内 容 简 介

本书系高等学校工科电子类雷达专业教材。主要内容是论述概率论及统计数学在无线电技术中的应用。全书共分八章，讲述了概率论的基础知识、随机过程理论、随机过程通过线性与非线性系统的各种分析方法以及在噪声中对微弱信号的检测原理。全书比较侧重于分析方法和物理概念，并结合无线电设备中的典型部件或实例进行分析与计算。本书除作教材外，亦可供从事雷达、通信、遥测遥控等有关方面的科技工作者和大专院校师生参考。

统计无线电技术

北京工业学院

吴祈耀　朱华　黄辉宁　编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张16 3/4　388千字

1980年7月第一版　1980年7月第一次印刷　印数：0,001—6,300册

统一书号：15034·2042　　定价：1.75元

前　言

本书系高等学校工科电子类雷达专业统编教材之一。根据雷达专业教学计划的要求，它将做为一门专业基础理论课程，为学生学习掌握近代雷达理论，提供有关随机信号分析和信号检测等方面的基础理论知识。

全书可分三个部分共八章，前二章讲述了概率论的基础知识，内容包括有随机变量、分布函数、数字特征、随机变量的函数等概念的介绍，这部分内容是学习本课程的工具。第三至第六章主要讲述随机过程理论，内容包括有平稳随机过程、相关函数、功率谱密度等概念的介绍，以及对随机过程变换问题的分析和讨论。比较系统的阐述了随机过程（随机信号和噪声）通过线性与非线性系统时的各种分析方法。对于线性变换介绍了随机微分方程法、脉冲特性法和频谱法等典型的分析计算方法。对于非线性变换着重讨论了随机过程的无惰性非线性变换问题，介绍了多项式变换的矩函数法、直接法、特征函数法和包线法等典型分析方法。并且对各种分析方法都以无线电设备中的典型部件作为实例进行了具体分析与计算。最后两章主要讲述了在噪声中对微弱信号的检测原理。对于其应用的问题，包括对各种具体形式信号的匹配滤波和最佳检测问题，原则上都留给后续课程去解决，这里仅做一些简单介绍。其中第七章介绍了维纳（Wiener）线性滤波理论、匹配滤波器理论和理想接收机理论，从不同角度讨论了各种意义下的最佳接收问题。第八章介绍了统计检测和参量估值的基本知识，侧重于叙述一些重要概念和在实际中较为常用的准则和原理。为了便于学生理解，书中结合雷达的具体检测和测量问题，举了少量实际例子。

基于本书的宗旨和目的在于运用概率论和统计数学工具来解决无线电技术中的应用问题，因此书中比较侧重分析方法和物理概念的叙述，在数学工具的运用上要求准确，但不强求严密性，并从实际应用出发采用了许多近似计算方法。

本课程在学习前，学生应具备概率论，电路、信号与系统，电子线路以及无线电接收设备等方面的基础知识。全书的第一部分和最后一部分分别与先修课和后续课有必要的重复，在具体教学过程中可酌情增减。一般情况，本课程讲授时数以 60～80 学时左右为宜。

本书由北京工业学院无线电工程系主编，有三位同志参加编写，其中第一章和第三章由黄辉宁同志编写，第二章、第四章和第六章由朱华同志编写，第五章、第七章和第八章由吴祈耀同志编写。最后由吴祈耀同志对全书的文字、符号、公式进行了统一编排和整理。

华南工学院徐秉铮和钟祝生二同志承担了对本书的主审工作。

1979 年 8 月在大连为本书送审稿召开了审稿会议。参加会议的有：北京工业学院、华南工学院、清华大学、北京航空学院、西北电讯工程学院、西北工业大学、成都电讯工程学院、国防科学技术大学、华东工程学院、南京航空学院、上海科学技术大学、哈尔滨工业大学、大连工学院等院校的同志。与会同志对送审稿进行了认真的讨论，提出了不少宝贵意见，对本书的定稿工作起了很大作用。

根据大连审稿会议的修改意见，编者进行了修改，并再次请主审单位华南工学院徐秉铮、钟祝生二同志进行了复审。

对以上各单位和有关同志在本书完成过程中所给予的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平不高，编写时间仓促，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。编者希望在使用一段时间后再做较大的修改和补充。

编　者

1979 年 10 月

目　录

第一章　概率和随机变量

§1.1　概 率 简 述

我们可以把一切自然现象粗略地划分成确定的、可以预测的一类和随机的、不可预测的另一类。第一类现象是指，在相同条件下进行多次重复试验，必然产生同一结果，而且这个结果是可以预测的。例如在一个标准大气压下，把水加热到100℃，水就会沸腾。又如在没有外力作用下，作等速直线运动的物体将继续作等速直线运动等等。另一类现象叫作随机现象，是指在相同条件下进行多次重复试验，有各种可能的结果，但在试验前不能准确地预言它的结果。例如掷一硬币，可能出现正面，也可能出现反面，但在试验前不能预言究竟出现哪一面。又如，雷达测定目标的坐标时，由于各种干扰的影响，不可避免地会产生测量误差，而每次测量误差的大小，事先不能预言等等。

表面看来，随机现象似乎是没有规律的，其实它还是有规律性的，不过这种规律性体现在大量重复试验时的集体现象之中。人们发现在相同的条件下，对同一随机现象进行大量的重复试验，就会呈现出确定的规律性。例如，投掷一个硬币，当次数不多时，出现正面（或出现反面）的相对次数是紊乱无章的，显不出什么规律性，但随着投掷次数的增加，出现正面（或出现反面）的相对次数就开始呈现出一定的规律性——趋于某一稳定的值$\frac{1}{2}$，次数越多，规律性就越明显。由于这种规律性是与大量试验观测分不开的，因此称之为统计规律性。概率论就是研究随机现象的这种统计规律性的一门数学科学。

随机现象是普遍存在的。随着科学技术的迅速发展，到今天概率论已从最初用于研究赌博问题扩展到广泛的科学技术领域，并在电子学领域中得到了有效的应用。例如雷达接收到的有用信号总是伴随有各种途径混入的噪声，而噪声是随机的，只能用统计方法来描述它。因此，在雷达系统设计和分析估价系统性能等方面，概率论成为不可少的数学工具。在概率论中使用的一些基本定义简述如下。

随机事件　凡在一定的条件下，在试验结果中可能发生也可能不发生的事情，就叫作随机事件，或简称事件。例如：

（1）掷一个硬币出现正面；

（2）连掷三次硬币出现三次正面；

（3）射击一次打中了靶。

都是随机事件。对随机现象进行的这种试验，称为随机试验。

必然事件　凡在一定的条件下，在试验结果中一定会发生的事件，就叫做必然事件。例如，掷一次硬币出现正面或反面，就是必然事件。

不可能事件　在一定的条件下，在试验中不可能发生的事件，叫做不可能事件。例如，掷一次硬币，既不出现正面也不出现反面，就是不可能事件。

必然事件和不可能事件之间存在着紧密联系。事实上，如果在一定条件下，某个事情是必然事件，而在同一条件下，这个事情的反面就一定是不可能事件。

事件的完备群　如果试验的结果，必然要在某些事件中发生一件，我们就称这些事件构成了一个完备的事件群，或简称完备群。例如：

（1）掷一硬币，出现正面和出现反面；

（2）连掷两次硬币，至少有一次出现正面和一次正面也不出现；

（3）一次射击的中靶或不中靶。

不相容事件　如果在一次试验中，两个事件不能同时都发生，则把这两个事件叫做不相容（或互斥）事件。例如：

（1）掷一硬币，出现正面和出现反面；

（2）一次射击，中靶和不中靶。

等可能事件　如果一组事件，由于对称性条件，可以断定，其中任何一事件不会比另一事件在客观上发生的可能性更大些，我们把这种事件叫作等可能事件。例如：

（1）掷一硬币，出现正面和出现反面；

（2）从全付纸牌里，抽一张得方块、得红桃、得梅花、得黑桃。

基本事件　有些事件组中的事件，同时具备上面的三种性质（又是互斥、又是等可能、又组成一完备群），我们把构成这样事件组的事件，就叫做基本事件。例如：

（1）掷一硬币，出现正面和出现反面；

（2）掷一颗骰子出现1、2、3、4、5、6点。

1.1.1 概率的基本概念

尽管在单次试验中，我们不能准确地预言随机事件是否发生，但是当我们进行大量试验时，常常会发现各种事情发生的可能性的大小是不同的。为了在数量上比较各个事件发生的可能性的大小，我们用一个数字$P(A)$来标志事件A发生的可能性，称$P(A)$为事件A的概率。$P(A)$越大，表示事件A发生的可能性越大；$P(A)$越小，表示事件A发生的可能性越小。如果把必然事件U和不可能事件V作为两种极端情况，那么必然事件的概率$P(U)$应该最大，而不可能事件的概率$P(V)$应该最小。在给定了事件A后，应当怎样从数量上来规定$P(A)$的值呢？也就是说，怎样来定义概率$P(A)$呢？这里，我们介绍三种概率的定义：古典定义、几何定义和统计定义。

一、概率的古典定义

假定随机试验的所有可能结果的个数是有限的，并且各个试验结果出现的可能性相等，这类随机试验就归结为所谓古典概型。例如，掷一硬币，可能出现的结果只有两个：正面朝上或反面朝上。如果硬币的结构是均匀的，则出现上述两种结果的可能性相等。又如，测量物体的长度时，常常发生误差，如果仅限于考虑误差的正、负，则可能的误差只有两种：正误差或负误差，而且经验表明，正误差和负误差出现的可能性相等。以上两个例子都可归结为古典概型。

对于古典概型，概率的计算如下：若有n个互不相容的等可能的事件构成一完备群，设事件A由其中的k个（$k\leqslant n$）不同事件组成，则定义事件A发生的概率$P(A)$为

$$P(A)=\frac{k}{n} \tag{1.1.1}$$

我们还以掷一硬币为例，它由出现正面和出现反面两个互不相容同时又等可能的事件构成一完备群，因此它的基本事件数目是2，设事件A为出现正面的事件，则$k=1$，故

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

从式（1.1.1）概率的古典定义中可以看出，k总是在0和n之间，对于必然事件U，$k=n$，则$P(U)=1$；对于不可能事件V，$k=0$，故概率$P(V)=0$；对于一般的随机事件A，其概率$P(A)$为介于0和1之间的正数，满足下面不等式

$$0\leqslant P\leqslant 1$$

上述的概率定义，在概率论发展的初期是通用的，所以把它称为概率的古典定义。

二、概率的几何定义

概率的古典定义是建立在“基本事件的数目是有限值”这一基础上的。还在概率论刚开始发展的时候，人们就已经注意到这种定义是不够的。例如，向有界区域G内任意投一质点，这时随机“点”落在G中的每一点是一个基本事件，因此相当于有无限多个基本事件，此时可以应用概率的几何定义。概率的几何定义简述如下：

若向域G投一质点，设所投的“点”必落在G域中，而且落在G中的任何一点都是等可能的，若g是G的一部分（见图1.1），令“点”落入域g的事件为A，则事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{g}{G} \tag{1.1.2}$$

式中g、G分别为域g和G的测度。若G、g是空间域，测度是指它们的体积；若G、g是平面域，测度是指它们的面积；若G、g是直线上的区间，测度就是指它们的长度。例如（见图1.2），长为L的电话线AB，在某一点C处被切断，现在求点C与点A的距离不小于l的概率。

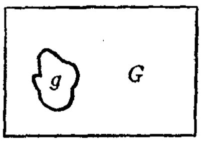

图1.1 概率的几何定义

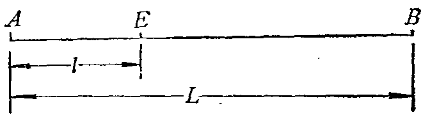

图1.2 电话线示意图

设点E离点A的距离为l，求点C与点A距离不小于l的概率，就相当于求点C落入EB间的概率。令点C落入EB间的事件为D，根据上述定义，D发生的概率$P(D)$应为

$$P(D)=\frac{EB}{AB}=\frac{L-l}{L}=1-\frac{l}{L}$$

上述两种定义都适用于随机试验具有等可能结果的情况，一般都把这种具有等可能结果的试验归结为古典概型。

三、概率的统计定义

概率的古典定义和几何定义都只适用于随机试验的一切结果，并都具有对称性（从而

具有等可能性)。当考虑到比较复杂的问题时，特别是自然科学和工程技术实际中的许多问题时，是不能或很难与上述“等可能结果”的试验模型联系起来的，因此其概率也就无法用式(1.1.1)或式(1.1.2)来计算。例如，射手打靶有命中10环、9环、……、1环、0环等11种可能结果，但我们不能认为各种结果的可能性是相等的。又如，在一分钟内，电话总机“接到1次呼唤”和“接到2次呼唤”的可能性也是不相等的等等。对于不能归结到等可能结果概型的事件，就要采取其它方式来定义概率，这就是概率的统计定义。它是建立在大量试验或统计的基础上的。

假定在同样条件下，大量地进行重复试验，来观察事件A发生或不发生。若在n次独立试验中事件A发生了m次，则比值

$$F_n(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1.3}$$

称为事件A在这n次试验中发生的频率。

当重复试验的次数不多时，事件的频率具有显著的随机性，一组试验和另一组试验的结果会不相同。例如，掷一硬币10次，有可能正面出现2次(正面出现的频率是0.2)；另掷10次，完全有可能出现8次正面(频率为0.8)。但当试验的次数增多后，事件发生的频率就逐渐减少了它的随机性而呈现出逐步稳定的趋势，且以微小的摆动接近于一个常量。例如，反复多次掷一硬币，出现正面的频率就非常接近于$\frac{1}{2}$。

我们容易想到，一般地说，若事件A发生的可能性越大，频率$F_n(A)$也越大；反之，如果$F_n(A)$越大，那么可以设想，A发生的可能性也就越大。因此频率和概率之间应当有紧密的联系。可以证明，在相当广泛的条件下，当试验次数n无限增加时，在一定的意义下，事件A发生的频率趋于A的概率。即

$$P(A)\approx\frac{m}{n} \qquad (n\to\infty) \tag{1.1.4}$$

上式称为概率的统计定义。要注意的是，在试验次数增大时，频率趋于概率的近似性质和“趋于极限”这个词的数学意义是有一定差别的。

在数学上，说变量x_n当n增大时趋于常数C，是指对于超过某一充分大的数的一切n值，其差$|x_n-C|$一定保持小于任意给定的ε。但在事件的频率和它的概率的关系上，则不能做出这种绝对性的结论。不能说当试验次数n无限增加时，事件的频率与概率之间绝不可能有显著的差异，而只能说这种差异出现的概率是非常小的，n越大，这个概率越小。为了叙述它，我们采用一个专用名词，叫做“依概率收敛”。

说随机变量X_n依概率收敛于C，就是说，不论多么小的ε，不等式$|X_n-C|<\varepsilon$的概率在n无限增大时趋于1。

用了这个名词，我们就说当试验次数增加时，事件的频率“依概率收敛”于它的概率。或者说，事件的频率从概率意义上说趋近于它的概率。

从上面的讨论中可以看到，无论对于可以或不可以归结为古典概型的事件，都可以用一个介乎0和1之间的数来做它的确定的概率。从这一意义来说，上述概率的三种定义是一致的。概率的古典定义与几何定义只能用于等可能结果的试验模型，而这种模型是建立在先验判断基础上的(当然这种先验判断的正确性，是可以由大量试验加以证明的)。在许多

实际问题中，当不能归结为等可能结果的试验模型时，便应用概率的统计定义，概率的统计定义必须在大量试验的基础上（当 n 充分大时），取频率作为概率值。

1.1.2 概率（论）的基本定理

上面我们已经熟悉了直接地确定事件概率的方法。在实际中，我们遇到的事件多是由基本事件组成的复杂事件（或称复合事件）。对于复杂事件，若用直接方法来确定它的概率，一般来说是比较困难的，这就需要采用间接方法，从已知一(基本)事件的概率来求另外(复杂)事件的概率。对于各种复杂事件，归根结底，我们总可以把它们归结为两种最基本的形式，这就是“事件的和”与“事件的积”。概率的加法定理和乘法定理就是用来运算这两种复杂事件与其分解事件之间的概率关系的。仅当事件可以归结为古典概型时，这两个定理才可以得到证明。下面，在建立这两个定理之前，我们先引入事件和与事件积的概念。

事件和　如果事件 C 是由事件 A 出现或事件 B 出现，或二者同时出现所组成，则称事件 C 是事件 A、B 之“和”。换句话说，事件 A 与事件 B 之和（事件 C）是由 A 与 B 中至少出现其中之一所组成的事件。记为 $C=A+B$。例如：两次射击靶子组成的试验，若事件 A 代表第一次射击而击中目标，B 代表第二次射击而击中目标，那么，事件 $C=A+B$ 表示击中目标的事件（不管是第一次击中、第二次击中，还是两次同时击中目标）。

事件积　如果事件 C 是由事件 A 与事件 B 同时出现所组成，则称事件 C 是事件 A、B 之积，记为 $C=A\cdot B$。

再如在上述两次射击靶子的试验中，仍令 A 代表第一次射击而击中目标，B 代表第二次射击而击中目标，则 $C=A\cdot B$ 表示两次射击都击中目标。

下面，我们来介绍概率的基本定理。

一、概率的加法定理

两个互不相容事件 A 与 B 之和的概率等于这些事件的概率之和。记为

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.1.5}$$

证明　设试验的可能结果为 n 个基本事件，组成事件 A 的为 m 个基本事件，组成事件 B 的为 k 个基本事件，因为我们已限定 A、B 是互不相容的事件，则组成事件 $(A+B)$ 的基本事件应是 $m+k$ 个，所以

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$$

我们可以把加法定理推广到任意数目的互不相容的事件上去，得到

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.1.6a}$$

其中 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是 n 个两两互不相容的事件。式（1.1.6a）还可简写成下列形式

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.1.6b}$$

下面举例说明加法定理的应用。

〔**例 1**〕　设某射手在一次射击中命中 10 环、9 环、8 环的概率依次为 0.25、0.22、0.16，问在一次射击中命中 8 环以上的概率为多少？

令 A_1、A_2、A_3 分别表示命中 10 环、9 环、8 环的事件，那么，命中 8 环以上的事件

A应为命中10环、9环、8环三事件之和，即$A=A_1+A_2+A_3$，又因A_1、A_2、A_3为互不相容事件，因此可以应用加法定理，得到

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=0.25+0.22+0.16\\&=0.63\end{aligned}$$

推论1 如果事件A_1，A_2，A_3，…，A_n构成互不相容的事件的完备群，则其概率之和等于1，即

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1 \tag{1.1.7}$$

因为事件A_1，A_2，A_3，…，A_n构成完备群，所以在试验结果中至少出现其中之一的事件是必然事件。于是

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1$$

应用加法定理便很容易证明推论1。

逆事件 若两个不相容事件构成完备群，则称这两个事件为对立事件。在一对对立事件中，如果其中之一记为A，则另一事件称为A的逆事件，记为$\overline{A}$（读作非A）。例如：掷一硬币出现正面与出现反面；一次观察中，雷达发现目标与未发现目标……，都是对立事件。

推论2 对立事件之和的概率等于1，即

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1 \tag{1.1.8}$$

这一推论是推论1的特殊情形，它在概率论的实际应用中占有重要地位。在实践中常常出现这样的情况，计算事件$\overline{A}$的概率要比计算事件A的概率容易得多，这时，可以先求出$P(\overline{A})$，然后利用式（1.1.8）求出$P(A)$。

〔**例2**〕 一个圆形靶，由三个环状区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ所组成（见图1.3），在一次射击中命中Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ区的概率依次为0.15、0.23、0.17，试求没有命中的概率。

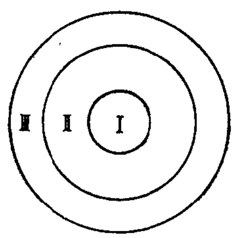

图1.3 圆形靶

解 令没有命中的事件为A，则命中的事件为$\overline{A}$，由此可得

$$\overline{A}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$$

其中$\overline{A}_1$、$\overline{A}_2$、$\overline{A}_3$各表示命中Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ环区的事件，故

$$\begin{aligned}P(\overline{A})&=P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_3)\\&=0.15+0.23+0.17=0.55\end{aligned}$$

由此得出

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.45$$

上述加法定理式（1.1.5）只对不相容事件才能成立，对于两个相容事件A和B，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B) \tag{1.1.9}$$

二、概率的乘法定理

在讲述概率的乘法定理之前，先要引入两个重要概念，即独立事件和相关事件的概念。

独立事件　如果事件A的概率与事件B的发生与否无关，我们称事件A对事件B独立。例如掷两个硬币的试验，研究事件：

A——第一个硬币出现正面；

B——第二个硬币出现正面。

在这种情况下，事件A的概率与事件B是否发生无关，所以事件A对事件B独立。

相关事件　如果事件A的概率将随事件B的发生与否而改变，我们称事件A与事件B相关。

例如在罐里有两个白球和一个黑球，两人各从罐中取一个球，研究事件：

A——第一个人取出白球；

B——第二个人取出白球。

如果没有事件B，则事件A的概率为 2/3，如果事件B已经（先）发生，那么事件A的概率就不再是 2/3，因此，事件A和事件B相关。

下面我们来讨论乘法定理：

概率的乘法定理是：两个事件的乘积的概率等于其中一个事件的概率乘上另一事件在第一事件发生的条件下的条件概率。即

$$P(A\cdot B)=P(A)P(B/A) \tag{1.1.10 a}$$

其中$P(B/A)$表示在事件A发生的条件下，事件B发生的概率，把它称为条件概率。

现在我们就图 1.4 来证明乘法定理。设试验的可能结果为n个基本事件，我们直观上用n个点来表示，组成事件A的为m个基本事件，组成事件B的为k个基本事件，因为我们并未限定事件A和事件B是不相容的，因此，一般存在着既组成A也组成B的基本事件，设共有l个，这时，有

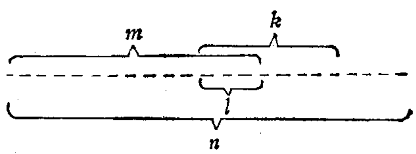

图1.4　对乘法定理的证明

$$P(A\cdot B)=\frac{l}{n},\quad P(A)=\frac{m}{n}$$

而
$$P(B/A)=\frac{l}{m}$$

故有
$$P(A\cdot B)=\frac{l}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)\cdot P(B/A)$$

显然，应用同样方法，我们还可以把乘法定理写成下列形式

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{1.1.10 b}$$

当事件A出现的概率与事件B是否发生无关时，即A对于B独立时，条件概率等于无条件概率。即

$$P(A/B)=P(A) \tag{1.1.11}$$

推论 1　如果事件A对于事件B独立，则B也对于A独立。

证明　假设$P(A)\neq 0$，因A对于B独立，所以有

$$P(A)=P(A/B)$$

将上式代入式（1.1.10 b），得

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A)$$

应用式（1.1.10），就可以得出

$$P(B/A)=P(B)$$

从推论可知，事件的独立性或相关性是互相依存的，因此我们可以给出关于独立事件的下列新定义：

如果两个事件中的一个的发生与否并不改变另一个事件发生的概率，则这两个事件是互相独立的。

推论 2 两个独立事件乘积的概率等于这两个事件概率的乘积。即

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (\text{当}A\text{、}B\text{互相独立时})$$

上式可从独立事件的定义直接推出。

概率的乘法定理可以推广到事件为任意多个的情况。在一般情况下，它可表示为

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.1.12}$$

在独立事件的情形下，定理变成下列形式

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{1.1.13}$$

这里应当注意独立性的条件。若 n 个事件称为互相独立的，则要求其中的任一事件对其余事件中任意个事件的乘积相互独立。

下面举例说明乘法定理的应用。

〔**例 1**〕 两个射手彼此独立地射击同一目标，第一人射中的概率是$P(A)=0.9$，第二人射中的概率是$P(B)=0.8$，试求射中目标的概率。

令C表示射中目标的事件，由于A、B是相容事件，故

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

又因为A、B是互相独立的，故有

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0.9\times0.8=0.72$$

因此 $$P(C)=0.9+0.8-0.72=0.98$$

〔**例 2**〕 设有 10 只晶体管，其中有 3 只是次品，试求连续取 2 只都是次品的概率。

令 A_1——第一次取的晶体管是次品；

A_2——第二次取的晶体管是次品；

A——连续两次取的晶体管都是次品。

根据乘法定理 $$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=0.07$$

在实际问题中，单独应用概率的加法定理或乘法定理的情况很少，通常要同时应用这两个定理。

例如对同一目标进行三次射击，第一、二、三次射击的命中率分别为0.4、0.5、0.7。求在三次射击中恰有一次击中的概率。

令 A——恰有一次击中目标；

A_1——第一次击中目标；

A_2——第二次击中目标；

A_3——第三次击中目标。

A可以以几种方式发生：可能是第一次击中，而第二、第三次落空；第二次击中，而第一、第三次落空；或者第一、第二次落空，而第三次击中目标。因而

$$A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

应用概率的加法和乘法定理，并运用互逆事件的特性，求得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\&=0.36\end{aligned}$$

三、全概率公式

如果某个事件可能在多种情况下发生，而且它在各种情况下发生的可能性大小也都知道，试问该事件发生的“总的可能性”或“全部可能性”是多大？这种问题是常见的。例如针对敌人某种雷达，我们准备了三种干扰措施，若根据以往的作战经验和掌握的情报，可以估计出每种干扰措施的效果（即成功的概率），那么我们就想知道，在一次战役中动用了三种干扰措施的总效果（总的成功概率）是多少。把概率的加法定理和乘法定理结合起来而得到的全概率公式，就可以用来解决这类问题。

设事件A能与事件B_1，B_2，…，B_n中的一个同时发生，而事件B_i($i=1,2,\cdots,n$)组成完全不相容的完备群，也就是说，A能而且仅能与B_1，B_2，…，B_n中的一个同时发生，现在来确定A的概率。

因为B_1，B_2，…，B_n是互不相容的，故AB_1，AB_2，…，AB_n也是互不相容的，事件A就是AB_1，AB_2，…，AB_n之和，应用加法定理，可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i) \tag{1.1.14}$$

又根据乘法定理，有

$$P(AB_i)=P(A)P(B_i/A)=P(B_i)P(A/B_i)$$

将上式代入式(1.1.14)，可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i) \tag{1.1.15}$$

上式称为全概率公式。在已知各事件B_i的概率$P(B_i)$和在B_i发生的条件下事件A发生的条件概率$P(A/B_i)$时，就可以应用全概率公式(1.1.15)来求得事件A的全概率$P(A)$。下面举例说明全概率公式的应用。

例如对飞机进行三次独立的射击，第一次射击的命中率是0.4，第二次是0.5，第三次是0.7。飞机中一弹而坠落的概率为0.2，中二弹而坠落的概率是0.6，若中三弹，则必然被击落。求射击三弹而击落飞机的概率。

令事件 B_1——一弹击中飞机；

B_2——二弹击中飞机；

B_3——三弹击中飞机；

A——飞机被击落。

显然，B_1，B_2，B_3为互不相容事件，应用加法定理和乘法定理，可以求得$P(B_1)$，$P(B_2)$，

$P(B_3)$为

$$P(B_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$
$$P(B_2)=0.6\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.3=0.41$$
$$P(B_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

根据题意，有

$$P(A/B_1)=0.2$$
$$P(A/B_2)=0.6$$
$$P(A/B_3)=1.0$$

应用全概率公式，可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A/B_i)=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1.0=0.458$$

四、贝叶斯（Bayes）公式

有了全概率公式，我们可以推导出概率论中另一个重要公式，即贝叶斯公式。我们提出这样一个问题：在全概率公式的命题中，若事件A已经发生，求B_i的概率，即求$P(B_1/A)$，$P(B_2/A),\cdots,P(B_n/A)$ 的大小。

根据乘法定理，有

$$P(AB_i)=P(A)P(B_i/A)=P(B_i)P(A/B_i)$$

即

$$P(A)P(B_i/A)=P(B_i)P(A/B_i)$$

以全概率公式代入$P(A)$，就可以得到

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)} \tag{1.1.16}$$

这就是贝叶斯公式。贝叶斯公式可以用来解决这样一种类型的问题：设事件A可以在不同条件$B_1,B_2,\cdots,B_n$下实现，按某些理由可以知道$P(B_i)$，也知道B_i发生条件下的$P(A/B_i)$。当一次试验中，观察到A已经发生，要求计算与A的发生相联系的某一假设事件B_i的概率，即$P(B_i/A)$。例如，在雷达信号检测问题中，我们常常给出两种假设情况："有信号"和"无信号"两种情况。然后根据试验结果（接收机的输出），计算该两种假设成立的概率，并按照某种标准作出有无信号的判断。这里，就要求根据试验观察到的结果，利用贝叶斯公式计算出有信号和无信号的条件概率。

通常我们又把在观察以前计算的概率$P(B_i)$称为先验概率，把已观察到A的出现后，按贝叶斯公式计算得到的条件概率$P(B_i/A)$称为后验概率。

最后，再一次指出全概率公式和贝叶斯公式恰好用于解决两类相反的问题：前者用于在许多情况（B_i）下都可能发生某事件A，求发生该事件的全概率；后者则用于在事件A已经发生的情况下，去求产生事件A的各种原因的条件概率。

例如在前面一个例中，若已知连击三弹后飞机坠落，求飞机中二弹的概率。

这个问题就是在事件A（飞机被击落）已经发生的情况下，求事件B_2（飞机中二弹）

的条件概率。应用贝叶斯公式，有

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{0.41\times0.6}{0.458}=0.537$$

§1.2 随机变量及其概率分布

1.2.1 随机变量的概念

从前面一节的讨论中我们知道，一次随机试验有许多种可能的结果。例如，掷一硬币，可能出现正面或出现反面；雷达探测目标（就发现目标与否而言），可能发现目标也可能未发现目标；掷一骰子，可能出现1、2、3、4、5、6点；对靶射击，可能命中0、1、2、…、10环等等。我们可以看到，许多随机试验的各种结果都直接和某一数值相联系，例如，掷一颗骰子可能出现的六种结果就直接与数值1、2、3、4、5、6相对应；对靶射击可能出现的11种结果与数值0、1、2、…、10直接对应。但是，另外一些试验，其可能的各种结果和数值之间并没有直接联系，例如，硬币出现正面或反面；雷达发现目标或未发现目标等等。对于这样一类随机试验，我们则可规定一些数值，来表示它的各个可能结果。比如，掷一硬币，我们规定用1表示出现正面，0表示出现反面；在雷达发现目标与否的问题中，规定用1表示有信号，0表示没有信号。这样做以后，我们就可以用一变量X来定量的表示随机试验的结果，而随机试验的各个可能结果，则通过X所可能取的数值来定量的表示出来，这个变量就称之为随机变量。显然，随机变量可能值的范围是由它所对应的那个随机试验来决定的，而且在试验之前就是已知的。但是在试验之前，我们无法准确地预言随机变量将取什么值，而只能知道它将以怎样的概率分别取这些值。而且，对应一次试验结果，随机变量取唯一的确定值。于是，我们对随机变量作如下的定义：

设一变量X，它能随机地取种种数值（但不能准确预言它取什么值），而对应每一数值或某一范围内的值，有相应的概率，则称X为随机变量。

随机变量所可能取的一切数值组成的集合叫作该随机变量的可能值的集合，这个集合中的数称作随机变量的可能值。本书采用大写字母X，Y，…表示随机变量，用相应的小写字母x，y，…表示随机变量的可能值。例如用X表示射靶一次的命中环数，X的可能值则是：$x_0=0$，$x_1=1$，$x_2=2$，…，$x_{10}=10$。

我们知道，随机事件是随机试验的某些（或某个）结果，而随机试验的每一种可能结果都对应于随机变量的一个可能值。于是，随机事件就可以通过随机变量的关系式表示出来。这样，我们就可以把对随机现象的研究从定性的描述发展为用数学方法来进行定量处理。我们下面还以对靶射击为例，来说明这一点。考虑一个随机变量X，用X表示射靶一次的结果（命中环数），X有11个可能值：0、1、2、…、10。于是，X的各种关系式就代表了不同的随机事件。如$X=0$代表脱靶事件；$X=7$代表命中7环的事件；$0\leqslant X<5$代表命中不多于4环的事件等等。

随机变量的概念是概率论中最重要的一个基本概念。下面我们研究的对象主要集中在随机变量及其分布上。

随机变量又可以分为离散型和连续型两类。离散型随机变量的可能值是离散的，即可

以用自然数预先排列出来。上述几个例中的随机变量都是离散型随机变量。连续型随机变量的可能值则是连续地充满整个区间（有限或无限区间）。例如，接收机噪声的瞬时振幅和许多测量误差都是连续型随机变量。

1.2.2 离散型随机变量的分布列

为了研究随机变量的统计规律性，我们不仅需要知道随机变量的一切可能值，而且还必须知道各个可能值所对应的概率是多少。在此基础上，就可以建立起随机变量的各可能值与其相应概率之间的各种不同形式的对应关系。我们把所有这些（不同形式的）对应关系都统称为随机变量的分布律。从概率的观点看，给定了随机变量的分布律，随机变量就被完全描述出来了。

若离散型随机变量X的所有可能值为x_i（$i=1, 2, \cdots, n$），而X取各x_i所相应的概率为P_i（$i=1, 2, \cdots, n$），即$P(X=x_i)=P_i$。则随机变量各可能值与其相应的概率可以用下列表格来表示

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P_i	P_1	P_2	$\cdots$	P_n

我们把这样的表格叫作随机变量的分布列。由于$x_1, x_2, \cdots, x_n$构成完备群，因此有

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{1.2.1}$$

上式说明，随机变量所有可能值的概率之和等于1。这些概率以某种方式分布在不同的数值上。

分布列是分布律的一种形式，为了更直观，分布列也可以用图形表示出来，如图1.5所示。图中把随机变量的各可能值作为横坐标，把各可能值所对应的概率作为纵坐标。

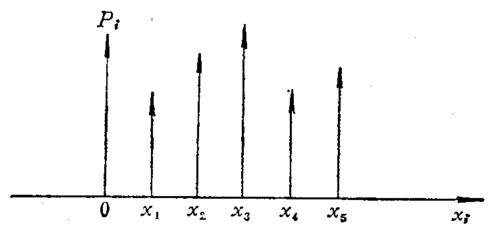

图1.5 分布列

1.2.3 概率分布函数

上面我们引出了分布列，但用分布列来描述随机变量的统计特性是不能普遍采用的，只有离散型随机变量才有分布列，对于连续型随机变量，分布列失去了意义。这是因为连续随机变量有无限的可能值，而且这些值连续地占据着整个区间。就是说连续随机变量的可能值是不可数的，以外，以后还将看到，连续随机变量取个别值的概率为0。

现在，我们不用随机变量$X=x$的概率，而用事件$X<x$的概率$P(X<x)$（其中x为变量）来建立随机变量的分布律。显然，$P(X<x)$依赖于x，是x的一个函数，记为$\mathscr{F}(x)$，即

$$\mathscr{F}(x)=P(X<x) \tag{1.2.2}$$

我们把$\mathscr{F}(x)$称为随机变量X的概率分布函数，简称分布函数，也称为分布的积累