复变函数

目　　录

第一章　复数与复变函数

内容提要

一、复数的概念，复数的表示与运算

1．复数的概念

称形如 $z=x+iy$ 的数为复数，其中 x 与 y 为任意实数，分别称为复数 z 的实部与虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z$$

i 满足 $i^2=-1$，称为虚单位．

表示复数 z 的向量的长度称为该复数的模或绝对值，记作

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.1}$$

以正实轴为始边，以表示 $z(z\neq0)$ 的向量为终边的角 θ 的弧度数称为 z 的辐角，记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta=\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x} \tag{1.2}$$

其中满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$．一个非零复数的辐角有无穷多个值，即

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots.$$

辐角的主值 $\arg z$ 可以由 $\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$ 的主值 $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ 按下列关系来确定：

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0;\\[2mm] \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y\neq0;\\[2mm] \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}\pm\pi, & \text{当 } x<0,\ y\neq0;\\[2mm] \pi, & \text{当 } x<0,\ y=0,\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$.

2. 复数的表示

三角表示 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$;

指数表示 $z=re^{i\theta}$,

其中,$r=|z|$,θ 为 $z\neq0$ 的无穷多个辐角中的任一值.

此外,复数还可以用球面上的点来表示.任取一个与复平面相切于原点的球面.过原点作与复平面垂直的直线与球面相交于另一点,称为北极,球面上与原点重合的点称为南极.这样,对复平面内任一点 z,联结它与北极的直线段必与球面相交于异于北极的另一点;反之,对于球面上异于北极的点,也可用一直线段将它与北极联结起来,延长后相交于复平面内的一点 z.用这种方法就建立了球面上的点(除北极外)与复平面上点的一一对应关系.为使北极也与复平面上的点相对应,在复平面上引入一个假想点,规定它的模为无穷大,称为无穷远点,记作 ∞.包含无穷远点的复平面称为扩充复平面.扩充复平面上的点与球面上的所有点一一对应,称该球面为复球面.因此,复数可用球面上的点来表示.

3. 复数的乘积、商、幂与方根

两个非零复数 z_1、z_2 的乘积与商有如下性质:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \tag{1.5}$$

注意 (1)等式(1.4)与(1.5)应理解为两端可能取的值的全体是相同的;(2)复数 z_1 乘以复数 z_2 在几何上相当于把表示 z_2 的向量逆时针旋转 $\arg z_1$,并把 z_2 的模伸长(或压缩)到 $|z_1|$ 倍.若 $|z_1|=1$,乘法就相当于旋转.

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,记作 z^n,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.6}$$

当 $r=|z|=1$ 时,就得到棣莫弗公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{1.7}$$

方程 $w^n = z$ $(z\neq 0)$有 n 个不同的根 w,称它们是 z 的 n 次根,记作 $w=\sqrt[n]{z}$,

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \tag{1.8}$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$是算术根,$k=0,1,2,\cdots,n-1$. 在几何上,$\sqrt[n]{z}$的 n 个值就是以原点为中心,$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

二、复变函数及其极限和连续性

1. 区域

复平面上的非空连通开集称为区域. 一个区域与它的边界的并集称为闭区域或闭域. 一条没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当曲线. 如果简单曲线的起点与终点重合,那末此曲线称为简单闭曲线. 若区域 D 中的任何简单闭曲线的内部全含于该区域,则称 D 为单连通域. 不是单连通域的区域称为多连通域.

2. 复变函数

设 G 为一复数集. 若存在一个确定的法则,按照该法则,对于每个复数 $z\in G$,有一个或几个复数 w 与它相对应,则称复变数 w 为复变数 z 的函数(简称复变函数),记作 $w=f(z)$. 若 z 的每个值对应着唯一的 w 值,则称函数 $f(z)$是单值的;若 z 的每个值对应着两个或两个以上的 w 值,则称 $f(z)$是多值的. G 称为 $f(z)$的定义集合,对应于 G 中所有 z 的一切 w 值构成的集合 G^* 称为函数值集合. 若 G 是一个区域,则称 G 为 $f(z)$的定义域.

复变函数 $w=f(z)$在几何上表示一个映射(或变换),它把 z 平面上的一个点集 G(定义集合)变到 w 平面上的一个点集 G^*

（函数值集合）.

3. 复变函数的极限

设函数 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的一个去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，A 为一个确定的常数．若对任给的 $\varepsilon>0$，相应地有一个 $\delta(0<\delta\leqslant\rho)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \text{ 或当 } z\to z_0 \text{ 时}, f(z)\to A.$$

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

复变函数极限的运算法则与实变函数相同．

复变函数的极限定义与一元实变函数的极限定义虽在形式上相同，但实质上它比后者的要求苛刻得多．对于一元实变函数，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在仅要求 x 在 x 轴上沿 x_0 的左右趋向 x_0 时，$f(x)$ 趋向于同一常数；对于复变函数的极限，则要求 z 不论从什么方向以任何方式趋向于 z_0 时，$f(z)$ 都趋向于同一常数．

4. 复变函数的连续性

设 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的一个邻域内，若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续．若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续．

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续．

复变连续函数的运算法则也与实变连续函数的运算法则类似．

例 题 分 析

例 1.1 求复数 $z=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}$ 的模与辐角的主值．

分析 一般,可以将复数 z 化成 $x+iy$ 的形式,再分别利用(1.1)式与(1.3)式来求它的模和辐角的主值. 此题中 z 的分子和分母互为共轭复数,根据两个共轭复数的模相等,很容易求出 z 的模,至于它的辐角主值也可以利用公式(1.4)与(1.5)来求. 下面用两种方法求辐角的主值.

解 法一 $$|z|=\frac{|1+\sqrt{3}i|\,|1-i|}{|1-\sqrt{3}i|\,|1+i|}=1.$$

为求辐角,先将 z 化为 $x+iy$ 的形式:

$$z=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}\cdot\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-i)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

根据(1.3)式,得 $$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

法二 根据公式(1.4)与(1.5),我们有

$$\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}+\operatorname{Arg}\frac{1-i}{1+i}$$
$$=\left(2m\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=2(m+n)\pi+\frac{\pi}{6},$$

其中 m 与 n 为整数,因此 $\arg z=\frac{\pi}{6}$.

例 1.2 分别就 $0<\varphi\leqslant\pi$ 与 $-\pi<\varphi<-\frac{\pi}{2}$ 两种情形将复数 $z=1-\cos\varphi+i\sin\varphi$ 化成三角形式与指数形式,并求它的辐角主值.

分析 将复数 z 化成三角形式与指数形式,关键在于求出它的模与辐角. 为此,可先将它化成 $x+iy$ 的形式,再用例 1 中的方法去求 z 的模与辐角. 但本题所给的复数已接近于三角形式,利用三角恒等式直接化为三角形式更为简便.

解 $$z=1-\cos\varphi+i\sin\varphi$$

$$=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

1) 若 $0<\varphi\leqslant\pi$，则 $0<\frac{\varphi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$. 由上式，$|z|=2\sin\frac{\varphi}{2}$. 又因为 $\sin\frac{\varphi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)$，$\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)$. 所以 z 的三角形式为

$$z=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

z 的指数形式为

$$z=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)i}.$$

由于 $0\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$，故 z 的辐角主值为 $\arg z=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$.

2) 若 $-\pi<\varphi<-\frac{\pi}{2}$，则 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\varphi}{2}<-\frac{\pi}{4}$，且 $\sin\frac{\varphi}{2}<0$，因此 $|z|=-2\sin\frac{\varphi}{2}$. 于是 $z=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)=-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2}\right)$. 又因为 $\frac{3}{4}\pi<\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}<\pi$，

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}\right),$$
$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}\right),$$

所以 z 的三角形式与指数形式分别为：

$$z=-2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$
$$z=-2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}\right)i}.$$

由于 $\frac{7}{4}\pi<\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}<2\pi$，故 $\theta=\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}$ 不是 z 的辐角主值. 而

$$-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}=-2\pi+\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\varphi}{2}\right)<0$$

所以 $\arg z=-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)$. 此时，$z$ 的三角形式和指数形式也可以分别写成：

$$z=-2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

$$z=-2\sin\frac{\varphi}{2}e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)i}.$$

例 1.3 设 α,β 都是单位圆内的点，证明：复数 $z=\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}$ 也在单位圆内.

分析 由已知，$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$. 为了证明 z 在单位圆内，只要证明 $|z|<1$ 或 $|z|^2<1$，这可以利用共轭复数的性质(例如 $|z|^2=z\overline{z}$ 等)得到.

证 因为

$$1-|z|^2=1-\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|^2=1-\frac{(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}{|1-\overline{\alpha}\beta|^2}$$
$$=\frac{(1-\overline{\alpha}\beta)\overline{(1-\overline{\alpha}\beta)}-(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}{|1-\overline{\alpha}\beta|^2},$$

又因为

$$\begin{aligned}&(1-\overline{\alpha}\beta)\overline{(1-\overline{\alpha}\beta)}-(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\\&=(1-\overline{\alpha}\beta)(1-\alpha\overline{\beta})-(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\\&=1-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+|\alpha|^2|\beta|^2-(|\alpha|^2+|\beta|^2-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})\\&=(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2)>0,\end{aligned}$$

所以 $1-|z|^2>0$，或者 $|z|<1$，故 z 在单位圆内.

在例 1.3 中，若 α 与 β 有一个在单位圆周上，例如，$|\alpha|=1$，重复上面的证明过程不难得知 $|z|=1$，因而 z 也在单位圆周上. 这个结论用下面的方法证明更为简便.

由于 $|\alpha|=1$，所以 $\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$，从而

$$|z|=\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{\overline{\alpha}\left(\frac{1}{\overline{\alpha}}-\beta\right)}\right|=\frac{1}{|\overline{\alpha}|}\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right|=|\alpha|=1.$$

例1.4 证明:方程 $z^n-1=0(n>1)$的 n 个根之和为零.

分析 方程 $z^n-1=0$ 的 n 个根就是1的 n 个不同的 n 次根.在几何上它们就是单位圆的内接正 n 边形的 n 个顶点,也可用以这 n 个顶点为终点的 n 个向量来表示.因此,它们的和(向量)是零(向量).为了用分析的方法证明这个结论,先利用公式(1.8),求出1的 n 个相异的 n 次根,化成指数形式后易见它们组成一个等比数列.再根据等比数列求和公式证明它们的和恰为零.

证 由公式(1.8),

$$\sqrt[n]{1}=(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$=e^{k\cdot\frac{2\pi}{n}i}(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

令 $\omega=e^{\frac{2\pi}{n}i}$,则它们可以表示为:$1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$.注意到 $\omega\neq1$,根据等比数列求和公式及 ω 为方程 $z^n-1=0$ 的根得知

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\frac{\omega^n-1}{\omega-1}=0.$$

例1.5 证明:复平面上三点 z_1、z_2 与 z_3 共线的充要条件是 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$为实数.

分析 用复数的方法解决平面几何问题通常有两个思路.其一是将平面上的点用复数表示,将平面曲线方程化成复数形式.本题中,可将通过两点 z_1 与 z_2 的直线的参数方程写成复数形式,点 z_3 与它们共线的充要条件是它满足该方程.其二是将点(复数)看成向量,利用向量的有关知识来解决.本题中,三点 z_1、z_2 与 z_3 共线相当于向量 z_3-z_1 与 z_2-z_1 共线,而两个向量共线当且仅当它们的夹角为 π 的整数倍.

证 法一 将过点 z_1 与 z_2 的直线参数方程化为复数形式:

$$z=z_1+t(z_2-z_1),\ t\in(-\infty,+\infty).$$

而 z_3 在该直线上的充要条件是它满足这个方程,即存在某个实数

$\tilde{t}\in(-\infty,+\infty)$，使

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\tilde{t}.$$

法二 不失一般性，将 z_1 平移到原点．我们知道，向量 z_3-z_1 与 z_2-z_1 共线的充要条件是

$$\operatorname{Arg}\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

即

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|e^{n\pi i}=\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|(-1)^n.$$

也就是说，$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$是一个实数．

例 1.6 求下列集合 G 在给定的函数 $w=f(z)$ 下映成什么样的集合，并画出图形：

(1) $f(z)=z^2-z,\ G=\{z\,|\,0<\operatorname{Im}z<1\}$；

(2) $f(z)=x-y+i(x+y)$，

$$G=\left\{z\,\middle|\,0<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4},1\leqslant|z|\leqslant2\right\}.$$

分析 求集合 G 在给定映射下的象集 G^*，通常先求出 G 中有代表性的点和曲线(例如边界曲线)的象点和象曲线，然后再确定集合 G^*．但有时也可以利用更简便的方法．在第(2)小题中，$f(z)$ 可以写成 $f(z)=az$ 的形式，因此直接利用复数乘法的几何意义就能得到 G^*．

解 (1) 令 $w=u+iv$，则函数 $w=z^2-z$ 对应于

$$u=x^2-y^2-x,\quad v=2xy-y. \tag{1}$$

易见，G 是 z 平面上宽度为 1 的水平带形区域，边界是直线 y

$=0$ 与 $y=1$. 将 $y=0$ 代入(1)式就得到 $y=0$ 的象曲线的参数方程：$u=x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$, $v=0$. 它表示 w 平面的实轴 $v=0$ 上 $u\geqslant-\frac{1}{4}$ 的部分. 将 $y=1$ 代入(1)式得：$u=x^2-x-1$, $v=2x-1$. 消去 x 就得到 $y=1$ 的象曲线是 w 平面上的抛物线 $u=\frac{1}{4}v^2-\frac{5}{4}$. G 内点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 的象点为 $w=-\frac{1}{2}$. 用同样的方法可得知 G 内任一水平直线 $y=c(0<c<1)$ 的象曲线也是一条抛物线 $u=\frac{1}{4c^2}v^2-(c^2+\frac{1}{4})$. 由此可见, G 的象集 G^* 是 w 平面上抛物线 $u=\frac{1}{4}v^2-\frac{5}{4}$ 右边的区域, 但不包含实轴上 $u\geqslant-\frac{1}{4}$ 的点, 如图 1.1.

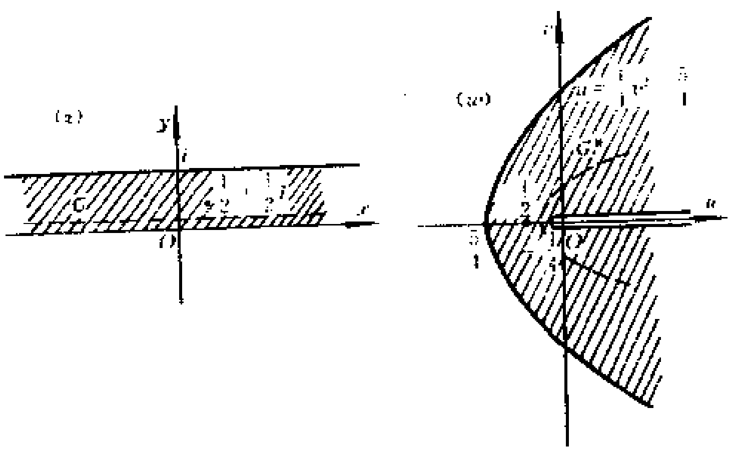

图 1.1

(2) 不等式 $0<\arg(z+1)<\frac{\pi}{4}$ 表示 z 平面上以 $z=-1$ 为顶点与正实轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的角形域, 而 $1\leqslant|z|\leqslant2$ 表示一个闭圆环区域, 因此 G 表示该闭圆环域含于角形域内的部分. 我们可以利

用(1)中的方法求 G^*，但下面的方法更简便．由于 $w=x-y+i(x+y)=(1+i)z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z$，根据复数乘法的几何意义，所求象集 G^* 就是 G 中的每个点(向量)沿逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$，模伸长到原来$\sqrt{2}$倍得到的 w 平面上点的集合，如图 1.2.

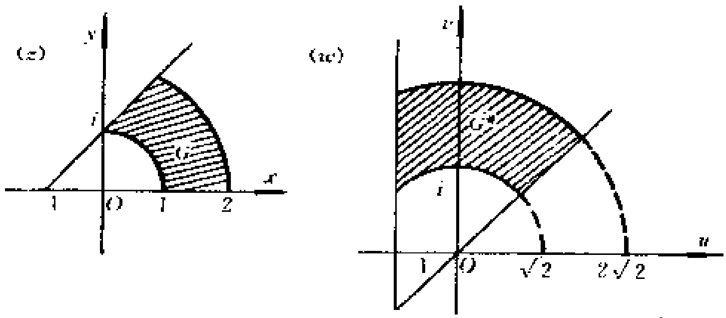

图 1.2

例 1.7 判断下列函数在给定点处的极限是否存在，若存在，试求出极限值．

(1) $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $z\to 0$;

(2) $f(z)=\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$, $z\to 1$.

分析 由于(1)中的函数 $f(z)$ 可以化为两个二元实变函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，因此能用极限存在的充要条件来讨论．注意到若令 $z=re^{i\theta}$，则 $f(z)=\dfrac{r^2\cos 2\theta}{r^2}=\cos 2\theta$，因此也可以用极限的定义来直接讨论．对于(2)中的函数 $f(z)$，可利用分解因式消去分式中的零因子，直接用极限四则运算法则来求．

解 (1)法一 令 $z=x+iy$，则 $f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，因此

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=0.$$

令 z 沿直线 $y=kx$ 趋于 0，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

易见它随 k 的不同而不同，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} u(x,y)$ 不存在．故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 也不存在．

法二 分析中已指出，若令 $z=re^{i\theta}$，则 $f(z)=\cos 2\theta$．当 z 沿不同的射线 $\arg z=\theta$ 趋于零时，$f(z)$ 趋于不同的值．例如，当 z 沿正实轴 $\arg z=0$ 趋于零时，$f(z)\to 1$；z 沿 $\arg z=\frac{\pi}{4}$ 趋于零时，$f(z)\to 0$，故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在．

(2) $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(\bar{z}+2)(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\bar{z}+2}{z+1}=\dfrac{3}{2}$.

例 1.8 试讨论函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

的连续性．

分析 对于分段表示的函数 $f(z)$，应当分别在 $z\neq 0$ 与 $z=0$ 处研究它的连续性．当 $z\neq 0$ 时，$f(z)$ 的实部与虚部分别为 $u(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，$v(x,y)=0$．显然，除去 $x=0$ 且 $y=0$，即 $(0,0)$ 点外，它们是连续的，故 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 时连续．当 $z=0$ 时，可以利用连续性定义来讨论．

解 由于当 z 沿 $y=kx$ 趋于 0 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y=kx)}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

它随 k 的不同而不同，因此 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在，故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续．分析中已指出，当 $z\neq 0$ 时，$f(z)$ 是连续的．

习 题

1.1 求下列复数的模、辐角及辐角的主值：

(1) $z=(\sqrt{2}-i)^3$； (2) $z=\frac{1-2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$；

(3) $z=-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$；(4) $z=\cos\alpha-i\sin\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$.

1.2 将下列复数表示成三角形式与指数形式：

(1) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$；

(2) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$；

(3) $z=\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$；

(4) $z=\frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$.

1.3 求下列复数的值：

(1) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$； (2) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$；

(3) $\sqrt[3]{1-i}$； (4) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$.

1.4 设 n 为正整数，α 为实数，证明：

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

1.5 求方程 $z^{n-1}=\bar{z}$ 的所有根.

1.6 设 $|z|=1$，试证：对任何复数 a 与 b，有

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1.$$

1.7 设 a_k 与 $b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是复数，证明柯西不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2.$$

1.8 设 $|\alpha|>1$，$|\beta|<1$，证明 $\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|^2>1$.

1.9 已知正方形的两个相对顶点为 $z_1(0,-1)$ 与 $z_3(2,5)$，求另外两个顶点 z_2 与 z_4 的坐标．

1.10 证明：由复数 α 与 β 所表示的两个向量互相垂直的充要条件为 $\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})=0$.

1.11 证明：复平面上四点 z_1、z_2、z_3 与 z_4 在同一圆周(或直线)上的充要条件为

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)=0.$$

1.12 设 $z_1+z_2+z_3=0$, $|z_1|+|z_2|+|z_3|=1$, 证明

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-z_1z_2z_3.$$

1.13 求下列曲线在给定映射 $w=f(z)$ 下的象：

(1) $w=\dfrac{1}{z}$, $\arg z^2=-\dfrac{\pi}{4}$;　　(2) $w=1+\dfrac{1}{z}$, $\mathrm{Re}z=0$;

(3) $w=\dfrac{z}{\bar{z}}$, $z=R\cos t+iR\sin t$;

(4) $w=\dfrac{z+1}{z-1}$, $\mathrm{Im}z=0$.

1.14 求集合 D 在给定映射 $w=f(z)$ 下的象集 D^*：

(1) $f(z)=iz$, $D=\{z|1\leqslant|z|\leqslant2,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi\}$;

(2) $f(z)=z^4$, $D=\{z||z|\leqslant1,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{\pi}{4}\}$.

1.15 下列极限是否存在？若存在，试求极限的值．

(1) $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\mathrm{Im}z}{1+|z|}$;　　(2) $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\mathrm{Re}z}{|z|}$;

(3) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}$.

1.16 证明：函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & z\neq0;\\ 0, & z=0\end{cases}$$

在 $z=0$ 处连续．

1.17　设 $f(z)$在 z_0 处连续，证明$\overline{f(z)}$与$|f(z)|$在点 z_0 连续.

1.18　讨论函数 $f(z)=\arg z$ 的连续性.