统一的现代数学

第一册第一分册

美国中学数学课程改革研究组编

人民教育出版社

内 容 提 要

《统一的现代数学》是美国中学数学课程改革研究组编的一套中学数学现代化课本．全书共六册十二分册，内容除有一定的初等数学外，还包括集论、数理逻辑、近世代数、微积分、概率论、程序设计、线性规划等基本知识，并用现代数学的结构思想作了统一处理．

本书系内部参考资料，供研究外国中学数学教材用．这套课本对我们了解国外中学数学现代化的动态，研究用现代数学观点处理中学数学教材有一定参考价值．但对这套课本内容中渗透的资产阶级思想意识，应当注意分析批判．

本分册是按该书第一册第一分册 1972 年版译出的，包括有限数系、集合和运算、数学的映射、整数和加法、概率和统计、整数的乘法、平面内格点等七章．

统一的现代数学

第一册第一分册

美国中学数学课程改革研究组

曹才翰　译

张禾瑞　校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印刷

*

1977 年 11 月第 1 版　1978 年 3 月第 1 次印刷

书号 13012·075　　定价 0.54 元

目　　录

第一章　有限数系

1.1　珍妮安德森的算术

安德森先生在帮助他的上一年级的女儿做算术家庭作业．他问:“珍妮，七加三等于几?”

珍妮从她父亲的肩上朝他身后看了一下，随即回答说:“七加三等于十.”

“对．那么十一加二等于几呢?”

珍妮又从他父亲的肩上朝后看了一下，回答说:“十一加二等于一.”

她父亲说:“我大概听错了吧，你好象是说‘十一加二等于一’.”

珍妮说:“我是这么说的.”

她父亲当然希望知道她为什么会作出这样的陈述．珍妮走到她父亲肩后放钟的书架旁．她解释她是如何求得 7 加 3 的和的．她首先指向钟面上的那个“7”，然后把她的手指按顺时针方向移动了三个数字．她这时正指着“10”，于是她说“七加三等于十”．珍妮用同样的方法去求 11 加 2 的和．她先指向钟面上的“11”，然后把手指按顺时针方向移动两个数字，她此时正指着“1”，于是她说“十一加二等于一”.

1.2　时钟算术

在解答关于时间问题时，我们大概都已进行过非常类似于珍妮的步骤的一种运算．假如问你七点后三小时是几点，你就会很

自然地回答说十点. 我们能够用记号"$7+3=10$"来表达这个结果. 但假如问你在十一点后两小时是几点，将会有什么情况？现在的回答是一点，而用同上面一样的记号，我们就有

$$11+2=1$$

在整数中，指派 13 作为 11 与 2 的和有意义，但在钟面上，指派 1 作为上面两数的和同样有意义. 为了表达七点后九小时是四点这个事实，我们将写作

$$7+9=4$$

问题 在一个钟面上

$$11+6=5$$

表示什么意思？假如问你八点后七个小时是几点，你怎么回答，这和用钟面上的算术求 8 与 7 的和是否一样？

问题 用钟面上的数， 8 与 7 的和是什么？解释你是怎么得到你的答案的.

回答上面问题的一种方法是在钟面上放上一个指向"12"的指针. 为了计算 $8+7$，将指针按顺时针方向移动 8 格，然后再将指针按顺时针方向移动 7 格. 这时指针将指向"3". 于是就把数 3 作为 8 与 7 的和.(图 1.1)

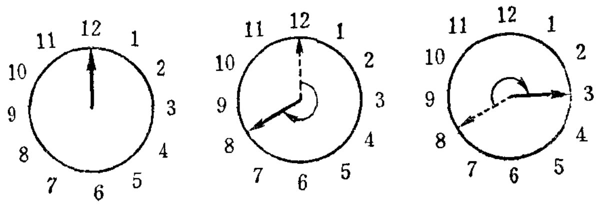

图 1.1　使用刻度盘去确定 $8+7$

钟面上出现的数是熟知的钟点数集合的元素. 我们将把集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ 用符号"Z_{12}"来表示. "Z"来源于德文的数字"*Zahl*". 下标"12"表示这个集合的元素的个数.

1.3 练　　习

1. 用时钟算术计算下述的和:

   (*a*) $9+4$　(*b*) $7+9$　(*c*) $7+8$　(*d*) $5+6$

   (*e*) $10+11$　(*f*) $11+10$　(*g*) $1+12$　(*h*) $12+1$

   (*i*) $11+11$　(*j*) $12+9$　(*k*) $9+12$　(*l*) $12+12$

2. 确定那些放入方框里能给出正确陈述的时钟数.

   (*a*) $10+\square=6$　(*b*) $8+\square=3$

   (*c*) $\square+6=12$　(*d*) $11+12=\square$

   (*e*) $\square+\square=\square$(在这三个方框里,填上相同的钟点数.)

   (*f*) $\square+\square=8$(在这两个方框里,填上相同的钟点数,有两个解答.)

3. 为了避免对于每一次时钟计算都想到拨动指针,我们能建立一个 Z_{12} 的加法表,类似于你见到过的整数加法表. 11 与 2 的和为 1, 于是我们就在第 11 行和第 2 列交叉处放上了"1"(图 1.2). 研究这张表并且注意如何填上 7 与 3 的和.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2												
3												
4												
5												
6												
7			10									
8												
9												
10												
11		1										
12												

图 1.2　关于 Z_{12} 的加法表

(*a*) 在表中用圆圈起来的"7"是表示 $1+6$ 还是 $6+1$? 解释你的答案.

(*b*) 讨论图 1.2 的第一行中为什么得出那些数?

(*c*) 抄下图 1.2 的表、并且计算第二行、第三行等各项,你注意到出现了什么规律吗? 你能得出什么可以检验的猜想么?

(*d*) 有什么有趣的规律关联着第一列的各项? 最后一列呢? 最后一行呢? 这些列和行与其它的列和行有何关系?

(*e*) 完成这张表.

(*f*) 在上面构成的加法表与整数加法表间你能看出什么区别?

1.4 $(Z_{12}, +)$和$(W, +)$

假如我们把时钟数的集合 Z_{12} 和算术整数(暂称整数)

$$W=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

的集合作一比较,我们立即会注意到它们的不同. 整数的集合是无穷尽的或无限的. 假如一个集合不是无限的,那么我们就说它是有限的.

重要的是你不要把大的有限集与无限集混淆. 一些有限集的常见例子是:

(*a*) 在英语字母表中元音字母的集合;

(*b*) 在字典中词的集合;

(*c*) 迄今已被写出的所有句子的集合.

问题 1 给出一些大的有限集的例子.

问题 2 你能够描述的最大的有限集是什么?

问题 3 除W以外,什么样的集合是无限集的一个例子?

珍妮安德森说 $11+2=1$ 时所用的数集是一个有限数系. 这样的有限数系有许多有趣的性质和应用. 你可能已经注意到了时钟数加法 $(Z_{12}, +)$ 和整数加法 $(W, +)$ 间的相似处和不同处. 当我们研究时钟的和其它的有限数系时,不妨对显得熟悉的或异常的性质作一些猜想或推测. 如果你机警的话,那么两者你都会发现.

利用熟悉的整数加法，你一定会同意下述的计算是正确的：

$10+7=17$　　　　$7+10=17$

$3+6=9$　　　　$6+3=9$

$11+4=15$　　　　$4+11=15$

由这六个计算显示出来的规律可以一般地加以陈述．对于任何整数 x 和 y，

$$x+y=y+x$$

这就是在 W 中的加法的交换性质．

现在用你对于 Z_{12} 的加法所建立的表来确定每一个下述的和：

(*a*) $10+7$　　　　(*d*) $7+10$

(*b*) $3+6$　　　　(*e*) $6+3$

(*c*) $11+4$　　　　(*f*) $4+11$

在 Z_{12} 中，加法象是具有交换性吗？在 $(Z_{12},+)$ 的表中你能找出什么规律来支持你的答案？

最容易的整数加法问题是那些包括零的．

$9+0=9$　　　　$0+9=9$

$756+0=756$　　　　$0+756=756$

$27+0=27$　　　　$0+27=27$

由于在整数加法中零起着特殊的作用，所以我们把它称为 W 的加法单位元．对于任意整数 x，

$$x+0=0+x=x$$

零不是一个时钟数，但是 Z 有一个加法单位元．仔细观察你的 $(Z_{12},+)$ 表的行和列来求出在时钟加法中和零在 $(W,+)$ 中起同样作用的那个时钟数．

1.5 日 历 算 术

纽约市的全国捷径运输公司的交通经理遇到下述情况．卡车

从一处到一处的长途行驶以后将要回到纽约市，而经理对于车库位置，装卸工和外加司机的雇用，卡车引擎的维修，以及货物指派等等都必须作好安排．经理感到他需要一个快速方法在已知(1)卡车星期几离开纽约市，(2)卡车在路上要多少天的情况下，来确定星期几卡车能返回纽约市．

下面是一个典型问题：一辆卡车离开纽约市驶往印第安纳(2天)；由此驶往得克萨斯(3天)；然后再到华盛顿(4天)；最后返回纽约市(1天)．假如这辆卡车离开纽约市是在星期五，那么它在星期几返回纽约市？

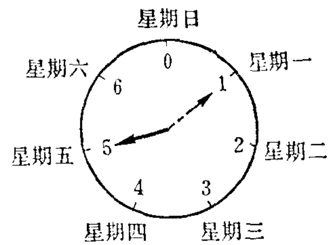

图 1.3　日历数

这位经理不久想到利用如图1.3中所示的在星期几上标上数的刻度盘．

为了解决上面的问题，他如下进行：由于汽车星期五离开纽约市，他把指针拨到“5”处．由于总的旅程需要10天，(检验它!)因此，他按顺时针方向拨动指针10格，这时指针指向“1”处．于是他得到结论：卡车将于星期一返回纽约市．

这位经理使用的数的集合$\{0,1,2,3,4,5,6\}$称之为日历数，我们把它记作Z_7．

考察下述简单问题：假如一辆卡车在星期四离开纽约市，并且六天后返回，那么它在星期几回来？这个问题经翻译后可这样提出：“在Z_7中的哪个数能作为4(和星期四相应的数)和6(旅程的时间)的和？我们看到使用刻度盘得到的这个和与原来问题的答案明显一致，即星期三．于是，在Z_7中我们有$4+6=3$．

1.6 练　　习

1. 捷径运输公司的经理对于他的一条路线得到了下述的数据：

出　　发	到　　　　达	旅程时间(天)
纽约市	克利夫兰，俄亥俄	2
克利夫兰	杰克逊维尔，佛罗里达	3
杰克逊维尔	亚特兰大，佐治亚	1
亚特兰大	埃尔帕索，得克萨斯	5
埃尔帕索	第蒙，衣阿华	4
第蒙	芝加哥，伊利诺斯	1
芝加哥	纽约市	3

假设一辆卡车离开纽约市是在一个星期三.

(a) 它将在星期几到达杰克逊维尔？到达埃尔帕索？

(b) 卡车将在星期几返回纽约市？

(c) 假如在埃尔帕索有两天停留，那么星期几它将返回纽约市？

(d) 假如一辆卡车在星期六离开纽约市，走一个全程后，在纽约市停留两天，然后再走第二个全程，那么在星期几它将返回纽约市？

2. 在 Z_7 中计算下述的题.

(a) $6+1$　(b) $2+6$　(c) $3+5$　(d) $4+2$

(e) $4+5$　(f) $5+4$　(g) $5+5$　(h) $5+6$

(i) $6+6$　(j) $0+1$　(k) $0+6$　(l) $1+6$

(m) $2+5$　(n) $5+2$　(o) $0+0$

3. 确定那些放入方框里能得出正确陈述的日历数.

(a) $5+\square=3$　(b) $\square+6=2$

(c) $2+\square=6$　(d) $\square+3=1$

4. 抄下下面的 Z_7 的加法表，并且把所有的空档全填上数. 注意 $4+6=3$ 是如何被登记上的.

(a) 解释一下，为什么一旦完成了这张表我们就能够省掉刻度盘.

(b) 关于$(Z_7, +)$的单位元存在吗？解释你的答案.

(c) 在$(Z_7, +)$中加法是否可交换？

(d) 有什么有趣的规律关联着第1行，第2行中的项？第2行和第3行呢？

(*e*) 第 1 列的项与第 2 列的项有何关系？

(*f*) 解释一下为什么表中右上方到左下方的对角线呈现出那个样子？为什么左上方到右下方的对角线不是那个样子？

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							3
5							
6							

5．假如我们用 0 去代替 Z_{12} 中的加法单位元12，那么比较 $(Z_7, +)$ 和 $(Z_{12}, +)$ 就会容易一些．这时 $Z_{12}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$．建立一张新的 $(Z_{12}, +)$ 的表如下：

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8								3				
9												
10												
11												

(*a*) 两个 $(Z_{12}, +)$ 的表中的和——除去 0 代替了 12 以外——都一致吗？

(b) 新表(Z_{12}, +)是不是要比1.3节中的那个表更类似于(Z_7, +)?

6. 把你的关于(Z_{12}, +)与(Z_7, +)的表比较一下:

(a) 关于行与列的项它们有相似的规律吗?假如有的话,在哪点上它们是相似的?

(b) 它们是否有对应的对角线性质?

7. 比较(Z_7, +)和(W, +),它们的类似点是什么?不同点是什么?

1.7 开 句

你能否对比下述的数学句子?

$$2+3=5 \tag{1}$$

$$5+6=17 \tag{2}$$

$$11+2=\square \tag{3}$$

显然,句子(1)在(W, +)中是正确的,而句子(2)在(W, +)中是错误的. 但是(3)在用数代入符号□之前,我们并不知其正确与否. 由于(1)和(2)或是正确的或是错误的(但不同时是两者)数学句子,故我们把它们叫做数学陈述.

上述的句子(3)以及其它象(3)那样含有一个变量的句子在数学中经常出现. 当我们说(3)中的那个□是一个变量时,其意思是指□能用一个指定的数的集合中的数来代替,而这个数的集合叫做变量的定义域.

假如我们的变量的定义域是Z_{12},那么在(3)中"□"就能用"1"来代替而得到正确的句子

$$11+2=1$$

但是,假如我们的变量的定义域是W,那么用"1"代"□"就会得到一个错误的句子. 由于

$$11+2=13$$

为了在W中得到一个正确的句子,我们应该用"13"去代替"□".

处理象(3)那样的句子时,要永远意识到你正在考虑的变量的

定义域.

象"$11+2=\square$"那样既不正确又不错误的句子叫做开句.

注意这样的句子在用数去代替□时,它就变为正确的,或是错误的. 很容易写出一些开句,也就是说,至少含有一个变量而且既不正确也不错误的句子.

开句的例子有:

$$\square+2=6$$

$$3+4=\triangle$$

$$7+\square=11$$

$$\triangle+\square=4$$

$$\square=0$$

象上面的具有等号的开句叫做方程. 在数学中经常用的另一类句子涉及不等关系"小于"和"大于". 例如,在整数集中,我们能写出"3 小于 4"和"8 大于 6"这样的句子. 我们分别用符号"<"和">"去记"小于"和"大于". 于是,我们能把上面的句子改写为"$3<4$"和"$8>6$". 用到这些关系的开句的例子有:

$$5>\square+1$$

$$4<\square+6$$

$$\square>0$$

象上面的具有不等符号的开句叫做不等式.

你常会被要求去解一个开句. 就是要求你在变量的定义域中去确定这样的一些数,用这些数去代变量能得出正确的陈述. 那些能得出正确陈述的数的集合称为开句的解集.

问题 1 为什么说$\{0\}$是开句 $\square+4=4$ 的解集? 这里"□"的定义域是W.

问题 2 假如"△"的定义域是 Z_{12}, 那么开句 $\triangle+3=1$ 的解集是什么?

问题 3 开句 $2=\square+5$ 的解集是什么？这里"□"的定义域是 W.

你可能已经确定在问题 3 中开句的解集内没有数. 这是空集或零集的一个例子. 描述空集的某些其它方式是：所有 30 英尺高的男人的集合；在$\frac{1}{2}$和$\frac{3}{4}$间所有整数的集合. 我们通常用符号"ϕ"或"{ }"来指明空集.

问题 4 讨论为什么问题 1 的解集 $\{0\}$ 与问题 3 的解集 ϕ 不是一样的.

我们曾经用"□"和"△"去记变量. 在数学中通常用 x, y, z 或 n 等符号去记一个变量. 假如我们使用这些符号去改写早先给出的开句的例子，那么它们将被表为

$$x+2=6$$

$$3+4=y$$

$$x+y=4$$

$$5>n+1$$

通过下面的一些例子让我们来复习一下上面提出的某些思想.

例 1 令变量的定义域是 W，假如让我们解 $\square+5=12$，并且用 7 去代替□，那么我们就得到 $7+5=12$. 这是一个正确的陈述. 因此 7 是开句的解，或 $\{7\}$ 是其解集，因为没有其它的 W 中的数代替□后给出正确的陈述.

例 2 令变量的定义域是 Z_7. 在开句 $\square+4=3$ 中，若用 6 来代替 □，我们得到 $6+4=3$，它是正确的陈述. 因此 6 是解，由于在 Z_7 中没有其它的数代替□后能给出正确的陈述，故 $\{6\}$ 是解集.

例 3 令变量的定义域是 W. 对于开句 $\square+4=3$，我们看到在 W 中不存在这样的数，用它代替□后能给出正确的陈述. 因此这个开句在 W 中无解，即解集是空集.