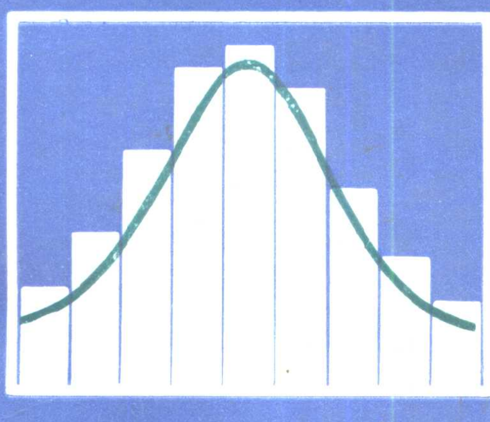
全国高等师范专科学校教材

# 概率论与数理统计

李文琦　主编



北京师范大学出版社

## 内 容 简 介

本书是根据教学大纲要求，为二年制师范专科学校编写的教材. 本书以数学分析，高等代数和解析几何为准备知识.

概率论部分以大数定律和中心极限定理为主题，统计部分以参数估计和假设检验为主题. 全书共八章，即(一)概率论的基本概念，(二)随机变量及其概率分布，(三)二项分布、布阿松分布及正态分布，(四)随机向量及其分布，(五)数理统计中常用的几个分布，(六)数理统计的基本概念，(七)统计推断，(八)应用简介.

书中每章末有一定数量的习题，书末有习题解答与提示.

最后有一附录介绍柯氏公理系统.

全国高等师范专科学校教材

**概率论与数理统计**

主编 李文翰

编著 王玉怀 林云琛 刘景泰

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：9 字数：219 千

1989 年 5 月第 1 版 1990 年 3 月第 2 次印刷

印数：2 001—7 000

ISBN 7-303-00529-3/O·100

定价：2.10 元

# 前　言

本书是应国家教委师专教材编写出版规划会议之邀，为二年制师范专科学校编写的概率与数理统计教材.

本书的前七章以李文琦教授1974年在河北大学编写的概率论与数理统计讲义为蓝本，由石家庄师专王玉怀副教授负责修订前四章，由包头师专林云琛副教授负责修订后三章，最后考虑到教大学纲的要求，由天津纺织工学院刘景泰副教授负责编写了第八章.

全书完稿后，由李文琦教授通读一遍，以求风格上的统一. 此外李文琦教授负责编选了第一章至第七章的习题及解答，并写一附录介绍概率论的公理系统.

由于二年制师专概率与数理统计只能在第四学期讲授，故本书的准备知识仅限于数学分析，高等代数和解析几何.

本书概率论部分以大数定律和中心极限定理为主题，统计部分以参数估计和假设检验为主题，但仅限于最基本的内容，超出大纲范围的带星号的章节可以不讲.

在编写过程中，我们参考了国内外同行专家的许多著作，特别是 H. Cramér 的著作，在此谨向他们致以衷心的谢意.

在编写过程中，我们得到了北京师范大学出版社的鼓励和支持，在此特向北师大出版社的同志们，特别是王文涌、林水平、李春梅等校友表示我们最深切的感激之情.

限于我们的水平，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编者　　1988 年7月

# 目　　录

# 第一章　概率论的基本概念

## §1.1　决定性现象与随机现象

概率论是研究随机现象的规律性的科学.

什么是随机现象呢? 随机现象有没有规律性呢? 宇宙间的现象，大体可分为两种. 一种是**决定性现象**或**必然现象**; 一种是**随机现象**或**偶然现象**. 决定性的现象是非常多的,例如"水加热到100℃化为蒸汽","秋去冬来","在北方，到了冬天就要下雪". 这些现象的特点是在一定条件下,它必然发生.

现在再来看偶然现象:"秋去冬来",这是必然的."到了冬天就要下雪"也是必然的. 但"12月2号天津市下雪"这件事可能发生也可能不发生. "天津市年降雪量大于200公分"这件事可能发生也可能不发生.这些现象的特点是在一定条件下,它可能发生也可能不发生.

决定性现象和随机现象都不是绝对的. 例如在射击时，我们利用力学知识可以列出弹道的方程,从而求得炮弹的理论弹道,这个弹道原则上可以由射击的初始条件（如炮弹的初速度，发射角等)完全确定出来,它近似地反映了现象间的本质联系. 从理论上来说,如果在绝对不变的初始条件下重复射击,结果应该得到完全相同的弹道曲线. 但是这个试验只有在自然过程以纯粹形态进行的条件下，也就是在没有偶然性干扰的情况下才有可能. 事实上要保持一组绝对不变的初始条件是不可能的，因为同一性中包含着差异性,必然性中包含着偶然性. 所以在大量重复射击时,实际上得到的不是一条理论弹道而是一束弹道，每次射击的弹道不可

避免地和理论弹道有所偏差，这就说明“在必然性中包含着偶然性”．另一方面，虽然每次射击的弹道跟理论弹道有所偏差，但它们都围绕着理论弹道而波动，这些波动是由大量的我们无法预先确定的因素引起的，这就说明“在偶然性中包含着必然性”．

恩格斯在《自然辩证法》一书中曾经指出：偶然的东西是必然的而必然的东西是偶然的．他在《费尔巴哈与德国古典哲学的终结》一书中又说：“凡断定为必然的东西，都是由一些纯粹偶然性构成的，而凡被认为是偶然的东西，则是一种有必然性隐藏在里面的形式”．

## §1.2 随机试验、事件、统计正则性

在科学实践活动中，我们常常碰到这样一种情况，某种试验或观测可以在一定条件下重复进行多次，由于偶然性或随机因素的影响，试验的结果不能预料．例如 $a$)§1.1中所指出的弹道问题，每一次试验得到一条弹道，彼此都不相同，从而炮弹命中点，每一次也都不同．$b$)观测天津市八月份的降雨量，它是每年都不完全相同的．$c$)从某一机器所生产的零件中任取一件，它可能是合格品，也可能品．$d$）观察婴儿的诞生，他可能是男孩也可能是女孩．$e$)在玻璃板上旋转一枚硬币，它可能出现正面也可能出现反面．$f$)在电话是次机旁收听电话，在十分钟时间内可能收到 0，1，2，…次呼唤．这些都是随机试验，随机试验的结果叫做**基本事件**．

在例 $a$)中基本事件是：弹道为某一条空间曲线；

在例 $b$)中基本事件是：降雨量等于某一常数；

在例 $c$)中基本事件是：产品为合格品或次品；

在例 $d$)中基本事件是：婴儿是男孩或女孩；

在例 $e$)中基本事件是：硬币出现正面或反面；

在例 $f$)中基本事件是：[呼唤次数$=\nu$]，$\nu=0,1,2,\cdots$.

除去基本事件之外，还有一些事件是由基本事件复合而成的，例如在 f)中，“收到的呼唤次数不大于5” 这一事件相当于“收到的呼唤次数＝0” 或“收到的呼唤次数＝1”，…，或“收到的呼唤次数＝5”，这六个基本事件至少发生一个.

现在考虑一个特定的随机试验 $E$. 例如观察在十分钟内某一电话交换台收到的呼唤次数，和一个与此试验有关的一个事件 $A$，例如“在十分钟内收到的呼唤次数≤5”，在每次试验中事件 $A$ 可能发生也可能不发生.

我们重复地把试验 $E$ 进行 $n$ 次，并尽可能地保持试验条件不变. 设 $f$ 是在 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的次数，则在另外的 $n-f$ 次试验中 $A$ 不曾发生. 我们把 $f$ 称为事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生的**绝对频率**或简称**频率**. 而把 $f/n$ 称为事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生的**相对频率**或**频率比**.

如果我们重复地把同一试验 $E$ 做几个系列，在 $n_1$ 次试验中事件 $A$ 发生 $f_1$ 次，在另外 $n_2$ 次试验中事件 $A$ 发生 $f_2$ 次，…，于是我们得到几个相对频率 $f_1/n_1$，$f_2/n_2$，$\cdots$，在许多重要情形下，可以发现，只要 $n_1$，$n_2$，$\cdots$ 足够大，$f_1/n_1$，$f_2/n_2$，$\cdots$ 彼此相差不大，这种现象我们称之为频率比的**稳定性**.

这种频率比的稳定性也可以从一个系列的试验中，$\frac{f}{n}$ 随着 $n$ 变化的图解中看出来，图 1.1 展示了在掷硬币这种随机试验中，正面(即有国徽的一面)出现的频率 $\frac{f}{n}$，随着 $n$ 而波动的状况，其中 $\frac{f}{n}$ 当 $n$ 足够大时围绕着 $\frac{1}{2}$ 这个数而波动（为了不致于把图画得太大，横坐标按对数尺度）.

如果对于某一随机试验 $E$，与它有关的各种事件 $A$ 都呈现出频率比的稳定性，我们就称试验 $E$ 表现了**统计的正则性**，这种统计

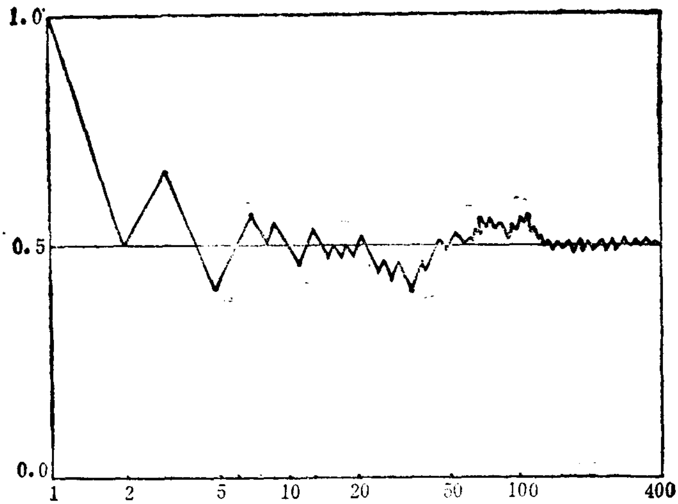



图 1.1　掷硬币试验中，正面出现的相对频率 $\frac{f}{n}$ 围绕 0.5 而波动

正则性就是我们在 § 1.1 所说的随机现象的规律性。概率论就是研究大量随机试验时，统计正则性的数学理论。

## § 1.3　相对频率与概率

象在前节那样，我们重复地把试验 $E$ 进行 $n$ 次，并用 $f/n$ 表示事件 $A$ 发生的相对频率，若试验 $E$ 呈现出统计正则性，则当 $n$ 很大时，$f/n$ 将彼此相差不大，因此，我们认为存在一个实数 $P$，它可以看作是频率 $f/n$ 的理想化，一切 $f/n$ 都围绕着 $P$ 而波动。这个数 $P$ 我们就称为在随机试验 $E$ 之下，事件 $A$ 发生的**概率**，记作

$$P = P(A, E).$$

如果 $E$ 已经明确了，我们就简单地写

$$P = P(A).$$

例如，在掷硬币试验中我们可以说，正面出现的概率为 $\frac{1}{2}$。

## §1.4 概率的一些简单性质

在前节我们已定义了与某一随机试验有关的事件发生的概率，现在我们研究概率的一些最重要的性质。在研究这些性质时，我们不要忘记概率是相对频率的理想化这一基本观点。

考虑随机试验 $E$，并假定它是固定不变的。设 $f$ 是事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生的绝对频率，显然我们永远有 $0 \leqslant f \leqslant n$，从而

$$0 \leqslant f/n \leqslant 1.$$

但对于足够大的 $n$，频率比 $f/n$ 将是事件 $A$ 发生的概率 $P(A)$ 的近似值，于是，很自然地，我们应当要求 $P(A)$ 满足同一不等式，即

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

故任何事件发生的概率都介于 0 与 1 之间，包括 0 和 1 在内。

特别若 $A$ 表示必然事件，即在每一次试验中事件 $A$ 都发生，则我们常有 $f = n$，从而 $f/n = 1$。于是我们应当要求 $P(A) = 1$，故必然事件发生的概率等于 1。必然事件常记作 $\Omega$。

反之，若 $A$ 表示不可能事件，即在每一次试验中事件 $A$ 都不发生，则 $f = \frac{f}{n} = 0$，从而我们应当要求 $P(A) = 0$，即不可能事件发生的概率等于 0。不可能事件常记作 $\varnothing$。

例如，在掷硬币时，事件“不出现正面就出现反面”是必然事件，“既不出现正面又不出现反面”是不可能事件。

但应当指出，我们一般不能说零概率事件是不可能事件，也不能说概率为 1 的事件是必然事件，若 $P(A) = 0$，我们只能说当 $n$ 很大时频率比 $f/n$ 围绕着 0 波动，这样的事件发生的可能性很小，

可称为非常事件。

## §1.5 加法法则

设$A$与$B$是与随机试验$E$有关的两个事件，在每次试验中它们可能发生也可能不发生，我们定义事件$A$与$B$之和与积如下：

$A+B$发生$\Longleftrightarrow A$或$B$至少有一个发生；

$AB$发生$\Longleftrightarrow A$与$B$同时发生。

关于$n$个事件的和与积有类似的定义。

现在我们进行$n$次试验，用$f_A, f_B, f_{A+B}$和$f_{AB}$分别表示事件$A, B, A+B$和$AB$发生的次数，则有下述关系式

$$f_{A+B}=f_A+f_B-f_{AB},$$

用$n$除此恒等式得到

$$\frac{f_{A+B}}{n}=\frac{f_A}{n}+\frac{f_B}{n}-\frac{f_{AB}}{n}.$$

由于概率是频率比的理想化，我们有下述概率论的**加法法则**.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.5.1}$$

**注：** 甲、乙两人同时向一个目标射击$n$次，用$A$表示甲击中目标，用$B$表示乙击中目标，易知甲或乙击中的次数$f_{A+B}=$甲击中的次数$f_A+$乙击中的次数$f_B-$甲与乙同时击中的次数$f_{AB}$.

加法法则容易推广到多于两个事件的情形，如果在(1.5.1)中我们用$B+C$代$B$不难得到公式

$$\begin{aligned}P(A+B+C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(AC)-P(BC)+P(ABC),\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

其中$A+B+C$表示$A, B$和$C$至少发生一个这一事件，而$ABC$表示$A, B$和$C$三者同时发生这一事件.

用归纳法可证

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1.5.3}$$

$$+P(A_m)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-\cdots$$
$$-P(A_{m-1}A_m)+P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+\cdots$$
$$+P(A_{m-2}A_{m-1}A_m)-\cdots+(-1)^{m-1}P(A_1A_2\cdots A_m).$$

事件 $A$ 与 $B$ 叫做**互不相容**的或**互斥的**，如果它们永远不能同时发生，这时，$AB$ 是一不可能事件，从而 $P(AB)=0$，在这种情(1.5.1)取下述简化形式：

(1.5.1 *a*) $$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

用 $\bar{A}$ 表示 $A$ 的对立事件，即 $\bar{A}$ 发生当且仅当 $A$ 不发生，则 $A$ 与 $\bar{A}$ 互不相容，同时 $A+\bar{A}$ 是必然事件，于是 (1.5.1 *a*)给出

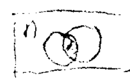
(1.5.4) $$P(A)+P(\bar{A})=1,$$

即任何事件发生的概率与其对立事件发生的概率之和等于1，于是为了计算 $A$ 发生的概率，我们可以先计算 $\bar{A}$ 发生的概率。

若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两不相容的事件，则(1.5.3)化为

(1.5.3 *a*) $$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m).$$

## §1.6 三个基本命题



在前两节，我们借助于频率比的性质导出了对应的概率性质，但这些性质并不是独立的。事实上，所有这些性质都可以从下述三个基本性质推导出来。

I. 任何事件 $A$ 发生的概率 $P(A)\geqslant 0$；

II. 必然事件发生的概率 $P(\Omega)=1$；

III. 若事件 $A$ 和 $B$ 互不相容，则
$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

如果把这三个命题视为已知，则由纯粹的逻辑推理可推出前两节所给出的一切性质，我们从前两节取两个性质作例子。

首先注意，基本命题 I 仅仅断言任何概率 $P(A)\geqslant 0$，而在

§ 1.4 我们给出更限制的不等式 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. 现在从基本命题 I—III 来推导这个不等式. 事实上,因为 $A$ 和 $\bar{A}$ 互不相容,而 $A+\bar{A}$ 是必然事件,由 II 和 III 可得

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=P(\Omega)=1,$$

又由 I, $P(\bar{A}) \geqslant 0$, 从而 $P(A) \leqslant 1$.

作为第二个例子我们从 I—III 来推导加法法则 (1.5.1), 设 $A$ 和 $B$ 是任意两个事件, 则事件 $A$ 和 $\bar{A}B$ 互不相容, 同时我们有 $A+B=A+\bar{A}B$, 由 III 我们有

$$P(A+B)=P(A+\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A}B),$$

此外,容易看出,事件 $AB$ 和 $\bar{A}B$ 是互不相容的,并且 $B=AB+\bar{A}B$,从而

$$P(B)=P(AB+\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B),$$

相减得(1.5.1).

这三个基本命题是概率论的公理系统的出发点. 关于概率论的公理系统可参看本书的附录.

## § 1.7 古 典 概 型

上面给出的定义有人称为概率的统计定义,但在 17 世纪概率论刚刚产生之时,首先出现的是概率的古典定义.

**例 1** 给了 0, 1, 2,…, 9 十个数字, 每个数字做一卡片, 任抽一张得到三的倍数的概率是多少?

从前的人这样想这个问题,抽一张卡片,共有十种抽法, 这十种抽法是等可能的. 抽到三的倍数有四种抽法,即 0, 3, 6, 9. 故抽到三的倍数的概率为 $\frac{4}{10}$.

一般地如果与某随机试验有关的基本事件共有 $c$ 个: $E_1$, $E_2, \cdots, E_c$,这 $c$ 个事件互不相容,并且是等可能的,即其中任何一

个事件发生的可能性都不比别的事件发生的可能性大些．如果某一事件 $A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_a}$，即 $A$ 相当于 $a$ 个基本事件之和．则：

$$P(A) = \frac{a}{c}.$$

这就是**概率的古典定义．**

现在我们证明，古典定义也可由基本命题 I—III 导出．事实上，$E_1 + E_2 + \cdots + E_c = \Omega$，从而由 III 和 II 得：

$$\begin{aligned} P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_c) &= P(E_1 + \cdots + E_c) \\ &= P(\Omega) = 1, \end{aligned}$$

故 $P(E_i) = \dfrac{1}{c}$，$i = 1, 2, \cdots, c$，若某一事件 $A$ 相当于 $a$ 个基本事件 $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_a}$ 之和，则：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_a}) \\ &= P(E_{i_1}) + P(E_{i_2}) + \cdots + P(E_{i_a}) = \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

经验表明，在古典概型之下，事件 $A$ 发生的相对频率，当 $n$ 很大时确实围绕着 $\dfrac{a}{c}$ 波动，故概率的古典定义与统计定义没有矛盾，作为说明我们再举一个例子：

**例 2** 有两付纸牌，各有 52 张，从每一付中任取一张，求至少有一张是红桃 $A$ 的概率．

**解：** 令 $B$ 表示从第一付纸牌中抽一张得到红桃 $A$，令 $C$ 表示从第二付纸牌中抽一张得到红桃 $A$，则

$$P(B) = \frac{1}{52}, \quad P(C) = \frac{1}{52}, \quad P(BC) = \frac{1}{52^2},$$

故所求的概率为

$$P(B + C) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} - \frac{1}{52^2} = \frac{103}{2704}.$$

**注：** $B$、$C$ 同时发生的概率 $P(BC)=\frac{1}{52^2}$ 的理由如下：从第一付纸牌取一张，从第二付纸牌取一张，共 $52\times52$ 种方法，其中只有一种方法使 $BC$ 发生。

为了按古典定义计算某些事件发生的概率，我们需要一些排列组合的常识。

1° $n$ 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，每次取 $r$ 个作为一组，共有

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

种方法。

2° $n$ 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，每次取 $r$ 个，按次序排列之，共有

$$P_n^r=n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$$

种排列法。

3° $n$ 个不同的元素，分为 $r$ 组，第一组有 $n_1$ 个元素，第二组有 $n_2$ 个元素，…，第 $r$ 组有 $n_r$ 个元素 $(n_1+n_2+\cdots+n_r=n)$，则不同的分法共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种（若在两种分法中，第一组的元素彼此相同，第二组的元素彼此相同，…，第 $r$ 组的元素彼此相同，则认为两种分法彼此相同）。

4° $n$ 个不同的元素中有 $n_1$ 个带有下标“1”、$n_2$ 个带有下标“2”，…，$n_k$ 个带有下标“$k$”，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。在这 $n$ 个元素中，任取 $r$ 个，$r=r_1+r_2+\cdots+r_k$，$r_1,r_2,\cdots,r_k$ 是预先给定的非负整数；两次取法，当带有指标“$i$”的都有 $r_i$ 个，且两个由 $r_i$ 个元素组成的元素组相同 $(i=1,2,\cdots,k)$ 时，就认为相同，则不同的取法共有