吉教社
奥林匹克丛书

SHUXUE OLYMPIC COMPETITION

数学奥林匹克

高中二年级

奥林匹克系列丛书

数学奥林匹克

奥林匹克历来以奋发努力、拼搏向上的精神为人们所崇尚。本套丛书正是以弘扬奥林匹克精神为宗旨，严格按照最新《教学大纲》及《考试说明》，集数位多年从事教学工作的老师们的心血，针对中小学生的不同特点所编辑的。

丛书着重教导学习方法，使学生们能够较容易地掌握各学科教科书的关键知识并在此基础上进行扩展训练，从而迅速、有效地提高学生的阅读、写作能力（文科类）及分析、解题能力（理科类）。

致天下之治者在人才，成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体，它在如林的教辅材料中，博采众家之长，自成完整的知识体系，

是望子成龙、望女成凤的家长们的理想选择，是莘莘学子的好帮手。“诗也，书也，文也，无非心其得也，知之，好之，乐之，当从学而习之。”

本套丛书分为小学版和中学版，是专门为中小学生出版的以快速提高学习水平及应试能力为目的的丛书，是一套不可多得的优秀教辅图书。

成功，

来自奥林匹克！

ISBN 7-5383-4306-7

9 787538 343069 >

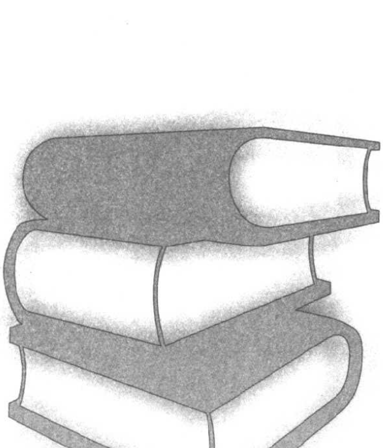
G·3928　定价：12.00元

吉教社
奥林匹克丛书

OLYMPIC COMPETITION

数学 奥林匹克

高中二年级



(吉)新登字 02 号

数学奥林匹克高中二年级　　孙静波　王丽锋　主编

责任编辑:王世斌　阎爱群　　封面设计:王　康

出版:吉 林 教 育 出 版 社
发行:吉 林 教 育 出 版 社
印刷:吉林省教育学院印刷厂

880×1230 毫米　32 开本　10.25 印张　288 000 字
2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷
印数:1－10 000 册　定价:12.00 元
ISBN 7－5383－4306－7/G·3928

前　言

为了扩大广大学生的知识面，增加知识储备，激发学生学习的兴趣，有效地培养科学的思维方法和综合解题能力，我们编写组的全体成员经过一年多的艰苦工作，终于使这套丛书在“春绣人间千里绿肥红壮艳，歌传广宇万家书灿墨浓香”的氛围中和广大的热心读者见面了。

本丛书旨在开启学生的心扉，震撼学生的心灵，挖掘深层信息，架设由已知、经可知、达未知的桥梁，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使学生真正体味“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛。

致天下之治者在人才，成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体。本丛书在如林的教辅材料中，博采众家之长，自成完整的知识体系。是望子成龙、望女成凤的家长的理想选择，是莘莘学子的好帮手。“诗也，书也，文也，无非心其得也，知之，好之，牙之，当从学而习之”。

寸有所长，尺有所短，由于我们水平有限，书中不足之处在所难免，敬请各位不吝赐教。

目　录

代数部分

第六章 不等式

第一单元 不等式的性质

知识要点

1. 不等式的概念

用不等号联结两个式子而成的式子叫不等式.

2. 两个实数大小的比较

设 $a,b\in R$,则 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$

这是比较两实数大小和运用比较法的依据.

3. 不等式的性质

性质 1:$a>b\Leftrightarrow b<a$ (对称性)

性质 2:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$ (传递性)

性质 3:$a>b\Rightarrow a+c>b+c$

性质 4:$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

以上是不等式的基本性质,以下是不等式的运算性质.

性质 5:$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$ (加法法则)

性质 6:$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$ (乘法法则)

性质 7:$a>b>0,n\in N\Rightarrow a^n>b^n$ (乘方法则)

性质 8：$a>b>0, n\in N \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ （开方法则）

典型例题解析

例 1 若 $a<b<0$，则下列不等式关系式中，不能成立的 （　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

答案：B

解题剖析 ⇨ 由 $a<b<0$，得 $|a|>|b|, a^2>b^2$，又 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，有 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. 作差可知 B 错误.

例 2 若 $a>b$，则 （　　）

A. $(ac)^2\geqslant(bc)^2$　　B. $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$

C. $ac^2\geqslant bc^2$　　D. $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$

答案：C

解题剖析 ⇨ 由 $a>b, c^2\geqslant 0$ 得

$ac^2\geqslant bc^2$.

故 C 正确.

例 3 已知 $x<y<0$，则下列不等式中成立的是 （　　）

A. $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$　　B. $-x>|y|$

C. $\frac{y}{x}>1$　　D. $x^{2n+1}>y^{2n+1}(n\in N)$

答案：B

解题剖析 ⇨

由 $x<y<0$ 得 $-x>-y>0$,又 $-y=|y|$,故 B 正确.

作差可知:$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}>0$,$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$;$x$、$y$ 同负且 x 的绝对值较大,故 $\frac{y}{x}<1$;幂函数 $y=x^{2n+1}$ 是奇函数在实数范围内递增,故 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

例 4 下列命题中正确的是 ( )

A.若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

B.若 $a>b>c$,则 $(a-b)c>(b-a)c$

C.若 $a>b$,$c>d$,则 $a-b>b-d$

D.若 $a>b>0$,$c>d>0$,则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$

答案:D

解题剖析 ⇨

当 $b<0$ 且 $|a|<|b|$ 时,$a^2<b^2$,A 为假命题.当 $a>b>c$ 且 $c\leqslant 0$ 时,$(a-b)c\leqslant(b-a)c$,B 为假命题,两同向不等式不能相减.C 为假命题,而 $c>d>0$,所以 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$,又 $a>b>0$,所以 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$,从而 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

例 5 若 $0<a<1$,则下列不等式中不成立的是 ( )

A.$\log_a(1-a)>0$ B.$\sin(1+a)<\sin(1-a)$

C.$\pi^{-(1+a)}<\pi^{a-1}$ D.$(1+a)^{\frac{3}{2}}>(1-a)^{\frac{3}{2}}$

答案:B

解题剖析 ⇨

$0<a<1$，$0<1-a<1$，所以 $\log_a(1-a)>0$，A 成立，函数 $y=\pi^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数，又 $-(1+a)<a-1$，所以 $\pi^{-(1+a)}<\pi^{a-1}$，C 成立．函数 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增函数，又 $1+a>1-a>0$，D 成立，故 B 不成立．

例 6 $p<0$，$-1<q<0$，则 p，pq，pq^2 大小关系为 (　　)

A. $p>pq>pq^2$　　B. $pq^2>pq>p$

C. $pq>p>pq^2$　　D. $pq>pq^2>p$

答案：D

解题剖析 ⇨

$-1<q<0$，所以 $0<q^2<1$，所以 $0>pq^2>p$．$q<0$，$p<0$，所以 $pq>pq^2>p$，选 D．

例 7 已知 a、b、c、$d\in R$，且 $ab>0$，$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，则 bc ____ ad．

答案：>

解题剖析 ⇨

由 $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$ 且 $ab>0$，两边同乘 ab，则有 $-bc<-ad$，两边同乘以 -1，则 $bc>ad$．

例 8 试比较 $a^4+6a^2b^2+b^4$ 和 $4ab(a^2+b^2)$ 的大小 $(a\neq b)$．

答案：$a^4+6a^2b^4>4ab(a^2+b^2)$

解题剖析 ⇨

$a^4+6a^2b^2+b^4-4ab(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2=(a^2+b^2-2ab)^2=(a-b)^4>0(a\neq b)$　$\therefore$　$a^4+6a^2b^2+b^2>4ab(a^2+b^2)$

例 9 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的最大值和最小值.

解 ⇨

$\because \begin{cases}a-c=f(1)\\4a-c=f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]\\-c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)\end{cases}$

$\therefore\ f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$

$\because\ -1\leqslant f(2)\leqslant 5,\ -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$

$\because\ -4\leqslant f(1)\leqslant -1,\ \therefore\ \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$

$\therefore\ -1\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$

即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$，即 $f(3)$ 的最大值是 20，最小值是 -1.

例 10 设 $a>0$，且 $a\neq 1$，$0<x<1$，试比较 $|\log_a(1-x)|$ 和 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

解法一 ⇨

（作差比较）

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\frac{|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$

$\because\ 0<x<1\ \ \therefore\ 0<1-x<1,1<1+x<2,$

$\therefore\ \lg(1-x)<0,\lg(1+x)>0.$

即上式可化为 $\frac{-[\lg(1-x)+\lg(1+x)]}{|\lg a|}=\frac{-\lg(1-x^2)}{|\lg a|}$

$\because\ 0<1-x^2<1\ \ \therefore\ \lg(1-x^2)<0$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\frac{-\lg(1-x^2)}{|\lg a|}>0$

即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法二 ⇨

（作商比较）

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{1+x}(1-x)|$$

$$=\left|\log_{1+x}\frac{1-x^2}{1+x}\right|$$

$$=\left|\log_{1+x}(1-x^2)-1\right|$$

$\because\ 0<x<1,\therefore\ 0<1-x^2<1,1+x>1$

$\therefore\ \log_{1+x}(1-x^2)<0$

$\therefore\ \log_{1+x}(1-x^2)-1<-1$

$\therefore\ \left|\log_{1+x}(1-x^2)-1\right|>1$

$\therefore\ \left|\log_a(1-x)\right|>\left|\log_a(1+x)\right|$

知识训练

一、选择题

1. 已知 $a<0,a+b>0$,则下列不等式中成立的是 （　　）

A. $ab+a^2>0$　　B. $ab-a^2>0$

C. $ab+b^2>0$　　D. $ab-b^2>0$

2. 已知 $a>b$,则 （　　）

A. $ab^2>b^3$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

C. $a^2>b^2$　　D. $a^3>b^3$

3. 若 $a>b,c<d$,则一定有 （　　）

A. $a-c>b-d$　　B. $ac>bd$

C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D. $a+c>b+d$

4. 下列命题中,正确的命题是 （　　）

①若 $a>b,c>b$,则 $a>c$　　②$a>b$,则 $\lg\frac{a}{b}>0$

③若 $a>b,c>d$,则 $ac>bd$ ④若 $a>b>0$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

⑤若$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$,则 $ad>bc$ ⑥若 $a>b,c>d$,则 $a-d>b-c$

A.①② B.④⑥

C.③⑥ D.③④⑤

5.若 $a>0,b<0$,且 $a<|b|$,则下列各式中成立的是 ( )

A.$b<-a<a<-b$ B.$-b<-a<b<a$

C.$-a<b<a<-b$ D.$-a<-b<a<b$

6.下列命题中正确的命题是 ( )

A.$a>b\Rightarrow a|c|>b|c|$ B.$a>-b\Rightarrow c-a<b+c$

C.$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ D.$a^2>b^2\Rightarrow a>b$

7.若 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$,则 $m=\log_{\sin\alpha}\cos\alpha$,$n=\log_{\cos\alpha}\sin\alpha$ 的大小关系是

( )

A.$m>n$ B.$m\leqslant n$ C.$m<n$ D.$m\geqslant n$

8.设 $a>b>0$,下列各不等式恒成立的是 ( )

A.$\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$ B.$\frac{b^2+1}{a^2+1}>\frac{b^2}{a^2}$

C.$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$ D.$a^a>b^b$

9.不等式$\frac{|a+b|}{|a|+|b|}\leqslant 1$成立的条件是 ( )

A.$ab>0$ B.$ab<0$ C.$ab\neq 0$ D.$a^2+b^2\neq 0$

二、填空题

1.若 $-1<a<b<0$,将$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、a^2、b^2 按从大到小的顺序排列________.

2.若 $a>0>b,c>d>0$,则 ad ________ bc;$\frac{a}{c}$ ________ $\frac{b}{d}$;$a-c$ ________ $b-d$;$a(d-c)$________ $b(d-c)$.

3. 设 $60 < a < 84, 28 < b \leqslant 33$，则 $a+b$，$a-b$，及 $\frac{a}{b}$ 的范围分别是________、________、________.

4. 若 $\frac{b+c}{c} < 0, \frac{bc}{a^2} > 0, abc > 0$，则 a、b、c 的符号是________.

5. 比较大小，$(a^2+1)^2$ ________ $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

6. 比较大小，若 $x > y$，则 $x^3 - x^2y - 3xy^2$ ________ $2x^2y - 6xy^2 + y^3$.

三、解答题

1. 若 $x > y > 0$，比较 $\sqrt{x+y} - \sqrt{x}$ 与 $\sqrt{x} - \sqrt{x-y}$ 的大小.

2. 若 $0 < \alpha < \pi$，试比较 $2\sin 2\alpha$ 与 $\cot \frac{\alpha}{2}$ 的大小.

3. 设 $x > 0$，且 $x \neq 1$，比较 $1 + \log_x 3$ 与 $2\log_x 2$ 的大小.

能力提高

一、选择题

1. 若 a, b 是任意实数，且 $a > b$，则 ( )

A. $a^2 > b^2$　　B. $\frac{b}{a} < 1$

C. $\lg(a+b) > 0$　　D. $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$

2. 不等式 $a > b$ 和 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 同时成立的充分且必要条件是 ( )

A. $a > b > 0$　　B. $a > 0 > b$

C. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$　　D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

3. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$，则在 (1) $a^2 > b^2$　(2) $ab < b^2$　(3) $a + b > 2\sqrt{ab}$　(4) $a^2 + b^2 > |a| + |b|$ 这四个式子中恒成立的个数是 ( )

A. 一个　B. 二个　C. 三个　D. 四个

4. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，$P = \log_a(a^3+1)$，$Q = \log_a(a^2+1)$，则 P、Q 的大小关系是 ( )

A. $P < Q$

B. $P > Q$

C. $a > 1$ 时 $P > Q$；$0 < a < 1$ 时 $P < Q$

D. 不能确定

5. 已知 $0 < a < b < 1$，则 a^b，$\log_b a$、$\log_{\frac{1}{a}} b$ 的大小关系是 （　　）

A. $\log_{\frac{1}{a}} b < a^b < \log_b a$　　B. $\log_{\frac{1}{a}} b < \log_b a \leqslant a^b$

C. $\log_b a < \log_{\frac{1}{a}} b < a^b$　　D. $a^b < \log_{\frac{1}{a}} b < \log_b a$

6. 若 $\log_2 x = \log_3 y = \log_5 z < 0$，则 $x^{\frac{1}{2}}$、$y^{\frac{1}{3}}$、$z^{\frac{1}{5}}$ 之间大小的关系是（　　）

A. $y^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}} < z^{\frac{1}{5}}$　　B. $x^{\frac{1}{2}} < y^{\frac{1}{3}} < z^{\frac{1}{5}}$

C. $z^{\frac{1}{5}} < y^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}}$　　D. $x^{\frac{1}{2}} < z^{\frac{1}{5}} < y^{\frac{1}{3}}$

二、填空题

1. 已知 $a > b > c > 1$，则 $\sqrt{abc}$，$\sqrt{ab}$，$\sqrt{bc}$，$\sqrt{ac}$ 由大到小的排列是________.

2. 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$-\pi < \beta < \frac{\pi}{2}$，则 $2\alpha - \frac{1}{3}\beta$ 的范围是________.

3. 已知 $-\frac{1}{2} < a < 0$，$A = 1 + a^2$，$B = 1 - a^2$，$C = \frac{1}{1+a}$，$D = \frac{1}{1-a}$. 试将 A、B、C、D 从小到大排列________.

4. 设 $a > b > 0$，$m > 0$，$n > 0$，则，$\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b+m}{a+m}$，$\frac{a+n}{b+n}$ 之间的大小顺序是________.

5. 已知 $m > n > 0$，则 $A = 0.9^m \times 0.8n$，与 $B = 0.9^n \times 0.8m$ 的大小关系是________

三、解答题

1. 试比较 $\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的大小，已知 a，b 为正实数.

2. 若 $a > b > 0$，$c < d < 0$，比较 $\frac{\log_{\sin\alpha}\pi}{a-c}$ 与 $\frac{\log_{\sin\alpha}\pi}{b-d}$.

3. 设 $a > b + 1$，$c > d + 1$，求证 $ac + bd > bc + ad + 1$.

竞赛训练

1.若 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,试比较$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}$与 $a+\frac{1}{a}-2$ 的大小.

第二单元　算术平均数与几何平均数

知识要点

1.算术平均数　$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$　(x_1、x_2、…、$x_n\in R$)

几何平均数　$S=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$　(x_1、x_2、…、$x_n\in R^+$)

2.基本不等式

$a^2+b^2\geqslant 2ab$　($a,b\in R$,当且仅当"$a=b$"时"$=$"成立)

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$　($a,b\in R^+$,当且仅当"$a=b$"时"$=$"成立)

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$　($a,b,c\in R^+$,当且仅当"$a=b=c$"时"$=$"成立)

$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$　($a,b,c\in R^+$,当且仅当"$a=b=c$"时"$=$"成立)

典型例题解析

例 1　已知函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}+2$ 的值域是　(　　)

A.$[4,+\infty)$　　B.$[3\sqrt{2},+\infty)$

C.$(-\infty,0]$　　D.$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$