运筹学

常用算法手册

〔德〕H.A.艾赛特 H.冯·弗拉杰 编

关世义 朱松春 常伯浚 黄树山 译

国防工业出版社

运筹学常用算法手册

〔德〕 H. A. 艾赛特
H. 冯·弗拉杰 编

关世义 朱松春
常伯浚 黄树山 译

国防工业出版社

内容简介

在科研、生产和军事等领域中，运筹学均能提供一个解决问题的方法，并使人们获得更大的经济效益。

本手册以统一的格式对一些最重要、最常用的运筹学算法进行了收集和说明，内容简明易懂并附有算例，本书可作为一部案头参考书。

全书包括线性规划、整数规划、图论、计划网络、对策论、动态规划、排队模型、非线性规划、随机数的产生、替代模型、库存模型、序列模型、厂址模型等，内容十分广泛。因此，适于从事企业管理、工农业生产、工程技术、商业和军事工作的管理与技术人员使用参考；也适于大专院校有关专业师生学习使用。

OPERATIONS RESEARCH HANDBOOK
STANDARD ALGORITHMS AND METHODS
Horst A. Eiselt Helmut von Frajer
Walter de Gruyter & Co. 1977

*

运筹学常用算法手册

H. A. 艾赛特
H. 冯 弗拉杰 编
…进义
…浚

版
…书店经售

…4 284千字
1984… 印数：00,001—20.500册
…：1.70元

译　序

近年来，运筹学方法在我国国民经济和科学研究的许多部门和领域中受到日益广泛的重视。在“四化”建设中，如何进一步提高经济效益，也就是说，如何合理地使用我们有限的资金，做到少花钱，多办事；如何在一定的人力、物力、财力条件下，达到最好的经济效益（例如建设速度最快，产品的质量最好，产量最高，企业的利润最大等等），这些是各行各业都十分关心的问题。为此，必须采用运筹学的理论和方法，对所研究的问题（经济计划，工程设计，运输调度，企业管理，作战方案等等）进行必要的调查研究，建立适当的数学模型并进行可行性研究，以便充分占有资料，从许多方案的对比中选取最好的方案。只有这样，我们才能对所从事的工作做到心中有数。因此，提供一套常用而且有效的算法，对于运筹学的推广应用是十分必要的。这就是我们翻译此书的目的。

正如编者在本书的前言中所指出的，这是一本案头参考书。它力求通过简单易懂的形式，对实际应用中经常遇到的问题，提供一整套运筹学的解算方法（包括求解步骤），并在每一个算法后面附有计算实例。应当指出，许多计算是需要借助于快速电子数字计算机来完成的，但也有不少问题可以用简单的台式计算机进行计算。

参加本书翻译的有：常伯浚（一、二、八章）、黄树山（三、九、十、十一章）、朱松春（四、五章）、关世义（其余部分）同志。并由常伯浚、关世义负责校对。这里，还要感谢孟国壁、王济成两位同志所给予的热情帮助。

由于运筹学的内容十分丰富，它涉及广泛的理论问题和实际问题；加之我们水平有限、经验不多，难免存在缺点错误，敬请读者批评指正。

前 言

作者编写这本手册的意图不仅是为了学习经济学、社会科学和数学的学生，而且还为了从事优化问题和工程控制等工作的专家。

对于求解这些问题的一些最重要最常用的算法，本书以统一、易懂的形式进行了收集和说明。为此目的，每一节作如下划分：

a）假设　将问题用数学公式表出，并对必要条件作了说明；

b）原理　给出主要概念；

c）说明　用标准格式对本节算法或方法的每一步作了解释；

d）算例　在每一节中，均给出一个完整算例。所举算例尽量作到能表明该算法或方法的特点。

本书读者应已熟知微分、积分和统计学等基本概念。在本书的开头给出了将要用到的线性代数方面的基础知识。

由于本书是一部案头参考书，故删去了相应的理论和必要的证明。这部分内容可从一般运筹学教科书中找到。对于各章中直接引用材料的详尽论述，读者可从技术文献中去了解。

为此，在参考书目中我们选集了标准文献和一些新的研究成果。

下面方块图中的实箭头表示本书各章之间的相互关系，以及为充分理解每一章的内容，应具备的起码数学知识。虚箭头表示各章内容之间的其他一些关系，本书对这些关系未作进一步的探讨。

本方块图的用意，并不是想从理论或实践上严格说明运筹学的整个领域，而只是说明运筹学各个领域间的一般关系。

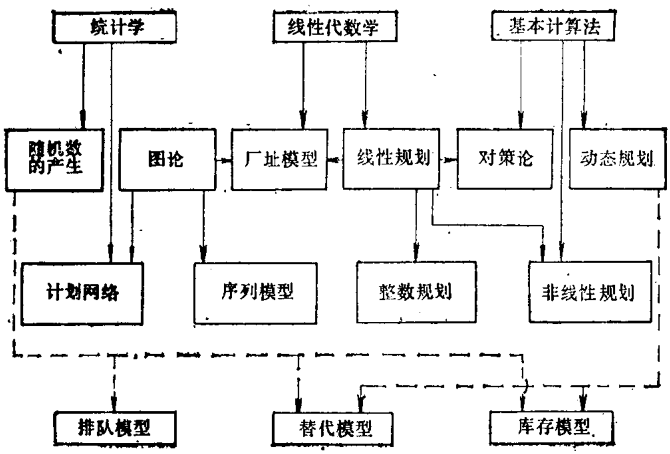
作者非常感谢哥廷根大学教授 H. Noltemeier 博士，在编写本书时，他给作者许多有益的建议。同时也应感谢在本学期花了许多时间帮助翻译原稿的 Lee Dewald 先生和为翻译和打清样付出

辛勤劳动的 Schillings 夫人。最后应特别感谢在出版方面给予协助的 Walter de Gruyter 公司。

1977年春于哥廷根

Horst A. Eiselt

Helmut von Frajer



目 录

定义与符号

A	同 $A_{[m\times n]}$，为 $[m\times n]$ 维矩阵
I	单位矩阵
θ	零矩阵
A^T	矩阵 A 的转置矩阵
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$\mathbf{R}^n$	n 维实欧几里得空间
$\exists$	存在一个
$\forall$	对于所有的
$\varnothing$	空集
$[a]$	小于 a 的最大整数
$\langle a\rangle$	大于 a 的最小整数
$\lvert a\rvert$	a 的绝对值
$\Rightarrow$	导致
$\Leftrightarrow\equiv$iff	等价关系（并且仅当）
$a:=a+b$	赋值
$a\vee b$	a 或 b（或）
$a\wedge b$	a 与 b（与）
$\lvert M\rvert=\lvert\{m_i\}\rvert$	M 中元素的个数
$M_1\cup M_2$	集合 M_1 和 M_2 之并
$M_1\cap M_2$	集合 M_1 和 M_2 之交

若无其它说明，问题 P 的定义为

$$\left.\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\right\}\pi=f(\boldsymbol{x});\quad A\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b};\quad \boldsymbol{x}\geq\theta$$

式中 $A=A_{[m\times n]}$； $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{[n\times 1]}$；

$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_{[m\times 1]}$

$x\in[a;\ b]$ x 属于闭区间，即 $a\leqslant x\leqslant b$，其中 $b\geq a$

$x \in (a; b]$ x 属于半闭区间，即 $a < x \leqslant b$，其中 $b > a$

$x \in [a; b)$ x 属于半闭区间，即 $a \leqslant x < b$，其中 $b > a$

$x \in (a; b)$ x 属于开区间，即 $a < x < b$，其中 $b > a$

$\sum\limits_{j, x_j = \mathrm{bv}} a_j$ 所有元素 a_j 的和，对于下标 j 而言，x_j 是一基本变量

$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$ $f(\boldsymbol{x})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的偏导数

$\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x})$ $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度＝函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的一阶偏导数向量＝$f(\boldsymbol{x})$ 对向量 $\boldsymbol{x}$ 的全导数

k-min 集合的第 k 个最小元素，当 $k = 1, 2, \cdots,$

rk (A) 矩阵 A 的秩

bv 基本变量

nbv 非基本变量

inf 下确界

sup 上确界

q. u. 数量单位（如每个；一打；加仑等）

m. u. 货币单位（如美元；美分等）

d. u. 距离单位（如英里；公里；英寸；英尺等）

t. u. 时间单位（如小时；分；秒等）

一个向量 $\boldsymbol{a} := (a_1; \cdots; a_j; \cdots; a_n)$“字典式”是正的（用符号 $\boldsymbol{a} \succ \mathbf{0}$ 表示）$\Leftrightarrow$（等价于）$(a_k > 0 \mid k = \min\{j \mid a_j \neq 0\})$

一个向量 $\boldsymbol{a}^{(r)}$ 是向量组 $\boldsymbol{a}^{(i)}$“字典式”的最大值（用符号 $\boldsymbol{a}^{(r)} = \mathrm{Lex}\max\limits_i \{\boldsymbol{a}^{(i)}\}$ 表示）$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}^{(r)} \succ \boldsymbol{a}^{(i)}\ \forall i \neq r$（对于“字典式”较小和“字典式”最小的定义与上述表示方法类似）

一个向量 $\boldsymbol{a}$“字典式”大于向量 $\boldsymbol{b}$（用符号 $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ 表示）$\Leftrightarrow (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \succ \mathbf{0}$

0.（引言） 矩阵代数和有关知识（摘要）

0.1 定义

定义 1 一个向量，其所有元素排成一行，称为行向量，记为 $\boldsymbol{a}:=(a_j):=(a_1, \cdots, a_n)$。相应地，可以定义一个列向量，并记为

$$\boldsymbol{a}:=(a_i):=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}。$$

定义 2 一个 n 维向量 $e^{(i)}:=(e_j)$，若

$$e_j:=\begin{cases} 1, & \text{当 } j=i; \\ 0 \ \forall\ j=1, \cdots, n; & j\neq i, \end{cases}$$

则称为第 i 维单位向量。

定义 3 若 $e_j=1\ \forall\ j=1, \cdots, n$。则 n 维向量 $\boldsymbol{e}:=(e_j)$ 称为求和向量。

定义 4 $m\times n$ 维矩阵 A 是 $m\ n$ 个元素的有序集合。可以把该矩阵表示为 m 维列向量，其元素为 n 维行向量；或者表示为 n 维行向量，其元素为 m 维列向量，即

$$A:=(a_{ij}):=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}。$$

定义 5 设 A^T 表示 A 的转置矩阵，于是，$A^T:=(a_{ij})^T:=(a_{ji})$，即行与列的下标互换。列向量的转置是行向量；反之，行向量的转置是列向量。

定义 6 一个（$m\times n$）维矩阵 A，若 $m=n$，则称为方阵。

定义 7 一个方阵 A，若

$$a_{ii}=1\ \forall\ i;\ a_{ij}=0\ \forall\ i\neq j,$$

则称为单位矩阵。

定义 8 一个方阵A，若

$$a_{ii}=\varepsilon_i \forall\ i\ ;\ \varepsilon_i \in \mathbb{R};\ a_{ij}=0\ \forall\ i\neq j,$$

则称为对角矩阵。

定义 9 一个方阵A，若

$$a_{ij}\in \mathbb{R} \forall\ i\geqslant j\ ;\ a_{ij}=0\ \forall\ i<j,$$

则称为三角矩阵。

定义10 一个（$m\times n$）维矩阵A，若

$$a_{ij}=0\ \forall\ i,\ \ j,$$

则称为零矩阵。

0.2 基本运算

0.2.1 向量的加法

若 $$c_i:=a_i+b_i\quad \forall\ i,$$

则称向量$\boldsymbol{c}$为两个同维向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之和。

0.2.2 向量的减法

若 $$c_i:=a_i-b_i\quad \forall\ i,$$

则称向量$\boldsymbol{c}$为两个同维向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之差。

0.2.3 向量和标量的乘积

设$\varepsilon\in \mathbb{R}$为一标量、$\boldsymbol{a}$为一$n$维向量。若

$$c_i:=\varepsilon a_i\quad \forall\ i=1,\ \cdots,\ n,$$

则$\boldsymbol{c}:=\varepsilon\boldsymbol{a}$为一个$n$维向量。

0.2.4 向量的内积

n维行向量$\boldsymbol{a}^T$和n维列向量$\boldsymbol{b}$的内积$\varepsilon\in \mathbb{R}$定义为

$$\varepsilon:=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i。$$

0.2.5 并向量之积

一个m维列向量$\boldsymbol{a}$和一个n维行向量$\boldsymbol{b}$的并向量之积定义为$(m\times n)$维矩阵C，即

$$C:=(c_{ij}):=(a_i b_j)\ \forall\ i,\ j。$$

0.2.6 矩阵的加法

两个同维矩阵A和B之和C定义为

$$C:=(c_{ij}):=(a_{ij}+b_{ij})\ \forall\ i,\ j。$$

0.2.7 矩阵的减法

两个同维矩阵A和B之差C定义为

$$C:=(c_{ij}):=(a_{ij}-b_{ij})\ \forall\ i,\ j。$$

0.2.8 标量与矩阵的乘法

设$\varepsilon\in\mathrm{R}$为一标量、A为矩阵。于是，

当$C:=(c_{ij}):=(\varepsilon a_{ij})\ \forall\ i,\ j$时，$C:=\varepsilon A$。

0.2.9 行向量与矩阵的乘法

若

$$\mathbf{c}:=(c_i):=\left(\sum_{j=1}^{n} b_j a_{ji}\right)\forall\ i=1,\ \cdots,\ m,$$

则m维行向量$\mathbf{c}$是n维行向量$\boldsymbol{b}$与$(n\times m)$维矩阵A之乘积。

0.2.10 矩阵与列向量的乘法

若

$$\mathbf{c}:=(c_i):=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j\right)\forall\ i=1,\ \cdots,\ m,$$

则m维列向量$\mathbf{c}$是$(m\times n)$维矩阵A和n维向量$\boldsymbol{b}$之乘积。