样条函数方法

李岳生　齐东旭 著

科学出版社

内容简介

样条（Spline）函数是适应计算机辅助几何设计和数据处理需要的有效数学工具．本书共十一章，其中心内容是讨论曲线拟合问题的样条函数方法．书中强调了样条函数与δ函数的内在联系，提倡采用δ-基函数插值法；提出了保凸拟合和磨光法；对偶次样条函数理论开展了初步研究；还介绍了样条函数方法在微分、积分方程数值解及其它方面的应用．在每章末还附有方法的 ALGOL 程序和算例．

本书的对象是：有关的计算数学与数学工作者、大学生、研究生以及工程技术人员．

样条函数方法

李岳生　齐东旭 著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1979年 6 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1979年 6 月第一次印刷　印张：9 3/4

印数：0001—40,050　　字数：252,000

统一书号：13031・967

本社书号：1368・13—1

定价：1.20 元

序

什么是样条函数？其实，对简单的样条函数，大家并不陌生，只不过以前没有使用这个名称罢了. 用方砖砌圆井，用条石筑拱桥，用多边形丈量土地等等，这是最普通、最常见的事情，谁也不感到惊讶. 然而，正是在劳动人民的这一类生产实践中，孕育着“直”和“曲”对立统一、互相转化的辩证思想. 我国古代数学家，创造性地用内接与外切正多边形逼近圆周，进而求得圆周率的高度精确的近似值. 这一方法，是在函数逼近道路上迈出的光辉的一步. 微积分问世以后，不仅继续采用矩形法、梯形法、还有抛物线法求任意曲边形的近似面积，而且更进一步将折线应用于微分方程和变分法的理论研究和计算. 可以说，这是样条函数和有限元法的先驱.

这样看来，样条函数不过是折线一类的函数，然而，现在因以得名的样条曲线并不是指折线而言，而是放样工人或绘图员借助样条（一种木制或塑料的长条）和压铁绘出的那种曲线. 这种曲线，在数学上是分段三次多项式的典型代表，它具有良好的力学性质. 推而广之，今天把分段多项式，甚至分段解析函数，通称之为样条函数. 由此可见，样条函数是一类来源于实践的最基本、最普通、最常见的函数.

如上所说，样条函数有广泛的应用. 但是人们更自觉地运用这个工具，更深刻地认识它的本质，不过是近三十年特别是近十几年来的事，这是由于生产和科学技术向前发展的推动以及电子计算机广泛应用的需要而引起的. 本世纪四十年代，在研究数据处理的问题中，引出了样条函数，直到五十年代，还多应用于统计数据的处理方面；从六十年代起，在航空、造船、汽车等行业中，开始大量采用样条函数. 时至今日，样条函数的应用越来越广，成效也

越来越显著.

诸如,地质探矿和海洋调查中的趋势分析、气象动力预报的客观分析、航测地形图的绘制、光学仪器的自动设计、火箭技术中的最优弹道选择等等,无不是样条函数的用武之地. 不仅如此,样条函数和有限元法有着密切的联系. 它在函数插值、曲线拟合、数值微商、数值积分、常微分方程、偏微分方程以及积分方程的数值解中,都有重要应用. 它也为矩阵代数提出了一些值得研究的特殊矩阵问题. 所有大学计算数学专业的计算方法,它的大部分内容都可以贯穿样条函数的观点和方法. 如果说函数逼近是计算方法的一个基础,那么,样条函数则是当前函数逼近中的一个最活跃的分支,因此从计算方法的理论研究来看,样条函数也是应予重视的.

在我国,从六十年代末开始,从船体数学放样到飞机外形设计,逐渐出现了一个使用样条函数的热潮,并推广到数据处理的许多问题中. 今后,随着我国四个现代化的加速进行,样条函数在上述各个领域中将更加活跃起来.

本书兼顾实际应用和理论研究两个方面,介绍一些基本的样条函数理论和方法.全书分成十一章,大体由三部分组成. 一至三章是本书的基础部分;四至八章针对几何设计和数据处理问题,介绍了几个基本方法;九至十一章,重点介绍样条函数方法对各类方程求解的应用,还对前几章的理论结果作了进一步的概括和抽象. 读者可以根据不同的需要选读.关心几何设计及数据处理的读者,自然以四至八章为重点;如果对方程的数值解法有兴趣,请注意后三章特别是十一章的内容;对于计算数学专业的师生或想研究样条函数的人,我们认为,在前三章多下点功夫,或许能有所启发.

样条函数是间断性和连续性的对立统一体. 我们把这一看法贯穿于全书的始终. 但是由于引入了 δ 函数,可能使部分初学者望而生畏,认为 δ 函数难以捉摸,进而认为样条函数大概也很难弄懂. 实际上,这种顾虑是不必要的. 我们在第一章为初学者作了必要的准备. 为了阅读本书,与其说需要更多的 δ 函数知识,不如

说需要有敢于突破旧框框的勇气，这种旧框框就是间断函数不能求导数的古典概念．只要具有大学微积分和代数基础知识，就可以阅读此书．

本书主要取材于我们自己的研究成果．它是近几年来，针对实际问题的需要开展样条函数研究的总结．书中强调样条函数与 δ 函数的内在联系；提出了保凸拟合和磨光法；开展了偶次样条函数理论的初步研究；构造和采用了多结点样条函数等．这几点是我们的独立工作．这些工作基本完成于 1973 年上半年，并应用于解决某些几何设计的实际问题，效果良好．

在本书写作中，得到中山大学和吉林大学党组织的支持和关怀．如果没有这些条件，这本书是不可能写出来的．

由于我们缺乏实践经验，理论水平有限，加上时间仓促，书中难免有缺点和错误．恳切希望同志们提出宝贵意见．

作　　者

一九七五年五月二十三日于广州

目　　录

第一章　单位跳跃函数与 δ 函数

引　　言

我们认为,间断性与连续性的对立统一,是贯穿于样条函数之中的一对主要矛盾,而间断性则是矛盾的主要方面. 因此,我们一开始就抓住间断函数进行分析.

反映函数间断性本质特征的是单位跳跃函数,因此,我们又把注意力集中在单位跳跃函数的分析上,包括对它进行差分、微分、积分等运算,并导出单位跳跃函数的变化率即广义导数——δ 函数.

把样条函数和 δ 函数联系起来,是我们的一个基本观点. δ 函数既是灵便的运算工具,又是样条函数的逼近对象. 掌握这章的内容对理解和研究样条函数是有帮助的.

§1. 突变现象——单位跳跃函数

在自然界,存在着许多突变现象. 如水的汽化或结冰,质量或载荷的集中分布,台风或寒潮的突袭,原子弹的爆炸等等. 这种突变使事物的变化过程呈现出阶段性,并且常常出现在量变过程中的一些关节点上. 如果说连续的量变可以用连续函数来描写,那么,突变就要用间断函数来描写.

先看一个简单的例子.

例. 考虑一个无限长的杆. x 轴就取在杆上. 假若杆的总质量为 1,而且质量分布是那样的高度集中,以至于它所占的体积可以忽略不计,那么我们可以认为质量集中在一个数学点上,把这个

点取为 $x=0$。

如果以 $\sigma(x)$ 表示 $(-\infty, x)$ 这一杆段的总质量，则显然 $\sigma(x)$ 是以 $x=0$ 为间断点的函数：

$$\sigma(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0,\\ 1, & \text{当 } x>0.\end{cases} \tag{1.1}$$

在 $x=0$ 处，其左、右极限分别为 0 或1. 至于 $\sigma(0)$ 的取值既可取为 0, 亦可取为 1, 但一种更自然的定义是规定它为左右极限的平均值：

$$\sigma(0)=\frac{1}{2}(\sigma(0_-)+\sigma(0_+))=\frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

单位质量的集中，使杆的质量分布呈现出突变现象，描写这种突变现象的函数 $\sigma(x)$ 称为单位跳跃函数.

这一函数不仅可以描写质量的集中分布，而且也是描写其它种种突变现象，诸如物理学、力学、化学、生物学、乃至社会学领域内的突变现象的有用手段.它在电工学中的应用尤为广泛和普及，并且是运算微积的一个基本工具，习惯上常称之为海威赛 (Heaviside) 函数.

如果杆的总质量为 m, 集中分布于 $x=x_1$ 处，那么显然杆在 $(-\infty, x)$ 上的总质量可以表为：

$$m(x)=m\sigma(x-x_1) \tag{1.3}$$

更一般些，若总质量 m 集中分布于许多点 $x_i(i=1, 2, \cdots, N-1)$ 处，在 x_i 处集中了质量 m_i, 且 $m_1+m_2+\cdots+m_{N-1}=m$, 那么在 $(-\infty, x)$ 上杆的总质量可以表为：

$$m(x)=\sum_{i=1}^{N-1} m_i\sigma(x-x_i), \tag{1.4}$$

这是一个按段为常数的阶梯函数. (1.1),(1.2),(1.3),(1.4)的图形如下页.

其它类似的突变现象，例如，忽略自重、长度为 L 的简支梁于 $x_i(i=1, 2, \cdots, N-1)$ 处作用以大小为 β_i 的集中载荷，描写其剪力的函数 $Q(x)$ 也是按段常数的阶梯函数：

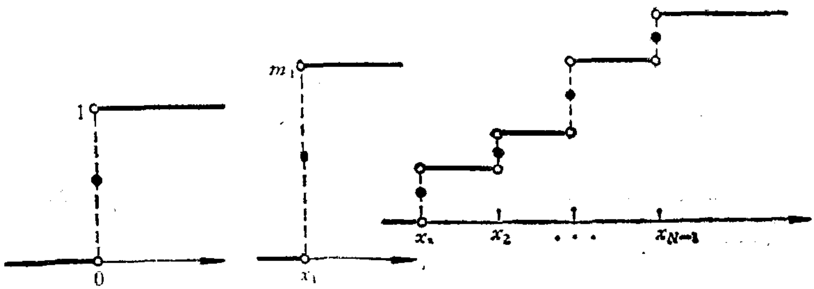

图1.1a　　图1.1b　　图1.1c

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i\sigma(x-x_i)+\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i\left(\frac{x_i}{L}-1\right). \tag{1.5}$$

长度为 L 的悬臂梁于 $x=\dfrac{L}{2}$ 处作用以集中力偶，则任一截面 x 上的弯矩 $M(x)$ 也是一个按段常数的函数：

$$M(x)=1-\sigma\left(x-\frac{L}{2}\right) \tag{1.6}$$

等等.

实际上，对任一分段连续的函数 $f(x)$，设 x_i 为其间断点，并假定在间断点处 $f(x)$ 的左右极限都存在，记其左右极限之差，即跳跃量为

$$[f(x_i)]\equiv f(x_i+0)-f(x_i-0). \tag{1.7}$$

令 $S(x)=\sum\limits_i[f(x_i)]\sigma(x-x_i)$. 这时从 $f(x)$ 减去 $S(x)$ 得一连续函数 $g(x)=f(x)-S(x)$，从而

$$f(x)=g(x)+S(x) \tag{1.8}$$

为一连续函数 $g(x)$ 与一阶梯函数 $S(x)$ 之和，而 $S(x)$ 又由单位跳跃函数组合而成. 直观地看，可由下面图形一目了然：

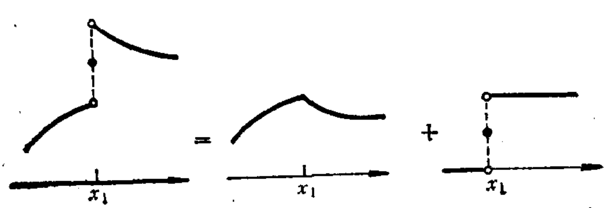

图 1.2

以上分析表明，研究任何分段连续且有左、右极限的函数，都归结为单位跳跃函数的平移和迭加。因此，我们只要集中分析后者就够了。

§2. 单位跳跃函数的形式导数 $\delta(x)$

既然 $\sigma(x)$ 是描写突变现象的最基本的函数，那么自然应该研究它的变化率即 $\sigma(x)$ 的导数。我们知道，在古典意义下，$\sigma(x)$ 在 $x=0$ 处的导数不存在。但是，导数是差商的极限，因而就从研究 $\sigma(x)$ 的差商入手。

规定 $\bar{\Delta}_h$ 表示以 h 为步长的对称差分算子：

$$\bar{\Delta}_h f(x) \equiv f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right). \tag{2.1}$$

$\bar{\Delta}_1$ 简记为 $\bar{\Delta}$。通常在表示对称差分算子时习惯用 δ，为了避免与 δ 函数混淆，我们采用了上面的记法。在(2.1)的规定之下，显然

$$\bar{\Delta}\sigma(x)=\sigma\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sigma\left(x-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}0, & 当|x|>\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & 当|x|=\frac{1}{2},\\ 1, & 当|x|<\frac{1}{2}\end{cases} \tag{2.2}$$

及

$$\delta_h(x) \equiv \frac{\bar{\Delta}_h}{h}\sigma(x)=\begin{cases}0, & 当|x|>\frac{h}{2},\\ \frac{1}{2h}, & 当|x|=\frac{h}{2},\\ \frac{1}{h}, & 当|x|<\frac{h}{2}.\end{cases} \tag{2.3}$$

(2.2) 与 (2.3) 的图形如图 1.3 所示。

在(2.3)式中，令 $h\to 0$，便在形式上得到 $\sigma(x)$的导数，并记为 $\delta(x)$，即

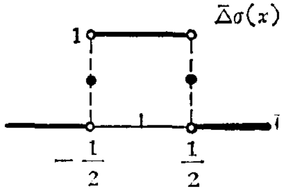

图 1.3a

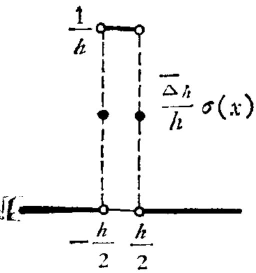

图 1.3b

$$\delta_h(x) \to \delta(x) = \sigma'(x) = \begin{cases} 0, & 当\ x \neq 0, \\ \infty, & 当\ x = 0, \end{cases} (h \to 0). \qquad (2.4)$$

当然，这种导数并不是通常的导数. 考虑到微分与积分互为逆运算，可以对(2.4)中的 $\delta(x)$ 进行积分得

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x) dx. \qquad (2.5)$$

自然，(2.5) 的右端也不是通常（黎曼意义下）的积分，但只要我们联系 §1 中的例，便可看出 (2.5) 中的积分恰好也就是杆段 $(-\infty, x)$ 的质量，所以它是有明显物理意义的.

事实上，从数学分析的观点看，我们可以把 (2.5) 的右端理解为下述极限形式(或与其等价的一切极限形式)的缩写：

$$\sigma(x) = \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{x} \delta_h(x) dx.$$

如前所述，在古典意义下 $\sigma'(x)$ 在 $x = 0$ 处没有意义，因而 (2.4) 只是一种形式导数. 不过，这一形式导数 $\delta(x)$ 反映了单位集中质量的分布密度，而在物理学中“密度”的概念具有基本重要性，因此突破间断函数不能求导数的旧框框，引进 δ 函数，就有着十分重要的意义.

δ 函数是首先由狄拉克 (Dirac) 在量子力学的研究中引进的. 在物理学中早已成为灵便的运算工具；在数学上也已建立了相应的广义函数论或分布理论. 下面，我们要把 δ 函数作为研究样条函数的一个工具.

由(2.5)特别又可以推得

$$\int_a^b \delta(x)dx = \sigma(b) - \sigma(a) = 1, \quad a < 0 < b. \tag{2.6}$$

若函数 $f(x)$ 于 $x = x_0$ 处连续，则由(2.4)进一步可推得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(x_0 + t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)f(x_0 + t)dt = f(x_0).$$

同理

$$\int_a^b \delta(x_0 - t)f(t)dt = f(x_0), \quad a < x_0 < b.$$

我们还要用到 $\sigma(x)$ 的二阶以至高阶的广义导数，它们直观上仍可以想像为相应的差商的极限．例如 $\sigma(x)$ 的二阶差商为

$$\left(\frac{\bar{\Delta}_h}{h}\right)^2 \sigma(x) = \frac{1}{h^2}(\sigma(x+h) - 2\sigma(x) + \sigma(x-h))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| > h, \\ \pm\dfrac{1}{2h^2}, & \text{当 } x = \mp h, \\ \dfrac{1}{h^2}, & \text{当 } -h < x < 0, \\ -\dfrac{1}{h^2}, & \text{当 } 0 < x < h, \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

在图 1.4 中画出了它的图形.

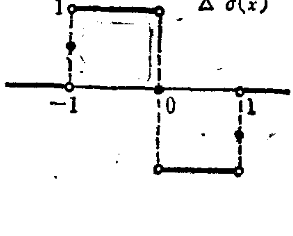

图 1.4a

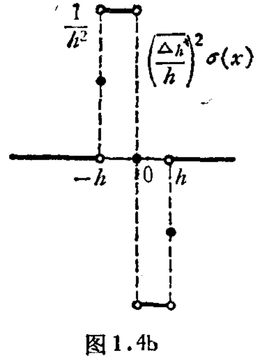

图 1.4b

当 $h \to 0$ 时,(2.7)式的极限就可以认为是 $\sigma''(x)$,即 $\delta'(x)$.

§ 3. 分部积分法与广义函数 $\delta(x)$

注意 $\delta(x)$ 的性质(2.4),(2.6)在古典微积分的框框里是彼此矛盾的.因为仅在一点不为零的函数在古典意义下的积分总应该是零;但联系其物理背景来理解,$\delta(x)$ 的性质所反映的正是 $\delta_h(x)$ 的共性,因此是非常自然的.

现在,借助分部积分法,可以确切地把 $\delta(x)$ 叫做单位跳跃函数 $\sigma(x)$ 的广义导数.分部积分公式是大家熟知的:

$$\int_a^b fg'dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b gf'dx. \tag{3.1}$$

利用 (3.1) 可以推广函数 $g(x)$ 的导数概念.因为即使 $g(x)$ 在古典意义下的导数不存在,但对足够光滑的函数 $f(x)$ (例如对一切无穷次连续可微的函数 $f(x)$),(3.1) 的右端是有意义的,这样我们便可借助(3.1)的右端去定义 (3.1) 的左端积分,并说 $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的广义导数.

例如对 $g(x) = \sigma(x)$,由(3.1)有

$$\begin{aligned}\int_a^b f\sigma'(x)dx &= f\sigma\Big|_a^b - \int_a^b \sigma f'(x)dx \\ &= f(b)\sigma(b) - \int_0^b f'(x)dx = f(b) - (f(b) - f(0)) \\ &= f(0), \quad 对\ a < 0 < b.\end{aligned}$$

因此,我们可以把$\sigma(x)$的广义导数 $\delta(x)$ 定义为使下列积分式

$$\int_a^b \delta(x)f(x)dx = f(0), \quad a < 0 < b \tag{3.2}$$

恒成立的函数.

下面我们将要反复用到等式 (3.2).

对广义函数 $\delta(x)$ 还可以再求导数,$\delta(x)$的导数 $\delta'(x)$ 也是一个广义函数,其定义也由分部积分法引入:

$$\int_a^b \delta'(x)f(x)dx = -\int_a^b \delta(x)f'(x)dx = -f'(0),$$

$$(a < 0 < b).$$

一般说来，$\delta^{(m)}(x)$ 定义为

$$\int_a^b \delta^{(m)}(x) f(x) dx = (-1)^m \int_a^b \delta(x) f^{(m)}(x) dx = (-1)^m f^{(m)}(0),$$
$$a < 0 < b. \tag{3.3}$$

对于(3.3)式来说，自然假定 $f^{(m)}(x)$ 于 $x=0$ 处连续，否则(3.3)式右端没有意义.

定理 1. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的阶梯函数，其间断点为 $\{x_i\}_{i=1}^n$，且

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

又设 $g(x)$ 为 $[a, b]$ 上的任一连续函数，它的导数 $g'(x)$ 可积，则

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = fg \Big|_a^b - \sum_{i=1}^n [f(x_i)] g(x_i), \tag{3.4}$$

其中 $[f(x_i)] = f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$ 为 $f(x)$ 在 x_i 点的跳跃量.

证明. 因为在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 可表为单位跳跃函数的线性组合:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n [f(x_i)] \sigma(x - x_i) + f(x_0 + 0).$$

对 $f(x)$ 求广义导数，注意到 $\sigma'(x - x_i) = \delta(x - x_i)$，则有

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n [f(x_i)] \delta(x - x_i),$$

因此，由分部积分法得

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx$$
$$= fg \Big|_a^b - \sum_{i=1}^n [f(x_i)] \int_a^b g(x) \delta(x - x_i) dx$$
$$= fg \Big|_a^b - \sum_{i=1}^n [f(x_i)] g(x_i).$$

定理证完.

事实上(3.4)的左端积分也可以分段直接积分出来:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g'(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i+0)(g(x_{i+1})-g(x_i)). \tag{3.5}$$

将(3.4)与(3.5)两端比较一下，就发现定理 1 不过是分部求和公式的积分形式而已．但我们以后将看到定理 1 的反复运用刚好是对样条函数的乘积进行积分的一个基本技巧．

下面我们研究 $\delta(x)$ 的积分．为此先引进"截断单项式"的记号：

对任一正整数 k，定义

$$x_+^k = \begin{cases} x^k, & 当\ x \geqslant 0, \\ 0, & 当\ x < 0. \end{cases}$$

当 $k=0$ 时，定义

$$x_+^0 = \sigma(x) = \begin{cases} 0, & 当\ x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 当\ x = 0, \\ 1, & 当\ x > 0. \end{cases}$$

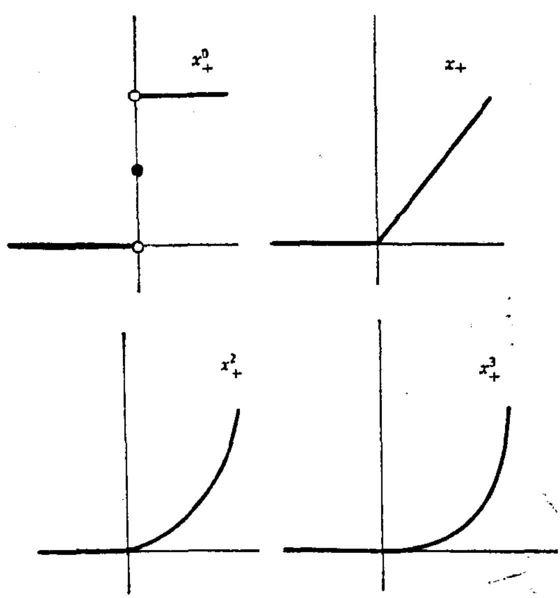

图 1.5