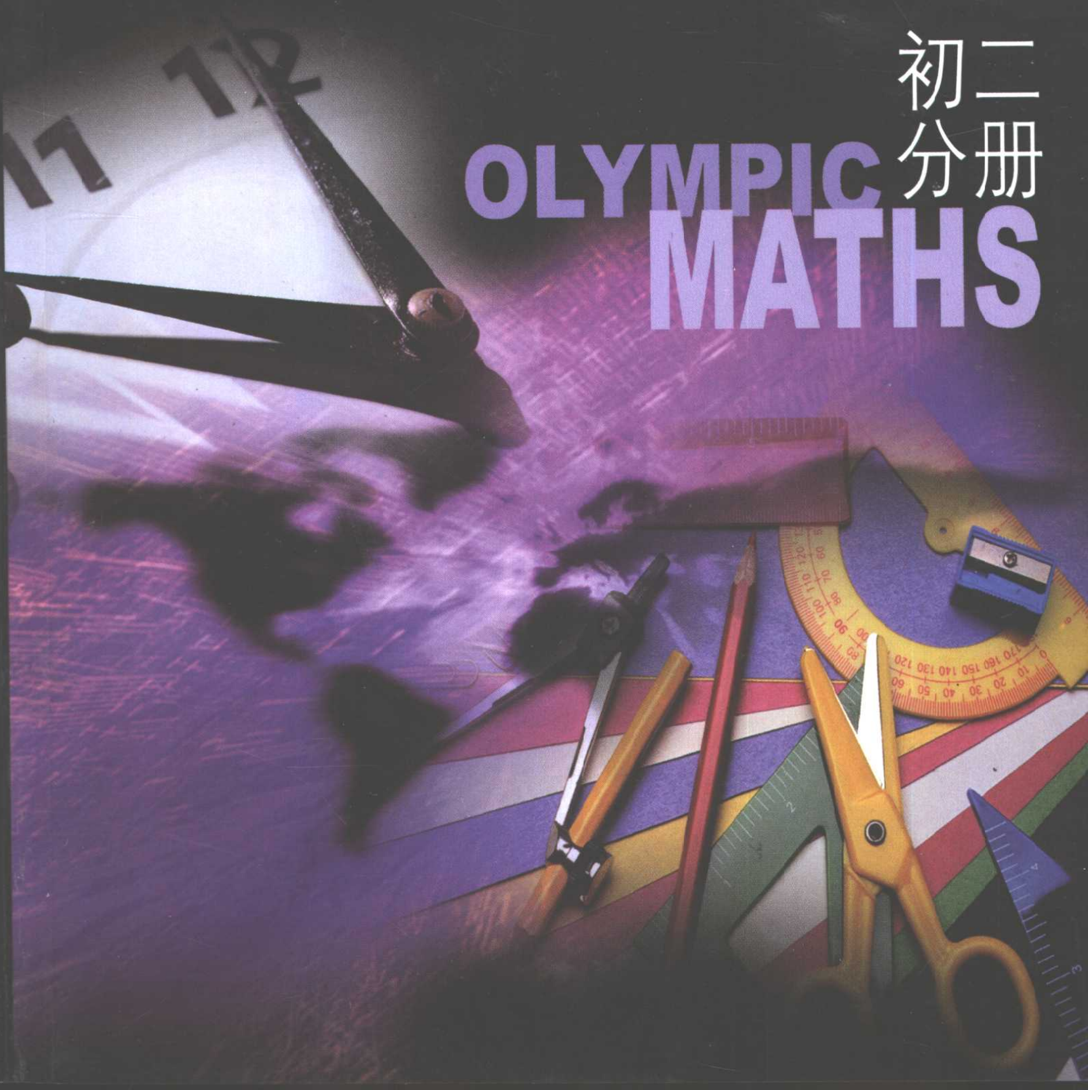
奥林匹克数学

钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

初二分册

OLYMPIC MATHS



金 牌 教 练 教 你 学

奥林匹克数学

初二分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学.初二分册/钱展望,朱华伟主编.—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3141-7

Ⅰ.奥… Ⅱ.①钱…②朱… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011180 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32 7.75 印张
版 次:2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月第 1 次印刷
字 数:188 千字 印数:1-10 000

ISBN 7-5351-3141-7/G·2547 定价:10.00 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛（1894年）。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月

钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国"五一"劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。

朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。

ISBN 7-5351-3141-7

9 787535 131416 >

定 价：10.00 元

目 录

第一讲　因式分解(一)

——三种基本方法

知识点和方法述要

1.因式分解是把一个多项式化为几个整式的积的形式的一种运算.它和整式乘法同为恒等变形,是乘法运算的逆运算.

因式分解的最终结果是惟一的,不仅必须是几个整式的乘积,还须分解到每个因式在有理数范围内不能再分解为止.两种仅仅因途径不同而导致数字差异的分解结果应被认为是一样的,如 $4x^2-1$ 可被分解为 $(2x-1)(2x+1)$,也可分解为 $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$.

2.提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法是因式分解的四种基本方法.本讲主要分析前面三种方法.

(1)一般地,分解因式的第一步是考虑可否直接提取公因式或经适当变形后提取公因式.若存在公因式则先施行提取公因式法提取公因式.显然这样做有利于进一步的因式分解.

提公因式法分解因式的关键在于正确找出公因式.公因式可以是单项式也可以是多项式.当某一项被作为公因式而整体提取后,不能漏写"1"而造成缺项.

(2)因式分解常用公式

(ⅰ) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

(ⅱ) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

(ⅲ) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

(ⅳ) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(ⅴ) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$;

(ⅵ) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$;

(ⅶ)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$ 为正整数);

(ⅷ)$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$ 为奇数).

(3)(ⅰ)分组分解法是在多项式既无公因式,又不能运用公式分解时,通过分组,为下一步提取公因式,运用公式或采用其他方法分解做好准备的一种方法.

(ⅱ)在多项式乘法运算时,通过整理、化简,常将同类项合并为一项,或将两个仅符号相反的同类项相互抵消为零.作为多项式乘法的逆运算,在对某些多项式分解因式时,则需要把多项式中的某些项恢复为那些被合并或相互抵消的项,即把某一项拆成两项或多项,或在多项式中添上仅符号相反的项.通过这种拆项、添项为进一步施行分组分解法创造条件.

例 题 精 讲

例1 分解因式:

(1) $x^6(x+y-z)^{2n+1}+y^6(z-y-x)^{2n+1}$;

(2) $-2x^{5n-1}y^n+4x^{3n-1}y^{n+2}-2x^{n-1}y^{n+4}$.

解 (1)原式 $=x^6(x+y-z)^{2n+1}-y^6(x+y-z)^{2n+1}$

$=(x+y-z)^{2n+1}(x^6-y^6)$

$=(x+y-z)^{2n+1}(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y-z)^{2n+1}(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

(2)原式 $=-2x^{n-1}y^n(x^{4n}-2x^{2n}y^2+y^4)$

$=-2x^{n-1}y^n(x^{2n}-y^2)^2$

$=-2x^{n-1}y^n(x^n+y)^2(x^n-y)^2$.

例2 分解因式:$(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$.

解 原式 $=[(c^2-b^2+d^2-a^2)+2(ab-cd)][(c^2-b^2+d^2-$

$a^2)-2(ab-cd)]$

$=[(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2+2ab+b^2)]$

$=[(c-d)^2-(a-b)^2][(c+d)^2-(a+b)^2]$

$=(c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b).$

例 3 分解因式：$1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$.

解 原式 $=1-3\cdot 4x^2y^2+3\cdot(4x^2y^2)^2-(4x^2y^2)^3$

$=(1-4x^2y^2)^3$

$=(1+2xy)^3(1-2xy)^3$.

注 注意观察、分析多项式中各项的字母及其指数、系数、符号的特征是进行因式分解的前提.

例 4 分解因式：$x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x+1$.

解一 原式 $=(x^{15}+x^{14})+(x^{13}+x^{12})+\cdots+(x+1)$

$=x^{14}(x+1)+x^{12}(x+1)+\cdots+(x+1)$

$=(x+1)(x^{14}+x^{12}+\cdots+1)$

$=(x+1)[(x^{14}+x^{12})+(x^{10}+x^8)+\cdots+(x^2+1)]$

$=(x+1)[x^{12}(x^2+1)+x^8(x^2+1)+x^4(x^2+1)+(x^2+1)]$

$=(x+1)(x^2+1)(x^{12}+x^8+x^4+1)$

$=(x+1)(x^2+1)[x^8(x^4+1)+(x^4+1)]$

$=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$.

解二 因

$x^{16}-1=(x-1)(x^{15}+x^{14}+\cdots+x+1)$, ①

$x^{16}-1=(x^8-1)(x^8+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$, ②

比较①,②即知

原式 $=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$.

注 例 4 解二不仅提供了一种巧妙的解答，而且表明因式分解常可采取不同途径，但最终结果应该是惟一的．一旦出现不同结果，一定存在某种结果不是问题的最终答案．

例 5 分解因式：a^3+3a^2+3a+2.

解一 原式
$$\begin{aligned}&=(a^3+3a^2+3a+1)+1\\&=(a+1)^3+1\\&=(a+2)[(a+1)^2-(a+1)+1]\\&=(a+2)(a^2+a+1).\end{aligned}$$

解二 原式
$$\begin{aligned}&=(a^3+2a^2)+(a^2+2a)+(a+2)\\&=(a+2)a^2+(a+2)a+(a+2)\\&=(a+2)(a^2+a+1).\end{aligned}$$

解三 原式
$$\begin{aligned}&=(a^3+a^2+a)+(2a^2+2a+2)\\&=a(a^2+a+1)+2(a^2+a+1)\\&=(a+2)(a^2+a+1).\end{aligned}$$

解四 原式
$$\begin{aligned}&=(a^3-1)+(3a^2+3a+3)\\&=(a-1)(a^2+a+1)+3(a^2+a+1)\\&=(a^2+a+1)(a+2).\end{aligned}$$

例 6 分解因式：x^5+x+1.

解 原式
$$\begin{aligned}&=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)\\&=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)\\&=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\\&=(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]\\&=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).\end{aligned}$$

例 7 分解因式：$x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$.

解 原式
$$\begin{aligned}&=x^3(a+1)-xy(x-y)[(a+1)-(b+1)]+y^3(b+1)\\&=x(a+1)[x^2-y(x-y)]+y(b+1)[y^2+x(x-y)]\\&=x(a+1)(x^2-xy+y^2)+y(b+1)(y^2+x^2-xy)\\&=(x^2-xy+y^2)(xa+yb+x+y).\end{aligned}$$

例 8 分解因式：$m^4+m^2-2mn-n^2+1$.

解 原式 $=(m^4+2m^2+1)-(m^2+2mn+n^2)$

$$=(m^2+1)^2-(m+n)^2$$

$$=[(m^2+1)+(m+n)][(m^2+1)-(m+n)]$$

$$=(m^2+m+n+1)(m^2-m-n+1).$$

注 通过添、拆项构成一个完全平方式的方法称作配方法.通过配方,形成平方差,再运用平方差公式进行因式分解的方式常被采用.

例9 $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$.

解 原式 $=(ab+cd)[(a^2-d^2)-(b^2-c^2)]+(ac+bd)[(a^2-d^2)+(b^2-c^2)]$

$$=(ab+cd+ac+bd)(a^2-d^2)-(ab+cd-ac-bd)(b^2-c^2)$$

$$=(a-d)(a+d)(a+d)(b+c)-(b-c)(b+c)(b-c)(a-d)$$

$$=(a-d)(b+c)[(a+d)^2-(b-c)^2]$$

$$=(a-d)(b+c)(a+b-c+d)(a-b+c+d).$$

练 习 一

1.分解因式:

(1) $64x^6-y^6$;

(2) $\frac{1}{8}m^6-\frac{1}{729}m^3n^3$;

(3) $a^4x^2+8a^3x^3+16a^2x^4$;

(4) $a^{n-3}+a^n$;

(5) $16ax^2y^2-4a(x^2+y^2)^2$.

2.分解因式:

(1) $4x^2-4y^2+4x+1$;

(2) $x^2-xy+2yz-4z^2$;

(3) $5a^2mnp^2-5a^2m^3n+10a^2m^2n^2-5a^2mn^3$.

3.分解因式:

(1) x^4-7x^2+1;

(2) $4x^4+1$;

(3) a^3+6a-7.

4. 分解因式:

(1) $(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$;

(2) $(x^2-1)(y^2-1)-4xy$;

(3) $x^2+(1+x)^2+(x+x^2)^2$;

(4) $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

第二讲　因式分解(二)
——换元法、待定系数法

知 识 点 和 方 法 述 要

1.换元法又称变量替换法，指的是将一个较复杂的代数式中的某一部分看作一个整体，用一个新的字母加以替代，使问题得以转化，以便于问题解决.

2.待定系数法是种重要的解题方法.先确定所要求分解的式子具有某种分解的基本形式，而这种分解形式中含有若干待定的字母系数，再通过运用恒等式性质，或比较对应项系数，或取一些特殊值，列出方程或方程组，得到待定的字母系数值，从而完成因式分解，是待定系数法在因式分解中的主要运用方式.

例 题 精 讲

例1　分解因式：

(1)$(x^2+2x+4)^2+5x(x^2+2x+4)+6x^2$;

(2)$(2y^2+3y+1)^2-22y^2-33y-1$.

解　(1)令 $y=x^2+2x+4$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=y^2+5xy+6x^2\\&=(y+2x)(y+3x)\\&=(x^2+2x+4+2x)(x^2+2x+4+3x)\\&=(x+2)^2(x^2+5x+4)\\&=(x+2)^2(x+1)(x+4)\ .\end{aligned}$$

(2)原式 $=(2y^2+3y+1)^2-11(2y^2+3y+1)+10.$

令 $m=2y^2+3y+1$,则

原式$=m^2-11m+10.$

$=(m-1)(m-10)$

$=(2y^2+3y+1-1)(2y^2+3y+1-10)$

$=(2y^2+3y)(2y^2+3y-9)$

$=y(2y+3)(2y-3)(y+3)$.

例 2 分解因式:$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12.$

解一 令 $y=x^2+x$,则

原式$=(y+1)(y+2)-12$

$=y^2+3y-10$

$=(y-2)(y+5)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+5)$

$=(x+2)(x-1)(x^2+x+5)$.

解二 令 $z=x^2+x+\dfrac{3}{2}$,则

原式$=(z-\dfrac{1}{2})(z+\dfrac{1}{2})-12$

$=z^2-\dfrac{49}{4}$

$=(z-\dfrac{7}{2})(z+\dfrac{7}{2})$

$=(x^2+x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2})(x^2+x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2})$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+5)$

$=(x+2)(x-1)(x^2+x+5)$.

注 例 2 的解二中,令 $z=\dfrac{1}{2}[(x^2+x+1)+(x^2+x+2)]$,使乘积$(x^2+x+1)(x^2+x+2)$变换成平方差,这为后面的因式分解带来了便利.

例 3 分解因式:$(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90$.

解 原式$=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90$

$=[(x+1)(2x+3)][(x+2)(2x+1)]-90$

$$= (2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90 .$$

令 $y=2x^2+5x+2$,则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (y+1)y-90 \\
&= y^2+y-90 \\
&= (y-9)(y+10) \\
&= (2x^2+5x-7)(2x^2+5x+12) \\
&= (x-1)(2x+7)(2x^2+5x+12) .
\end{aligned}$$

例 4 分解因式:$6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$.

解一
$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 6(x^4+1)+7x(x^2-1)-36x^2 \\
&= 6[(x^2-1)^2+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2 \\
&= 6(x^2-1)^4+7x(x^2-1)-24x^2 \\
&= [2(x^2-1)-3x][3(x^2-1)+8x] \\
&= (2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3) \\
&= (2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3) .
\end{aligned}$$

解二 原式 $= x^2[6(x^2+\dfrac{1}{x^2})+7(x-\dfrac{1}{x})-36]$.

令 $t=x-\dfrac{1}{x}$,则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$. 故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x^2[6(t^2+2)+7t-36] \\
&= x^2(6t^2+7t-24) \\
&= x^2(2t-3)(3t+8) \\
&= x^2[2(x-\frac{1}{x})-3][3(x-\frac{1}{x})+8] \\
&= (2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3) \\
&= (2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3) .
\end{aligned}$$

注 (1) 例 4 的解一中,虽然没有换元,实际上把 x^2-1 看作一个整体.当熟练使用换元法后,并非每题都要设置新元进行代换.

(2)若多项式中与首、末两项等距离的两项的系数均相等,则可如例 4 解二进行换元.

例 5 分解因式:$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

解 设 $u=x+y, v=xy$,则

原式 $=(v-1)^2+(u-2)(u-2v)$

$=(v+1)^2-2(v+1)u+u^2$

$=(v+1-u)^2$

$=(xy+1-x-y)^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2.$

注 例5中,x,y 处于同等地位,互换两字母位置,多项式保持不变,这样的多项式称为二元对称多项式.对于 x,y 的二元对称式,作换元:令 $u=x+y, v=xy$,化繁为简、改变形式是因式分解中一种常用的技巧.

例6 分解因式:$(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

解 令 $m=ax-by, n=by-cz$,则 $ax-cz=m+n$.所以,有

原式 $=m^3+n^3-(m+n)^3$

$=m^3+n^3-[m^3+n^3+3mn(m+n)]$

$=-3mn(m+n)$

$=-3(ax-by)(by-cz)(ax-cz)$.

例7 分解因式:$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$.

解 因 $x^2+xy-6y^2=(x-2y)(x+3y)$,可设

原式 $=(x-2y+m)(x+3y+n)$

$=x^2+xy-6y^2+(m+n)x+(3m-2n)y+mn$.

比较两边对应项系数,可得

$$\begin{cases} m+n=1, & ① \\ 3m-2n=13, & ② \\ mn=-6. & ③ \end{cases}$$

由①,②解得 $m=3, n=-2$. 代入③式,③式成立.故

原式 $(x-2y+3)(x+3y-2)$.

例8 已知多项式 $x^4-x^3+6x^2-x+15$ 是二个二次三项式的乘积,试进行因式分解.