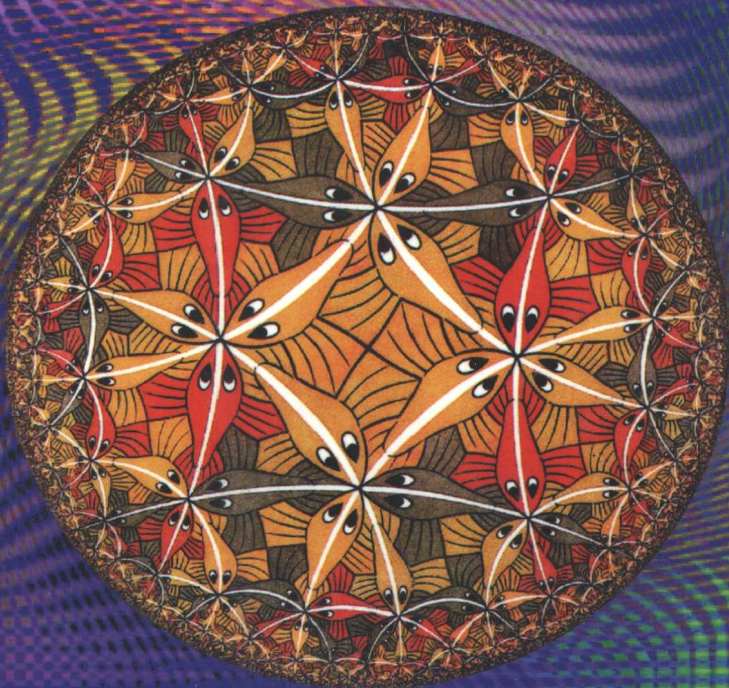


TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

WUQIONG ZHILÜ

GUANYU WUQIONGDA DE WENHUASHI

以色列 伊莱·马奥尔 著

王 前 武学民 金敬红 译

上海教育出版社

无穷之旅

——关于无穷大的文化史

01-49
31

关于无穷大的文化史

This diagram illustrates the Ptolemaic geocentric model of the universe. At the center is Earth (TERRA), surrounded by concentric circles representing the orbits of celestial bodies. The innermost circle is the Moon (LUNA). The next circle is the Sun (SOLIS). The outer rings represent the orbits of the planets: MERCURIUS, VENUS, MARS, JUPITER, and SATURNUS. The outermost ring shows the zodiac signs and constellations. Labels in Latin identify various celestial bodies and regions, including COELUM (Heaven), COELUM FIXARUM (Fixed Stars), and COELUM PLANETARUM (Planetary Heaven). The diagram is a complex representation of the geocentric cosmology of the time.



北航

C0621462

Eli Maor

To Infinity and Beyond
A Cultural History of the Infinite
Birkhäuser

© 1987 by Birkhäuser Boston, Inc.

根据 Birkhäuser 1987 年版译出,
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

图书在版编目 (C I P) 数据

无穷之旅: 关于无穷大的文化史 / (以色列) 马奥尔
著; 王前译. —上海: 上海教育出版社, 2000. 8
(通俗数学名著译丛 / 史树中主编)
ISBN 7-5320-6859-5

I. 无... II. ①马... ②王... III. 无限-普及读物
IV. 01-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2000) 第10317号

通俗数学名著译丛

无 穷 之 旅

——关于无穷大的文化史

[以色列]伊莱·马奥尔 著

王 前 武学民 金敬红 译

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路 123 号)

(邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850 × 1156 1/32 印张 12.75 插页 4 字数 303,000

2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—5100 本

ISBN 7-5320-6859-5/G·7015 定价: (软精) 23.50 元

迎接 2000 數學年

陳省身 1997

译丛序言

数学, 这门古老而又常新的科学, 正阔步迈向 21 世纪。

回顾即将过去的世纪, 数学科学的巨大发展, 比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位。数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透, 并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献。同时, 数学作为一种文化, 已成为人类文明进步的标志。因此, 对于当今社会每一个有文化的人士而言, 不论他从事何种职业, 都需要学习数学, 了解数学和运用数学。现代社会对数学的这种需要, 在未来的世纪中无疑将更加与日俱增。

另一方面, 20 世纪数学思想的深刻变革, 已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路。面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法, 门外汉往往只好望而却步。这样, 提高数学的可接受度, 就成为一种当务之急。尤其是当世纪转折之际, 世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作, 国际数学联盟(IMU)还专门将 2000 年定为“**世界数学年**”, 其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解, 特别是被普通公众所了解”。

一般说来, 一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础。随着中国现代数学研究与教育的长足进步, 数学普及工作在我国也受到重视。早在 60 年代, 华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物, 激发了一代青少年学习数学的兴趣, 影响绵延至今。改革开放以来, 我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力。但总体来说, 我国的数学普及工作与发达国家相

比尚有差距。我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务。为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的。

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量。丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的。所选著述，基本上都是在外国已广为流传、受到公众好评的佳作。它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采。

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围。为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益。即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的。现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系。

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降。在这样的情况下，上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措。参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的。

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见。我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功。

让我们举手迎接 2000 世界数学年, 让公众了解、喜爱数学, 让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997 年 8 月

仅以此书纪念我的老师

弗兰兹·奥伦多尔夫教授

(1900 年生于德国, 1981 年在以色列逝世.)

序 言

无穷大！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观点都不曾如此有效地激励人类的智力；然而，没有任何概念比无穷大更需要澄清……

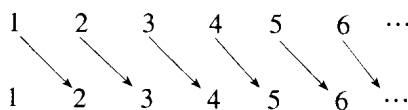
——大卫·希尔伯特(1862-1943)

有一个故事据说出自杰出的数学家大卫·希尔伯特之口，上述引语就是他说的。一天夜里已经很晚了，一个人走进一家旅馆想要一个房间。店主回答说：“对不起，我们没有任何空位子了，但是让我们看一看，或许我最终能为您找到一个房间。”然后店主离开了他的桌子，很不情愿地叫醒了他的房客，并且请他们换一换房间：1号房间的房客搬到了2号房间，2号房间的房客搬到了3号房间，以此类推，直到每一位房客都从一个房间搬到了下一个房间为止。令这位迟来者感到十分吃惊的是，1号房间竟然被腾了出来。他很高兴地搬了进去，然后安顿下来过夜。但是，一个百思不得其解的问题使他无法入睡：为什么仅仅通过让房客从一个

无穷大是一个深不可测的海湾，所有的东西都会在其中消失。

——马可·奥勒利乌斯(121-180)，罗马皇帝和哲学家

房间搬到另一个房间，第一个房间就能腾出来呢？(要知道，他来时所有的房间都住人了。)后来我们的这位客人渐渐地找到了答案：这所旅馆一定是希尔伯特的旅馆，它是城里一个据认为有无数个房间的旅馆！通过使所有房客都从一个房间搬到另一个房间，1号房间便被腾了出来：



有样东西不能证明自己，而且一旦它能够证明自己，它就不会存在，这件东西是什么？它就是无穷大！

——列奥纳多·达·芬奇
(1452 - 1519)，意大利艺术家和工程师

当我们说一个东西是无穷大的时候，这仅仅意味着我们不能感知到所指事物的终点或边界。

——托马斯·霍布斯
(1588 - 1679)，英国哲学家

这个著名的轶事在某种程度上讲出了无穷大的全部故事。这个故事所涉及的引起人们好奇的悖论和看似不可能的情况，曾使人类困惑了两千余年。这些悖论都源自数学，[vii]而且正是这门学科为最后解决这些悖论提供了最成功的途径。对无穷大的澄清和非神秘化仅仅是在本世纪才全部完成的，而且即使是这种功绩也不能说是登峰造极。与各门学科一样，数学的周围也有一种因不完整而带来的清爽空气；一种神秘刚被破解，另一种新的神秘早已渗入其中。得到对科学的绝对的和最终的理解，是一个难以捉摸的目标，然而正是这种难以捉摸才使得对任何一个科学领域的研究都那么富有刺激性，当然数学也不例外。

很多思想家都研究过无穷大。古希腊的哲学家们就一条线段(或者就任何数量而言)，是不是可无限地被分割，或者说是不是可以最终



得到一个不可分割的点（即“原子”）等问题，展开了无休止的争论。他们的现代追随者——物理学家们今天仍然还在设法解决同一个问题，他们使用巨大的粒子加速器寻找“基本粒子”——那些构成整个宇宙的基本砖块。天文学家一直在从另一个极端的——无限广阔的——尺度上思索着无穷大问题。我们的宇宙真像它所呈现在任何晴朗的黑夜观看天空的人们面前那样无穷无尽，或是它有一个边界（在这个边界之外什么东西也不存在）吗？有限宇宙的可能性似乎是对我们常识的一种挑战。我们可以在任何方向上一直走下去而永远也到不了“边”，这个事实不是很清楚吗？但是我们将不难看出，当研究无穷大时，“常识”是一个非常差别的向导！

艺术家也对无穷大进行了研究，他们在画布上以线条描绘出了无穷大，而这些画布和线条成了宝贵的艺术财富。“我在画无穷大，”凡·高在凝视着他眼前那无限延伸的法兰西平原时大声喊道。布莱兹·帕斯卡以他所特有的忧郁的世界观哀叹道：“那些无限空间里的无尽寂静使我感到恐惧。”而另一个文人乔尔达诺·布鲁诺在想到无限的宇宙时感到欢欣鼓舞：“打开一扇我们可以从中向外观察无尽太空的大门”是他的座右铭，他因此被宗教法庭逮捕，并且被判处死刑。

但是不管我们用什么方法考察无穷大，我们最终都被带回到数学领域，因为正是在这里才有无穷大概念最深的根基。一种观点认为数

无穷大是一个黑暗的、无限的海洋,它没有边际。

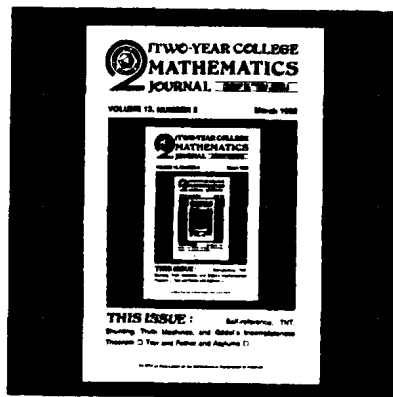
——约翰·弥尔顿 (1608—1674), 英国诗人

学就是关于无穷大的科学。在一本由日本数学学会最近编写的《数学百科全书》中^①, [viii] “infinity”, “infinite” 和 “infinitesimal” 这些词在索引中出现不下五十次。事实上, 如果没有无穷大的概念, 我们将很难看出数学将如何存在, 因为一个孩子最先学到的数学——如何数数——就是以每一个整数都有一个后继者这一不言而喻的假定为基础的。在几何学中十分重要的“直线”的概念, 也是以类似的假定为基础的: 我们能够在两个方向上无限地延长一条直线——至少在原理上如此。甚至在像概率这样看起来



VOLUME 13, NUMBER 2

March 1982



THIS ISSUE : Self-reference, TNT, Shunting, Truth Machines, and Gödel's Incompleteness Theorem □ Tarr and Fether and Asylums □

图 1 承蒙美国数学学会提供。

① MIT 出版社于 1980 年出版了英文版。

“有限的”数学分支中，无穷大的概念也起着一种微妙的作用：当我们掷十次硬币时，可能会得到五次“正面”，和五次“反面”，或者会得到六次“正面”和四次“反面”，或者事实上可得到任何结果；但是当我们说得到“正面”或“反面”的概率相等时，我们心照不宣地假定：当掷币的次数无穷多时，就会产生相等的结果。

我第一次遇到无穷大时还是个小男孩。别人给了我一本书，这本书是犹太教法典中的传说部分，讲的是出埃及记的故事。书的封面上是一幅画，画中的一个小男孩手中拿着一本与该书相同的书。当我仔细看时，可以看到在小孩[ix]男孩拿的那本小书的封面上还是相同的画。可能这幅画又出现在画中的画里面——我记不太清楚了。但是我确实记得，当时我头脑中的那个想法就是：如果有可能继续这一过程，那么它将永远继续下去！这种可能性十分有趣；当时我还不知道，一个那时还不太出名的荷兰画家毛里茨·C·埃舍尔已对这种观念很着迷，并且在他的作品中把这种观念表达了出来，从而把这个过程实施到使用绘画工具能够达到的最大限度。

后来我又一次遇到了无穷大，这次与上次完全不一样。一天晚上，在沿着华盛顿（哥伦比亚特区）的康涅狄格大街散步时，我忽然发现自己站在一尊巨大的抽象派雕塑之前，它正好竖立在人行道上。一个标牌上写着：《无穷大的极限Ⅲ》。它由一个大的椭圆形青铜环和安装在青铜环极值点上的螺旋桨形状的物体组成。这个细长的物体看起来能在它的枢纽上自由转

无穷大只是一种比喻，意思是指这样一个极限：当允许某些比率无限地增加时，另一些特定比率可以相应地无限逼近这个极限，要多近有多近。

——卡尔·弗里德里希·高斯（1777—1855），德国数学家

无限集是一个可以与它自己的一个真子集一一对应的集。

——格奥尔格·康托尔（1845—1918），德国数学家

无穷大使可能的东西变成必然的东西。

——诺曼·卡曾斯，《星期六评论》，1978年4月15日



动,所以我轻轻地摸了它一下,本希望它能够开始转动.然而,暗藏的报警器响了,而且其声音如此刺耳,以致于我当时十分害怕.在我的最初的震惊结束以后,我可以听见我的体内有一种声音在说:“汝不可触摸无穷大!”^①

无穷大是这样一个地方,不能发生的事在这里会发生。
——一位不知姓名的中学生

在以后的章节中,我将试图与读者分享无穷大给所有时代的人们所带来的兴奋和敬畏.本书的书名《无穷之旅》,其原意是“走向无穷大及其之外”,取自一本望远镜说明书,它列出了这台仪器的很多性能,其中包括如下内容:“您的望远镜的聚焦范围从十五英尺到无穷大及其之外.”正如本书的副标题“关于无穷大的文化史”所显示的那样,我的目的是说明无穷大在各个时期的故事,但是不一定按照一个严格的时间顺序.我讲的故事在很大程度上是一个学科的故事——故事是从一个数学家的角度讲述的.这就意味着我必须面对每一个科学家在为受过教育的外行写书时所面临的同一种困境:如何在兼顾他的同行希望他应坚持的严谨标准的同时,用外行能够理解的语言表达作者的意思.这种困境在数学中尤其严重,因为数 [x]

① 艺术家约翰·塞弗非常友好.他送给我一本讲述他的作品的非常精美的书.有关《无穷大的极限Ⅲ》,他说:“部件中心‘8’字型青铜件安装在其青铜外环之内,像在空中漂浮一样.这个形状提醒我们,它就是无穷大符号.”关于支撑这个作品的那个基座,他说:“那个石墨构件不仅仅是一个合适的支撑,而且是该雕塑的一个关键部分,它把坚硬的和有限的大地带入到整体关系的均衡之中.这个石头构件是我们思考无穷大的基础.”

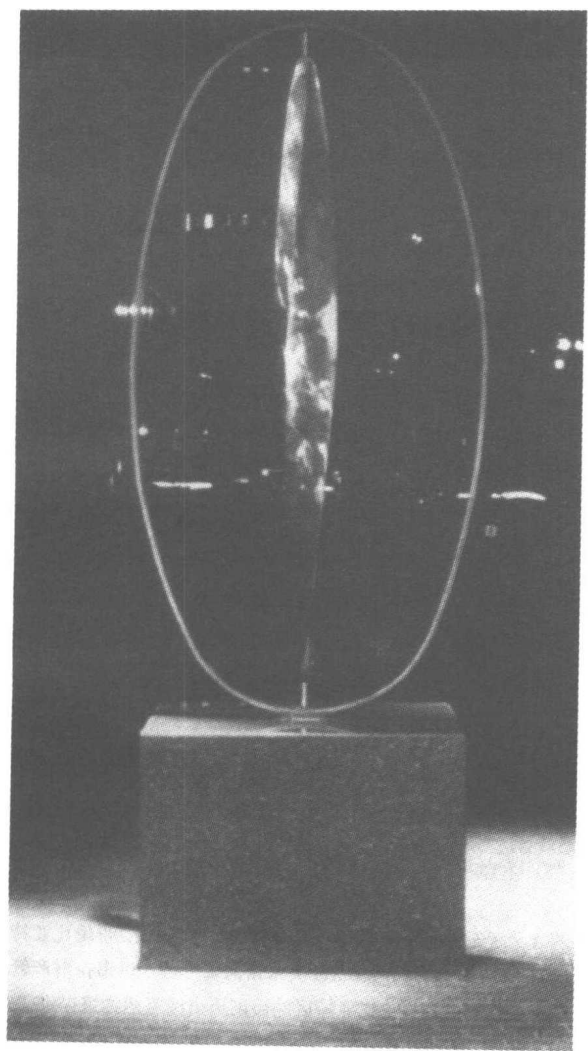


图 2 《无穷大的极限Ⅲ》，约翰·塞弗创作（华盛顿，哥伦比亚特区）。承蒙约翰·塞弗提供。

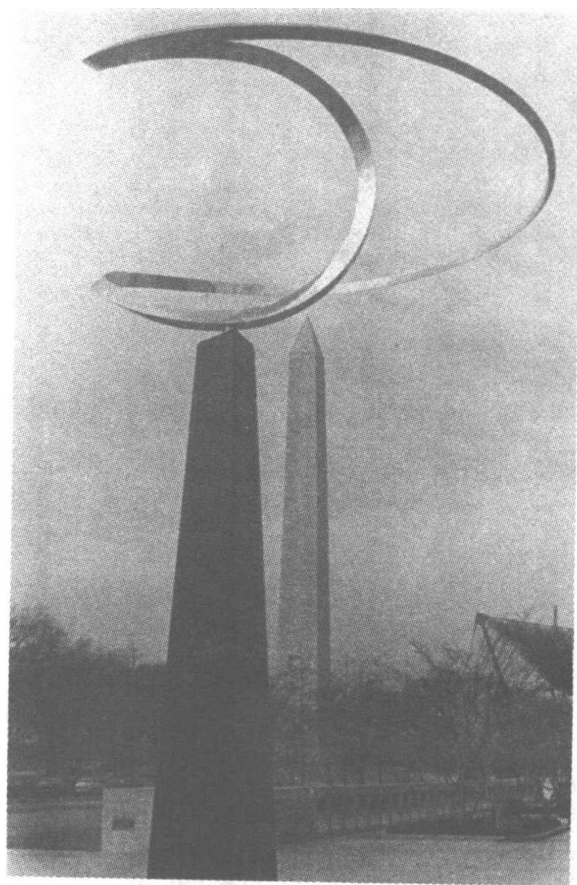


图3 《无穷大》，何塞·德·里韦拉（华盛顿，哥伦比亚特区）。由纽约 Grace Borgenicht 美术馆何塞·德·里韦拉财产管理机构 and 华盛顿哥伦比亚特区的美国历史国家博物馆提供。 [xii]

学几乎完全依赖于符号和方程的非文字语言。我希望我在以适当的方法解决这个问题方面是成功的。

因为本书是为一般读者写的，所以我尽力

回避在正文本身使用“高等”数学。(当然,熟悉一些初等代数知识不会有任何害处。)一些专门的数学问题被放在附录中,以保持一般性讨论的连续性。各章只是很松散地连在一起,所以漏读其中的一些章节将不会影响其他阅读。最后,那些仅仅喜欢随便浏览本书的读者仍然能够欣赏很多图形和照片,还有关于无穷大的大量引语、诗句等等。

无穷大是人类大脑无法领会的那个没有边际的维度。

——无名氏

很多朋友在这项工作中给我提供了帮助,我十分感谢他们。我在此尤其对下述人员表示谢意:感谢我的同事 Wilbur Hoppe 和 Robert Langer,他们读了书稿的很多部分,并且提出过很多建议;感谢 Blagoy Trenev,我不断地就一些语言和文体方面的问题打扰他;感谢 Hilde Bacharach 和 Raffaella Borasi,他们为我提供了两首描述无穷大的诗;感谢 Ruth Ollendorff,她使我得以了解她已故丈夫 Franz Ollendorff 教授很多未发表的手稿,本书就是献给他的;感谢 Mary Besser,她编辑了绝大部分书稿,并且在最后定稿时给我提供了极大帮助;感谢 Lynn Metzker,他绘制了大部分的线条画;感谢威斯康星大学欧克莱尔分校和位于密歇根州罗切斯特的奥克兰大学,它们慷慨提供了两项经费,对我的工作提供了极大帮助;还要感谢 Birkhäuser Boston 出版公司编辑出版人员,他们为本书得以出版发行付出了很多艰辛。最重要的是,我应感谢我的母亲 Luise Metzger,是她这些年来丰富了我的智力;我还要感谢