湖南省教育科学研究院基础教育研究所 编写

2002年 3+X 高考复习丛书

数学

（供第2轮复习使用）

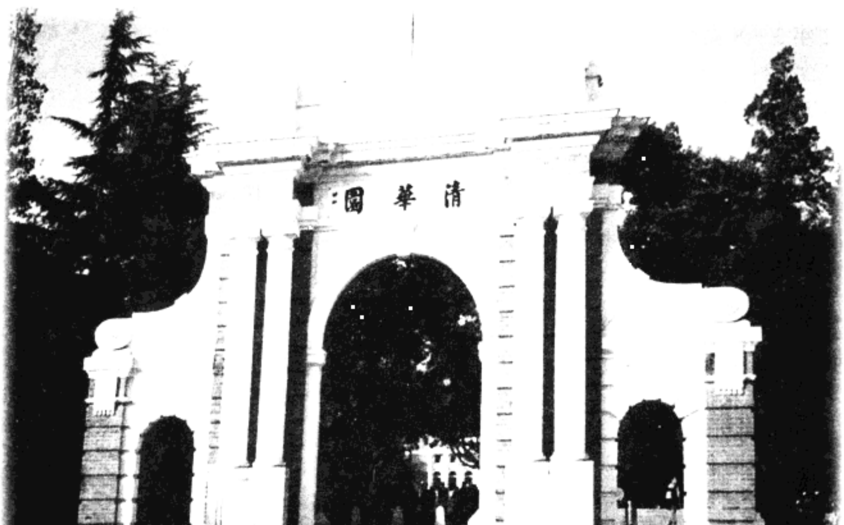
教育科学出版社

湖南省教育科学研究院基础教育研究所　编写

2002年3+X高考复习丛书

数学

（供第2轮复习使用）



教育科学出版社
·北京·

责任编辑　韩敬波
责任印制　田德润
责任校对　曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

2002年3+X高考复习丛书·数学:供第二轮复习使用/湖南省教育科学研究院基础教育研究所编写.—北京:教育科学出版社,2001.12

ISBN 7-5041-2221-1

Ⅰ.2…　Ⅱ.湖…　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第077920号

出版发行	教育科学出版社			
社　址	北京·北三环中路46号	邮　编	100088
电　话	62003339	传　真	62013803
经　销	各地新华书店		
印　刷	长沙市中南彩色印刷厂		
开　本	787毫米×1092毫米　1/16		
印　张	9.75	版　次	2001年12月第1版
字　数	160千　图　56幅	印　次	2001年12月第1次印刷
定　价	10.00元(全套9册 共90.00元)	印　数	00 001—20 000册

(如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换)

编 写 说 明

为了适应高校招生考试制度改革与发展的要求，科学引导高三年级各学科第二、三轮总复习教学，湖南省教育科学研究院基础教育研究所在调查研究的基础上，对3+X高考改革方案和2001年3+X高考各科试题进行了深入分析和研究，编写了这套《2002年3+X高考复习丛书》（其中第一套供高三第二轮总复习使用，第二套供高三第三轮总复习使用）.

一、指导思想

本丛书的编写，是以高校招生考试制度改革与发展的思路为指导，以提高高三总复习教学效率和学生综合素质以及应试能力为目标，竭诚为教师和学生提供高质量和高水平的服务.

二、编写原则

1. 针对性原则: 本丛书的编写，与高考改革发展的趋势保持一致，与《3+X考试说明》中的内容和要求相吻合，充分体现第二、三轮总复习的特点.

2. 实用性原则: 各学科从高三总复习的教学实际出发，根据本学科的特点确定具体的编写体例和知识容量，真正使教师和学生感到实用、好用.

3. 科学性原则: 各学科合理选择编写内容，所用例题、习题、试题的难易程度适当，编写思路清晰，体系严谨，符合学生认知规律.

4. 综合性原则: 第二轮总复习以学科内综合为主，第三轮总复习着重加强学科间知识的渗透和联系；编写时特别注意联系生产、生活、社会以及现代科学技术发展的实际.

三、丛书特点

1. 基本体例: 第二轮复习以小专题为基本形式，每个单元包括“考点”、“例题”和“习题”三项内容，其中第一、二项与第三项内容篇幅的比例约为4:6.

2. 本书特色:

①“精”. 内容精，篇幅小，既满足总复习的需要，又不加重学生学习的负担.

②“新”. 根据最新高考改革信息，选择背景材料，确定内容编排形式以及知识的考查方式. 所有这一切都力求新颖，使教师和学生有新鲜感和亲切感.

③“活”. 紧密联系实际，所用例题、习题和试题，具有综合性、开放性、灵活性的特点. 注重培养学生思维的发散性和创造性.

第二轮复习丛书共9册，包括语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理.

本册主编欧阳新龙. 全书由向本清、李文英、李申榜、周大明、陈卫平、欧阳新龙、钟继之、黄仁寿和詹浩波编写，由欧阳新龙、黄仁寿、周大明、陈锋、涂立奇、朱同彪、马罗和詹浩波审稿.

丛书编写难免有不足之处，欢迎广大师生批评指正，提出宝贵意见，以利进一步提高丛书的编写质量. (来信请寄：湖南省教育科学研究院基础教育研究所欧阳新龙收　邮编：410005)

湖南省教育科学研究院基础教育研究所
《2002年3+X高考复习丛书》编写组

目　　录

一　集合与函数

第 1 课时　集合及其运算……………………………………（ 1 ）
第 2 课时　抽象函数……………………………………（ 3 ）
第 3 课时　函数的解析式……………………………………（ 5 ）
第 4 课时　函数的图像……………………………………（ 7 ）
第 5 课时　函数的值域和最值……………………………………（ 9 ）
第 6 课时　函数的性质……………………………………（ 11 ）
第 7 课时　二次函数……………………………………（ 14 ）
第 8 课时　指数函数和对数函数……………………………………（ 16 ）
第 9 课时　函数、方程、不等式……………………………………（ 19 ）

二　复数与三角

第 1 课时　三角函数的概念、图像和性质……………………………………（ 21 ）
第 2 课时　三角变换及求值……………………………………（ 23 ）
第 3 课时　三角形中的问题……………………………………（ 26 ）
第 4 课时　三角最值与综合题……………………………………（ 28 ）
第 5 课时　复数的运算和方程……………………………………（ 31 ）
第 6 课时　复数的模与辐角……………………………………（ 33 ）

三　不等式

第 1 课时　不等式的性质……………………………………（ 36 ）
第 2 课时　不等式的证明……………………………………（ 38 ）
第 3 课时　不等式的解法……………………………………（ 40 ）
第 4 课时　含绝对值的不等式……………………………………（ 42 ）
第 5 课时　不等式的应用……………………………………（ 44 ）

四　数列、极限、数学归纳法

第 1 课时　等差数列与等比数列……………………………………（ 47 ）
第 2 课时　数列的综合问题……………………………………（ 49 ）
第 3 课时　数列的极限……………………………………（ 51 ）
第 4 课时　运用数学归纳法证题的基本方法……………………………………（ 53 ）
第 5 课时　归纳、猜想、证明……………………………………（ 55 ）

五　立体几何

第 1 课时　平行关系……(58)
第 2 课时　垂直关系……(60)
第 3 课时　空间距离……(62)
第 4 课时　空间角……(63)
第 5 课时　空间图形的面积与体积……(66)
第 6 课时　折叠与展开……(68)
第 7 课时　线面综合题……(70)

六　解析几何

第 1 课时　直线的知识……(73)
第 2 课时　圆的方程及应用……(75)
第 3 课时　椭圆……(78)
第 4 课时　双曲线……(82)
第 5 课时　抛物线……(84)
第 6 课时　坐标变换与圆锥曲线……(87)
第 7 课时　参数方程与极坐标……(89)
第 8 课时　圆锥曲线综合题……(91)

七　排列、组合与二项式定理

第 1 课时　排列、组合……(95)
第 2 课时　二项式定理……(97)

八　应用题

第 1 课时　与函数、方程相关的应用题……(100)
第 2 课时　与不等式相关的应用题……(103)
第 3 课时　与数列相关的应用题……(105)
第 4 课时　与几何相关的应用题……(108)

综合测试题(一)……(111)

综合测试题(二)……(114)

参考答案……(117)

一　集合与函数

第1课时　集合及其运算

【考点导航】

集合论是现代数学的基础.高考对集合的考查主要是检测学生对集合概念的理解、对集合有关术语和符号的使用,以及集合的交、并、补运算.该知识点考查的核心是集合的思想和方法与其他数学问题的相互渗透;考查的题型是以选择题、填空题为主,与集合有关的解答题也不能排除在外;复习的重点是在明确有关概念的基础上,掌握集合的思想与方法.

【例题导析】

例1　函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 R,若不等式 $f(x)>0$ 的解集是 F,不等式 $g(x)>0$ 的解集是 G,则不等式组 $\begin{cases} f(x)\leqslant 0 \\ g(x)\leqslant 0 \end{cases}$ 的解集是(　　).

A. $F\cup G$　　B. $F\cap G$　　C. $\overline{F}\cup\overline{G}$　　D. $\overline{F}\cap\overline{G}$

【分析】　该题以不等式知识为载体,将集合的交、补问题具体化,巩固了对集合运算的理解;通过明确算理,培养运算能力.

该题解题的关键在于理解:由 $f(x)$ 的定义域为 R,得出 $\{x|f(x)>0\}\cup\{x|f(x)\leqslant 0\}=R$;又由 $\{x|f(x)>0\}\cap\{x|f(x)\leqslant 0\}=\Phi$,得出 $\{x|f(x)\leqslant 0\}=\overline{F}$.

解: ∵　$f(x)$ 的定义域为 R,　∴ $\{x|f(x)\leqslant 0\}=\overline{\{x|f(x)>0\}}=\overline{F}$.

同理 $\{x|g(x)\leqslant 0\}=\overline{G}$,故应选答案 D.

【说明】　此题也可令 $f(x)=x-1$,$g(x)=x$,进行直接验证,得出答案 D.

例2　若集合 $A=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x|a+1<x\}\cap\{x|x<2a-1\}$,如果 $B\subset A$,则实数 a 的取值范围是________________.

【分析】　该题旨在巩固对子集、空集概念的理解,通过对集合 B 的讨论,体现了分类讨论的数学思想.该题的解题关键在于对集合 B 分 $B\neq\Phi$ 与 $B=\Phi$ 两种情形来进行讨论.

解: (1)当 $B\neq\Phi$ 时,$a+1<2a-1$,从而 $a>2$.

又由 $B\subset A$ 得 $\begin{cases} 2a-1\leqslant 5 \\ a+1\geqslant 2 \end{cases}$　　即 $1\leqslant a\leqslant 3$,

∴　$2<a\leqslant 3$.

(2)当 $B=\Phi$ 时,$2a-1\leqslant a+1$,从而 $a\leqslant 2$,

∴　实数 a 的取值范围是 $a\leqslant 3$.

例3　已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,|x^2-2x|\leqslant x\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}$,$C=\{x|ax^2+x+b<0\}$,满足 $(A\cup B)\cap C=\Phi$,$(A\cup B)\cup C=R$,求实数 a、b 的值.

【分析】　该题以含绝对值符号的不等式和一元二次不等式为载体,渗透了集合的思想和

方法，巩固了对集合概念和运算的理解，培养了运算能力.

该题解题的关键在于将集合 A、B 化简，并得出集合 $C=\overline{A\cup B}=\{x\mid x<0$ 或 $x>3\}$，从而得出 $x=0$ 和 $x=3$ 是方程 $ax^2+x+b=0$ 的两根.

解：∵ $A=\{x\mid |x^2-2x|\leqslant x\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}\cup\{x\mid x=0\}$

$B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{x}{1-x}\geqslant 0\right\}=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$.

∴ $A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$

又∵ $(A\cup B)\cap C=\Phi$，$(A\cup B)\cup C=R$

∴ $C=\overline{A\cup B}=\{x\mid x<0$ 或 $x>3\}$

又∵ $C=\{x\mid ax^2+x+b<0\}$，∴ $x=0$ 和 $x=3$ 是方程 $ax^2+x+b=0$ 的两根.

∴ $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=0$.

【精题导练】

1. 选择题

(1)已知全集 I 为复数集合，集合 $A=\{z\mid |z-1|<1\}$，$B=\{z\mid |z|\leqslant 2\}$，则(　　).

A. $\overline{A}\cap B=\Phi$　　　　B. $B\supset A\cap B$

C. $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}$　　　　D. $\overline{A}\cup\overline{B}=I$

(2)已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+2x+1,x\in R\}$，$B=\{y\mid y=x^2+2x+1,x\in R\}$，则(　　).

A. $A=B$　　　　B. $A\subseteq B$

C. $A\cap B=\Phi$　　　　D. $A\cup B=R$

(3)z 为复数，集合 $A=\{z\mid |z-1|\leqslant 1\}$，$B=\left\{z\,\middle|\,\arg z\geqslant\frac{\pi}{12}\right\}$，在复平面内 $A\cap B$ 所表示的图形面积是(　　).

A. $\dfrac{5\pi}{6}$　　　　B. $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{1}{4}$　　　　D. $\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{1}{4}$

2. 填空题

(1)已知集合 $A=\{a,a^2+1,1\}$，$B=\{3a,a+2,3\}$，$A\cap B=\{a+2\}$，则 a 的值为____________.

(2)若集合 $B=\{a,b,c,d,e\}$，$C=\{a,c,e,f\}$，且集合 A 满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则集合 A 的个数是________.

3. 解答题

(1)已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+mx-1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=3,0\leqslant x\leqslant 3\}$，若 $A\cap B$ 是单元素集合，求实数 m 的取值范围.

(2)在复数集合中，已知 $A=\{z_n\mid z_0=0,z_1=1,z_{n+1}-z_n=(1+\sqrt{3}\,i)(z_n-z_{n-1}),(n=1,2,3,\cdots)\}$，$B=\{z_n\mid |z_n|\leqslant 10\}$，试确定 $A\cap B$ 的元素个数.

第 2 课时　抽象函数

【考点导航】

函数是中学数学的主线，同时又是学习高等数学的基础．因此，函数是高考考查的重点．抽象函数是指没有给出具体表达式的函数，根据给出的抽象函数的某些性质导出它的其他性质和有关结论也成为高考命题的一类重要题型．

【例题导析】

例 1　已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且满足 $f(2)=1$；$f(xy)=f(x)+f(y)$．又当 $x>y$ 时，$f(x)>f(y)$，(1)求 $f(1)$ 和 $f(4)$ 的值；(2)如果 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$，求 x 的范围．

【分析】 此题涉及的知识点有函数的定义域、函数的单调性以及一元二次不等式等．通过将抽象不等式转化为具体不等式，体现了等价转换的数学思想，能培养学生抽象的思维能力．解此题的关键在于利用函数的单调性，将不等式转化．

解： (1)令 $x=y=1$ 得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=2f(1)$　$\therefore$　$f(1)=0$．

又令 $x=y=2$ 得 $f(4)=f(2\times 2)=f(2)+f(2)=2f(2)=2$．

(2)$\because$　$x>y$ 时，$f(x)>f(y)$，　$\therefore$　$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数．

又$\because$　$f(x)+f(x-3)=f[x(x-3)]$，$f(4)=2$．

$\therefore$　原不等式等价于 $f[x(x-3)]\leqslant f(4)$ 且 $x>3$．

$\because$　$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore$　原不等式等价于 $\begin{cases} x(x-3)\leqslant 4 \\ 3<x \end{cases}$　解得 $3<x\leqslant 4$．

例 2　定义在非零实数集上的奇函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $f(1)=0$．设 $g(x)=\sin^2 x+k\cos x-2k$ $\left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$，当 $g(x)<0$ 且 $f[g(x)]<0$ 时，求实数 k 的取值范围．

【分析】 与该题有关的知识点有函数的单调性、奇偶性、三角函数的值域和二次函数的图像等，涉及到的数学思想方法有等价变换、分类讨论、数形结合和分离参数等．解此题的关键在于由 $f(x)<0$ 且 $x<0$ 得出 $x<-1$，并由此得出 $g(x)=\sin^2 x+k\cos x-2k<-1$，将其分离参数 k 后得出 $\dfrac{2-\cos^2 x}{2-\cos x}<k$．利用数、形结合求得 $u=\dfrac{2-\cos^2 x}{2-\cos x}$ 的值域后得出 k 的范围．解此题需要较强的逻辑思维能力和运算能力．

解： $\because$　$f(x)$ 为奇函数，$f(1)=0$，　$\therefore$　$f(x)<0\Longleftrightarrow -f(x)>0\Longleftrightarrow f(-x)>f(1)$．

又$\because$　$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，　$\therefore$　$x<0$ 时，$f(x)<0\Longleftrightarrow -x>1\Longleftrightarrow x<-1$．

又$\because$　$g(x)<0$ 且 $f[g(x)]<0$

$\therefore$　$g(x)<-1\Longleftrightarrow \sin^2 x+k\cos x-2k<-1\Longleftrightarrow \dfrac{2-\cos^2 x}{2-\cos x}<k$．

令 $u=\dfrac{2-\cos^2 x}{2-\cos x}$．

$\because$　$0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}$　$\therefore$　$0\leqslant \cos x\leqslant 1$．

令 $t=\cos x$，则 $u=\dfrac{2-t^2}{2-t}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ $\quad\therefore\quad t^2-ut+2u-2=0$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$.

令 $\varphi(t)=t^2-ut+2u-2$，由二次函数的图像知，

方程 $t^2-ut+2u-2=0$ 在 $[0,1]$ 有实根，

则 $\Delta\geqslant 0,\varphi(1)\geqslant 0,\varphi(0)\geqslant 0,0<\dfrac{u}{2}<1$ 或 $\varphi(1)>0,\varphi(0)<0$，或 $0\leqslant\dfrac{u}{2}\leqslant 1,\Delta=0$.

由此解出：$1\leqslant u\leqslant 4-2\sqrt{2}$

$\therefore\quad k>4-2\sqrt{2}$.

例 3 已知对一切 $x\in R$，都有 $f(x)=f(2-x)$，且方程 $f(x)=0$ 有 $2n+1$ 个不同的根. 其中 $n\in N$，$2n+1$ 个根的和为 S_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

【分析】 该题涉及对称问题、中点坐标问题和极限问题，隐含了数形结合的数学思想. 解此题需要一定的抽象思维能力. 该题解题的关键在于由 $f(x)=f(2-x)$ 导出 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称.

解： $\because$ 对一切 $x\in R$ 都有 $f(x)=f(2-x)$， $\therefore\quad f(1+x)=f[2-(1+x)]=f(1-x)$.

$\therefore\quad f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称.

从而 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点也关于直线 $x=1$ 对称.

故可设 $f(x)=0$ 的 $2n+1$ 个根分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,1,x_n',x_{n-1}',\cdots x_2',x_1'$.

其中 x_1 与 x_1'，x_2 与 x_2'，$\cdots$，x_n 与 x_n' 分别关于 $x=1$ 对称，

$\therefore\quad x_1+x_1'=x_2+x_2'=\cdots\cdots=x_n+x_n'=2$.

$\therefore\quad S_n=2n+1$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$.

【精题导练】

1. 选择题

(1)定义在实数集 R 上的偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+1)=-f(x)$，且在 $[-1,0]$ 上单调递增，设 $a=f(3)$，$b=f(\sqrt{2})$，$c=f(2)$，则 a、b、c 的大小关系是(　　).

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

(2)如果奇函数 $y=f(x)$ $(x\neq 0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内时，$f(x)=x-1$，那么使 $f(x-1)<0$ 的 x 的取值范围是(　　).

A. $x<0$　　B. $1<x<2$　　C. $x<0$ 或 $1<x<2$　　D. $x<2$ 且 $x\neq 0$

(3)已知偶函数 $f(x)$ 的定义域是 R，它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$a\in R$，则下列不等式成立的是(　　).

A. $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)>f(a^2-a+1)$　　B. $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)\geqslant f(a^2+a+1)$

C. $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)<f(a^2-a+1)$　　D. $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)\leqslant f(a^2+a+1)$

2. 填空题

(1)设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\log_2 x$，则 $f(2)=$ ________.

(2)已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，且满足 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，则 $f(\log_{\frac{1}{3}}x)>0$ 的解集是________.

3. 解答题

(1)已知函数 $f(x)$满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,且 $f(0)\neq 0$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.求 $f(\pi)$及 $f(2\pi)$的值.

(2)单调函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,定义域为 R,求证:$f(x)$为奇函数;若 $x>0$时,$f(x)<0$,且 $f(1)=-4$,求 $f(x)$在$[-3,3]$上的最值.

第 3 课时　函数的解析式

【考点导航】

函数的解析式是研究函数的工具,函数图像及其性质都可以由函数的解析式来确定.因此,求函数的解析式就成为高考考查的一个热点.高考考查的题型是以选择题和填空题为主,也常有与其相关的解答题.高考考查函数解析式的目的主要是检测考生运用换元、待定系数等数学思想方法解决函数问题的能力.

【例题导析】

例 1　定义在$(-1,1)$内的函数 $f(x)$满足 $2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$,求函数 $f(x)$的解析式.

【分析】　此题的实质就是函数方程的求解,体现了函数方程的数学思想,需要具有一定的抽象思维能力.解此题的关键在于以"$-x$"代换"x",得出关于 $f(x)$和 $f(-x)$的另一个方程.

解: 以"$-x$"代换方程 $2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$中的"x",得 $2f(-x)-f(x)=\lg(-x+1)$.

由题设得　$f(-x)=2f(x)-\lg(x+1)$,

从而有　$f(x)=2f(-x)-\lg(-x+1)=4f(x)-2\lg(x+1)-\lg(-x+1)$,

$\therefore\quad 3f(x)=\lg(1-x)+2\lg(1+x)$,　$\therefore\quad f(x)=\dfrac{[\lg(1-x)+2\lg(1+x)]}{3}$

例 2　图1-1是函数 $y=f(x)$的图像,

(1)写出函数 $y=f(x)$的表达式;

(2)求函数 $f^{-1}(x)$;

(3)求满足条件 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$的函数$g(x)$的表达式.

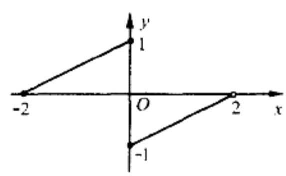


图 1-1

【分析】　根据图像求函数的表达式体现了数形结合的数学思想,在求函数 $f(x)$和 $g(x)$的过程中还将运用待定系数、换元等数学思想方法.此题能帮助学生巩固反函数的概念,进一步熟练反函数的求法.解此题的关键在于分段处理.

解: (1)$\because$　函数 $y=f(x)$的图像是线段,$\therefore$　函数关系式是一次式,可设为 $f(x)=kx+b$,利用待定系数法,可得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+1,(-2\leqslant x<0)\\[2mm]\dfrac{x}{2}-1,(0\leqslant x<2);\end{cases}$$

(2)当 $-2\leqslant x<0$ 时，$y=f(x)=\frac{x}{2}+1\quad(0\leqslant y<1)$，$x=2y-2$.

当 $0\leqslant x<2$ 时，$y=f(x)=\frac{x}{2}-1\quad(-1\leqslant y<0)$，$x=2y+2$.

$\therefore\quad f^{-1}(x)=\begin{cases}2x-2(0\leqslant x<1)\\2x+2(-1\leqslant x<0);\end{cases}$

(3)$\because$ 当 $-2\leqslant\frac{1}{x}<0$ 时，$x\leqslant-\frac{1}{2}$，

当 $0<\frac{1}{x}<2$ 时，$x>\frac{1}{2}$，

$\therefore\quad g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2x}+1 & \left(x\leqslant-\frac{1}{2}\right)\\\frac{1}{2x}-1 & \left(x>\frac{1}{2}\right).\end{cases}$

例3 已知函数 $f(x)$ 为整式，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

【分析】 待定系数法是高考考查的一种重要的数学方法，此题正是这种方法的体现.解此题的关键在于根据题设条件判断 $f(x)$ 为二次函数.

解：$\because$ 函数 $f(x)$ 为整式，$\therefore$ 函数 $f(x+1)$ 与函数 $f(x-1)$ 的次数相同.

又$\because$ $f(x+1)+f(x-1)$ 为 x 的二次式，$\therefore$ $f(x)$ 应是 x 的二次函数.

设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$，

则 $a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-4x$

$\therefore\quad 2ax^2+2bx+2(a+c)=2x^2-4x$

$\therefore\quad \begin{cases}2a=2\\2b=-4\\2(a+c)=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=-1\end{cases}$

$\therefore\quad f(x)=x^2-2x-1.$

【精题导练】

1. 选择题

(1)若 $f(x)$ 是一次函数，且 $2f(1)+3f(2)=3$，$2f(-1)-f(0)=-1$，则 $f(x)$ 等于(　　).

A. $\frac{4x}{9}+\frac{1}{9}$　　B. $36x-9$　　C. $\frac{4x}{9}-\frac{1}{9}$　　D. $9x-36$

(2)已知函数 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则函数 $f(x+1)$ 的表达式为(　　).

A. $(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}$　　B. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$

C. $(x+1)^2+2$　　D. $(x+1)^2+1$

(3)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=4f(x)$，则 $f(x)$ 的解析式为(　　).

A. $4x$　　B. $4(x+1)$　　C. $\log_4x$　　D. 4^x

2. 填空题

(1)已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(0)=0$，且 $f(x+1)=f(x)+x+1$，则 $f(x)=$______.

(2)设函数 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式为________.

3. 解答题

(1)已知函数 $f(x)$的定义域为 R^+,且满足条件 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \lg x+1$,求 $f(x)$的解析式.

(2)已知函数 $f(x)$满足 $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot \cos y$. 求 $f(x)$的表达式.

第 4 课时 函数的图像

【考点导航】

函数图像作为研究函数的一种重要工具,有其独特的魅力.它不仅能使很多复杂的问题简单明了,而且又是数形结合思想的最好体现.因此,它也是高考考查的热点.学习函数图像主要从如下两方面来把握.首先,要把握好如何利用函数的有关性质和一些常见的函数图像来做函数图像;其次,要能利用函数图像研究函数的性质,解决与其相关的数学问题.这正是高考考查函数图像的两个重要方面.

【例题导析】

例 1 做出函数 $y=\left|\lg|x|\right|$ 的图像.

【分析】 做函数图像,特别是某些复杂的函数图像,要注意将函数式化简,分析函数的性质,并据此得出函数图像的某些特征;然后根据对称、平移等变换做出函数图像.此题有利于学生巩固函数作图的各种方法,培养其图形处理能力.

解: 由已知条件可知该函数为偶函数,故其图像关于 y 轴对称.

又∵ $y=\lg|x|$的图像和 $y=-\lg|x|$的图像关于 x 轴对称,

由此得出 $y=\left|\lg|x|\right|$的图像的下述做法:

将 $y=\lg x$ 的图像加上其关于 y 轴对称的图形,得 $y=\lg|x|$的图像,保留 $y=\lg|x|\geqslant 0$ 的部分,加上 $y=\lg|x|<0$ 的部分关于 x 轴对称的图形,即得 $y=\left|\lg|x|\right|$的图像(如图 1-2).

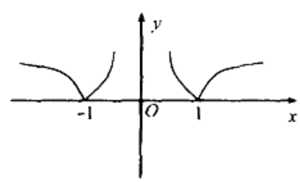


图 1-2

例 2 (1)已知函数 $y=f(x)$的定义域为 R,且当 $x\in R$ 时,$f(m+x)=f(m-x)$恒成立,求证:$y=f(x)$的图像关于直线 $x=m$ 对称.

(2)若函数 $y=\log_2|ax-1|$的图像的对称轴是 $x=2$,求非零实数 a 的值.

【分析】 函数图像对称性的证明及其应用是函数图像应用的一项重要内容,它有利于培养学生的逻辑思维能力和图形处理能力.该题的证明方法具有一般性和代表性,便于掌握,该题证明与求解的关键在于严格按照轴对称图形的定义和曲线与方程的关系进行.

(1)**证明:** 设点 $P(x_0,y_0)$是函数 $y=f(x)$图像上的任意一点,则 $y_0=f(x_0)$;

又设 P 点关于 $x=m$ 的对称点为P',则 P'的坐标为$(2m-x_0,y_0)$.

由已知 $f(m+x)=f(m-x)$ 得

$f(2m-x_0)=f[m+(m-x_0)]=f[m-(m-x_0)]=f(x_0)=y_0$.

$\therefore$ P' 点在 $y=f(x)$ 的图像上. $\therefore$ $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=m$ 对称.

(2)**解**：对定义域内的任意 x，若函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

则有 $f(2+x)=f(2-x)$.

依题意 $y=\log_2|ax-1|$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

从而有 $\log_2|a(2+x)-1|=\log_2|a(2-x)-1|$.

$\therefore$ $|a(2+x)-1|=|a(2-x)-1|$，即 $|-ax+(2a-1)|=|ax+(2a-1)|$.

又 $\because$ $a\neq0$， $\therefore$ $2a-1=0$， $\therefore$ $a=\dfrac{1}{2}$.

例3 (1)给定实数 $a\neq0$，且 $a\neq1$，证明平行于 x 轴的直线与函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ $\left(x\in R，且\ x\neq\dfrac{1}{a}\right)$ 的图像最多只有一个交点.

(2)利用函数图像解不等式 $|\log_a(x+2)|>\log_a(2-x)$ $(0<a<1)$.

【分析】 研究函数图像的某些特点，利用函数图像解决数学问题是一种数学应用能力的表现，也是高考考查的能力目标，该题正好体现了这一考查目标. 该题(1)证明的关键是将问题转化为对于图像上的任意两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，证明 $y_1\neq y_2$. 该题(2)的求解关键是做出 $y=|\log_a(x+2)|$ 和 $y=\log_a(2-x)$ 的图像.

(1)**证明**：设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ 图像上的任意两点，

$$则\ y_1-y_2=\frac{x_1-1}{ax_1-1}-\frac{x_2-1}{ax_2-1}=\frac{(x_1-1)(ax_2-1)-(x_2-1)(ax_1-1)}{(ax_1-1)(ax_2-1)}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(a-1)}{(ax_1-1)(ax_2-1)}.$$

$\because$ $a\neq1$， $\therefore$ 当 $x_1\neq x_2$ 时，$y_1\neq y_2$.

若 $P_1P_2/\!/x$ 轴，则 $x_1\neq x_2$ 时，$y_1=y_2$ 这是不可能的. $\therefore$ 命题成立.

(2)**解**：在同一直角坐标系中做出函数 $y=|\log_a(x+2)|$ 和 $y=\log_a(2-x)$ $(0<a<1)$ 的图像(如图 1－3).

解方程 $-\log_a(x+2)=\log_a(2-x)$，得 $x=\sqrt{3}$.

由图可知，使 $y=\log_a(2-x)$ 的图像在 $y=|\log_a(x+2)|$ 图像下方的 x 为 $-2<x<\sqrt{3}$.

$\therefore$ 原不等式的解为 $-2<x<\sqrt{3}$.

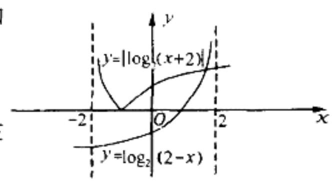


图 1－3

【精题导练】

1. 选择题

(1)设集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant2\}$，给出下列 4 个图形(图 1－4)，其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

(2)函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，把函数 $y=f(x)$ 的图像在直角坐标系内绕原点顺时针转动 90°角得到另一个函数的图像，则这个图像的函数是(　　).

A. $y=f^{-1}(-x)$　B. $y=f^{-1}(x)$　C. $y=-f^{-1}(x)$　D. $y=-f^{-1}(-x)$

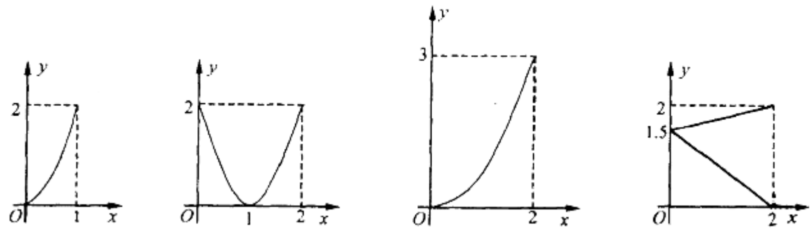


图 1－4

(3)下列函数图像正确的是(　　).

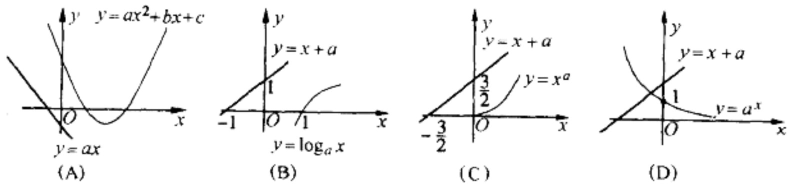


图 1－5

2. 填空题

(1)将函数 $y=f(x)$的图像沿 x 轴向左平移一个单位，再沿 y 轴翻折 180°，得到 $y=\lg x$ 的图像，则 $f(x)$的表达式为__________.

(2)函数 $y=f(x)$与 $y=-f^{-1}(-x)$的图像关于________对称.

3. 解答题

(1)做函数 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2+1}}$的图像.

(2)求证：函数 $y=f(|x-a|)$的图像关于直线 $x=a$ 对称.

第 5 课时　函数的值域和最值

【考点导航】

函数的值域和最值是函数的主要内容，二者之间的关系十分密切. 特别是函数的最值问题，几乎每年高考都有所涉及. 涉及函数最值的内容十分广泛，求函数最值的方法也很多. 但高考考查的是一些常用的方法和技巧，这一点在复习时应很好地把握. 下面的内容正是高考考查函数值域和最值的重点内容.

【例题导析】

例 1　求函数 $y=x+2-\sqrt{4-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$的最值.

【分析】　利用正、余弦函数的最值求函数的最值是高考常考的求最值的方法，该题我们可以通过三角换元的方法将问题转化为求三角函数的最值. 由于换元法也是高考常考的数学方法，因此，此题从内容、形式和方法上都是高考要求的体现. 解此题的关键是换元.

解：令 $x=2\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $y=2\sin\theta-2\cos\theta+2=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+2$.

$\because\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\quad\therefore\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\quad\therefore\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 函数的最大值为 4，最小值为 0.

【说明】 此题还可以通过证明该函数在[0,2]上是增函数，来求最值，并由此可求出其值域.

例 2 求函数 $y=\frac{x+3}{\sqrt{x+2}}$ 的最小值.

【分析】 利用基本不等式求最值，也就是利用“和定积大”和“积定和小”的方法求最值.这是高考考查求最值的常见方法，我们务必掌握.利用此法的关键在于配和为定值或配积为定值，同时要考虑有 x 使等号成立.

解：由函数的定义域可知 $x+2>0$，

$$\therefore\quad y=\frac{x+3}{\sqrt{x+2}}=\frac{(x+2)+1}{\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}}=2,$$

当且仅当 $\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$，即 $x=-1$ 时，等号成立，这时函数的最小值为 2.

例 3 已知 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$，若函数 $f(x)=ax_2-2x+1$ 在[1,3]上的最大值为 $M(a)$，最小值为 $N(a)$，令 $g(a)=M(a)-N(a)$，(1)求 $g(a)$ 的函数表达式；(2)判断函数 $g(a)$ 的单调性，并求出 $g(a)$ 的最小值.

【分析】 闭区间上二次函数的最值与函数在该区间上的单调性有关，解决这类问题的关键是结合二次函数的图像进行直观地分析、比较.此题的关键在于对 a 的讨论，体现了分类讨论的数学思想，能培养学生数形结合的能力和逻辑思维能力.高考也经常以这类题为载体，来考查学生学习数学的能力.

解：(1)①当 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的对称轴与 x 轴交点的横坐标在[2,3]上.

由二次函数图像及单调性可知 $M(a)=f(1)=a-1$，$N(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a}$.

$\therefore\quad g(a)=\frac{a+1}{a-2}$.

②当 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 的对称轴与 x 轴交点的横坐标在[1,2]上，

由二次函数图像和单调性可知 $M(a)=f(3)=9a-5$，$N(a)=f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a}$.

$\therefore\quad g(a)=9a+\frac{1}{a}-6$.

综上所知：$g(a)=\begin{cases}a+\frac{1}{a}-2, & a\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]; \\ 9a+\frac{1}{a}-6, & a\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$

(2)设 $\frac{1}{3}\leqslant a_1<a_2\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{9}\leqslant a_1a_2\leqslant\frac{1}{4}$，从而 $9\geqslant\frac{1}{a_1a_2}\geqslant 4$.

$\therefore\quad g(a_1)-g(a_2)=a_1+\frac{1}{a_1}-a_2-\frac{1}{a_2}=(a_1-a_2)\left(1-\frac{1}{a_1a_2}\right)>0$