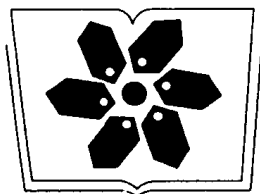


光学信息论

● 陶纯堪 陶纯匡 著



科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版



国家自然科学基金委员会资助出版

内 容 简 介

本书是著者承担国家自然科学基金课题科研的系统总结,也是根据他们所编写的、并经多年使用过的研究生教材基础上改写而成.全书12章,前3章介绍理论基础、光学信息量及与光学信息论有关的部分相干理论及方法;后9章介绍各种类型的光学系统,如光学透镜成像、全息、信息处理、反散射成像、最大熵光学图像恢复、X射线照相、激光共焦扫描显微镜、传图像光纤面板及光谱仪等系统,并以各种实例对这些系统中的信息量问题进行讨论和说明.

本书可作为大专院校有关专业研究生教学用书,也可供有关专业的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

光学信息论/陶纯堪,陶纯匡著.——北京:科学出版社,1999
ISBN 7-03-006927-7

I. 光… II. ①陶… ②陶… III. 信息光学 IV. O438

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第22591号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

*

1999年3月第一版 开本:787×1092 1/16

1999年3月第一次印刷 印张:18 3/4

印数:1—1500 字数:425 000

定价:42.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

光 学 信 息 论

陶纯堪 陶纯匡 著

科 学 出 版 社

1999

序

当代人类社会是个信息社会.从最简单的说起,人用眼、耳、鼻、舌、身五个器官感知外部世界.后来,人们靠电话传递了近在一个城市、一个学校,远在世界各地的消息;用照相机、摄像机可拍摄各种图形、图像以至星球的表面形态;用显微镜观察细微物体或生物细胞的结构;用 X 射线仪拍摄人体内部或机械材料内部状况;用哈勃空间望远镜人们甚至可探测 7000 l. y. (光年)远的遥远星空的信息.

在人们了解信息的种类越来越多,每种信息的数量越来越大的条件下,信息论于 1948 年由 C. E. Shannon 创立^[1]. 美国微软公司的成功显示:当代社会,财富正在迅变中重新分配,它将按人们高智能水平和信息能力来取得财富.当代信息社会需要信息论作指导.

光学是人们获取信息的最基本和有效的手段之一,诸如放大镜、显微镜、望远镜、照相机、摄像机、电视、光缆传输电话、激光视盘、激光唱盘等,尤其是激光以及光全息的出现为记录和探测物体的信息提供了强有力的手段.

光学尤其需要光学信息论作指导.

从 1948 年信息论创立之日起,世界上光学界的先驱者便致力于把信息论引入光学领域.这里首先要提及 G. Toraldo di Francia 教授. 1955 年^[2],他首先把自由度的概念引入光学领域.此后人们对于他的论述有些争论,然而到 1969 年他把 Slepian、Pollak 和 Landau 发展的回转椭球波函数^[3]引入光学,创立了光学本征理论,完善地解决了在相干条件下无像差光学系统传递信息量的问题^[4].至今人们已利用他的这种方法发展了圆形、球形、柱形坐标系下的回转椭球波函数去处理各种情况下的信息量问题.这是当代光学信息论发展的主线索.本书将沿此主线索来讨论信息问题.

俄罗斯 С. Б. Гуревич^[5,6]教授对电视系统以及光学全息中的信息问题作了全面的论述,他的理论也将作为本书的重要参考.

在此我们应提及我国的著名光学专家谭维翰、王之江、王润文、薛鸣球等.早在长春光学机械研究所时期^[7~9],他们便对光学信息论作出了卓有成效的研究结果.他们是我国光学信息论的先驱.我们的工作是在他们的启示和奠定的基础上进行的.

光学信息论的宗旨是研究并阐明光学成像的图像或物体的信息如何度量,信息量经各种光学系统如何传递,如何衡量最后到达像平面的信息量,以及不同光学系统或光学方法传递光学信息量的最大限度和效能,还要分析在不同的光学系统中传递光学信息量的各种制约关系.

光学信息论是在前提上、在更高的意义上研究光学现象和光学系统或光电系统,它将指导人们把握全局,抓住关键,透彻了解系统中各个环节间的制约关系,明确改进方向,免

走弯路.学习和研究光学信息论对所有光学工作者是十分必要的.

光学信息论有如下鲜明的特征:

(1) 由于光学信息量可以准确度量,因而它是光学成像的物体或图像精细程度的定量和科学的描述[以 bit(比特)为单位],从而为从数量上准确评价系统提供依据.

(2) 它又是一切光学现象或光学系统传递的光学信息量的定量的、科学的描述.因而它可以对性质不同的传递信息量的系统和环节作数量上的比较.

(3) 光学信息量是以光作为载体,而光具有空间、时间、波长及偏振的属性,因而光学信息量又由空间信息量、时间信息量、颜色信息量、偏振信息量四个方面组成.谁主谁次,随不同光学系统而迥异.

(4) 光学信息量是一个综合的数量指标,它依赖于系统的各种因素,如光学的相干状态,光学系统的参数,光学系统的像差校正状况,探测器特性,信源、信道、探测器的数量匹配状况等.

由光学信息量入手,人们可以确定光学系统各种参量制约关系,实现系统最佳化.

(5) 光学信息论在处理方法上离不开离散化.它需要对光的幅度大小、位置、时间、波长等作离散的分割处理,而 Toraldo 本征函数理论的目的正是对光信号在空间上构成离散化.

(6) 光学信息论是一门综合运用光学、概率论、量子理论、积分方程、通信理论等学科的边缘学科.

光学信息论是高度概括的,但它需要各种光学系统为例来说明.因而本书将涉及各种类型的光学系统,诸如光学透镜成像系统,光全息,光学信息处理,多色系统,光学反散射,最大熵图像恢复,X 射线系统,高速摄影系统,激光共焦扫描显微镜,传图像光纤面板以及光谱仪等.本书将以实例说明各种光学系统中的信息量问题,系统地阐述作者在如上领域十多年来的研究结果.然而本书又不过多地涉及各种具体光学系统的细节,它始终是围绕光学信息论这个主题加以论述.

本书中,第一章介绍所用的理论基础.第二章讨论光学信息量的定义及主要表达式.第三章讨论与光学信息论有密切关系的部分相干理论及方法.从第四章至第十二章讨论各种具体系统中的信息量问题和实例.

在本书出版过程中,得到王大珩、母国光、王之江等院士的有力推荐,在本书撰写过程中,曾参考了陈念江、沈伟生、文华、刘峰的学位论文内容和作者与他们联合发表的论文,在此一并致谢.

本书第一、三、四、五、六、七、八、十、十一章由陶纯堪撰写,第二、九、十二章由陶纯匡撰写.

谨以此书纪念慈爱的母亲.

陶纯堪 (南京理工大学)

陶纯匡 (重庆大学)

参 考 文 献

- [1] C. E. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.*, **27**, 379(1948).
- [2] G. Toraldo di Francia, *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 497(1955).
- [3] D. Slepian, H. O. Pollack, *Bell Syst. Tech. J.*, **40**, 43(1961).
- [4] G. Toraldo di Francia, *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 799(1969).
- [5] С. Б. Гуревич, Эффективность и чувствительность телевизионных систем, Энергия (1964).
- [6] С. Б. Гуревич, Передача и обработка информации голографическими методами, Советское радио (1978).
- [7] 谭维翰、王之江, 光学信息理论特辑(1), 中国科学院长春光学精密机械研究所集刊, 1 (1964).
- [8] 谭维翰, 光学信息理论特辑(1), 中国科学院长春光学精密机械研究所集刊, 65(1964).
- [9] 谭维翰、王润文, 光学信息理论特辑(1), 中国科学院长春光学精密机械研究所集刊, 83(1964).

目 录

序

第一章 回转椭球波函数(PSWF)理论基础	(1)
§ 1.1 回转椭球波函数概论	(1)
§ 1.2 时间限制信号和频带限制信号	(4)
§ 1.3 一维线性回转椭球波函数	(6)
§ 1.4 二维圆形回转椭球波函数	(11)
参考文献	(13)
第二章 光学信息量	(14)
§ 2.1 拉格朗日不变量	(14)
§ 2.2 抽样定理	(15)
§ 2.3 熵、信息量、信道容量	(18)
§ 2.4 光学信息量	(37)
§ 2.5 Laue-Lukosz 自由度不变定理	(39)
参考文献	(51)
第三章 光的部分相干理论和部分相干光场的 Gamo 矩阵处理	(52)
§ 3.1 互相干函数	(52)
§ 3.2 准单色光、互强度和范西特-泽尼克定理	(54)
§ 3.3 Gamo 强度矩阵	(58)
§ 3.4 强度矩阵对角化	(61)
§ 3.5 互强度作为积分方程的核	(63)
§ 3.6 各种相干态光源照明下自由度	(65)
参考文献	(67)
第四章 光学透镜成像系统信息量问题	(68)
§ 4.1 相干光照明下无像差光学透镜成像系统信息量与 Toraldo 光学本征函数理论	(68)
§ 4.2 相干光照明下有像差有噪声系统信息量	(76)
§ 4.3 非相干光照明下有像差有噪声系统信息量	(81)
§ 4.4 部分相干准单色光照明系统信息量	(86)

§ 4.5 决定光学透镜成像系统效率的因素	(97)
§ 4.6 Toraldo 本征函数理论的要点归纳	(101)
参考文献	(102)
第五章 全息系统信息量问题	(104)
§ 5.1 平面全息系统信息量的最高空间频率分析法	(104)
§ 5.2 平面全息系统信息量的本征函数分析法	(112)
§ 5.3 物面信息量与全息片信息容量的匹配	(120)
§ 5.4 平面全息片总自由度数不变原理	(122)
§ 5.5 体全息系统信息量	(124)
参考文献	(132)
第六章 光学信息处理系统信息量问题	(133)
§ 6.1 4f 系统信息量	(133)
§ 6.2 空间滤波系统信息量	(135)
§ 6.3 匹配滤波器与光学模式识别系统	(138)
§ 6.4 合成孔径雷达(SAR)光学处理系统信息量	(144)
§ 6.5 多色处理系统信息量	(153)
参考文献	(159)
第七章 反光学问题之一:反散射成像系统信息量	(160)
§ 7.1 反光学问题概述	(160)
§ 7.2 反散射成像原理	(161)
§ 7.3 Wolf 的全息反散射成像原理	(164)
§ 7.4 矩形弱散射体反散射成像信息量	(171)
§ 7.5 三维空间频率之间的关系——Ewald 球	(175)
§ 7.6 圆柱形弱散射体反散射成像信息量	(176)
§ 7.7 球形弱散射体反散射成像信息量	(178)
参考文献	(186)
第八章 反光学问题之二:最大熵光学图像恢复	(187)
§ 8.1 最大熵图像恢复方法的信息论依据	(187)
§ 8.2 最大熵图像恢复的原理表述	(189)
§ 8.3 最大熵图像恢复的效果	(195)
§ 8.4 最大熵图像恢复的不同形式	(198)
参考文献	(208)
第九章 X 射线照相系统的信息量	(209)

§ 9.1 X 射线照相系统成像原理及特点	(209)
§ 9.2 传统 X 射线照相底片像质评定方法的困惑	(214)
§ 9.3 X 射线照相系统信息量与信息传递效率	(219)
§ 9.4 X 射线照相系统信息量的应用	(223)
参考文献	(236)
第十章 时间信息	(237)
§ 10.1 时间信息之一:高速摄影系统信息量	(237)
§ 10.2 时间信息之二:激光共焦扫描显微镜(LCSM)信息量	(244)
参考文献	(249)
第十一章 传图像光纤面板信息量问题	(250)
§ 11.1 元光纤三层结构模型及传输模式分析	(250)
§ 11.2 光纤面板信息量与光纤面板最佳结构	(259)
参考文献	(265)
第十二章 光谱仪器信息量问题	(266)
§ 12.1 光谱仪器的发展阶段与分类	(266)
§ 12.2 光谱仪器的主要参数与性能指标	(268)
§ 12.3 光谱仪器传递的信息量	(277)
§ 12.4 光谱仪器信息量理论的应用	(282)
参考文献	(287)

第一章 回转椭球波函数(PSWF)理论基础

本书研究光学信息量的理论. 光学信息量以光波为载体, 而光有空间、时间、波长及偏振的属性, 因而光学信息量又由空间信息量、时间信息量、颜色信息量、偏振信息量四个方面组成.

在本书处理空间信息量时, 所涉及的成像积分方程要用到回转椭球波函数(prolate spheroidal wave function), Toraldo 正是利用这一数学工具解决了在相干照明下的光学信息量问题, 把光学信息论推进到一个新阶段. 为此本书将首先概述回转椭球波函数, 作为处理光学信息量的预备基础知识.

§ 1.1 回转椭球波函数概论

1. 问题的提出

由现代成像理论, 人们熟知: 光学系统的成像过程由傅里叶分解与其合成两步骤构成. 一个物分布 $f(x)$, 首先按如下关系分解为其傅里叶频谱:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx, \quad (1.1.1)$$

式中 ω 为空间圆频率坐标, x 为空间坐标. 然后, 傅里叶频谱经光学系统再按下式合成为物的像:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \quad (1.1.2)$$

这种理论已被广泛接受, 也已被实验证明. 然而式(1.1.1)和(1.1.2)只反映了傅里叶频谱的分解和合成的理想过程. 客观实际并非如此. 事实上, 式(1.1.1)中的物分布 $f(x)$ 不可能遍及无穷空间, 同样在式(1.1.2)中, 傅里叶频谱也不可能在无穷区域分布. 人们自然会问: 当物和其傅里叶频谱都被限制时, 会出现什么现象? 这就是人们要利用回转椭球波函数去回答的问题.

1959 年信息论的创始人 C. E. Shannon 参观贝尔实验室时, 提出一个著名的问题: 一个函数在多大的程度上它的频谱是限制于有限带宽而同时又在空间域上是集中分布的? 这个问题已被证明是不易解决的.

由 Heisenberg 测不准定则可知, 一个空间信号的空间域 ΔX 和它对应的频谱域 $\Delta\Omega$ 有如下关系:

$$\Delta X \doteq \frac{1}{\Delta \Omega}, \quad (1.1.3)$$

即频谱域上集中分布必然导致信号在空间域上分散. 要想找到一个信号在两个共轭的域上都尽可能集中分布, 是不易的. 而这个问题的回答就要依靠回转椭球波函数.

2. 早期的回转椭球波函数研究

考察如下波动方程:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1.4)$$

式中 ∇^2 为拉普拉斯算符, 表述为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.1.5)$$

c 为波速, Ψ 表述为如下形式:

$$\Psi = \psi(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad (1.1.6)$$

注意, 式中 ω 为时间圆频率. 在整本书中, ω 有时代表时间圆频率, 有时代表空间圆频率, 在既定问题中, ω 到底代表哪种频率, 要根据该系统是时间系统或空间系统来具体分析.

把式(1.1.6)代入波动方程(1.1.4), 则得到赫姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0, \quad (1.1.7)$$

这里 k 为波数, 即 $k = 2\pi/\lambda$. 当在球面坐标系、柱面坐标系及直角坐标系下解式(1.1.7)便可获得球面波、柱面波及平面波的表达式. 早期的数学家在回转椭球坐标系 (η, ξ, φ) 下解式(1.1.7). 这种坐标与直角坐标 (x, y, z) 的关系是

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2}[(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)]^{1/2} \cos \varphi, \\ y = \frac{d}{2}[(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z = \frac{d}{2} \eta \xi. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

回转椭球坐标系示于图 1.1, 其中 (η, ξ, φ) 的定义域是

$$\begin{cases} -1 \leq \eta \leq 1, \\ 1 \leq \xi < \infty, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

式(1.1.9)中 φ 为 x, y 平面上的旋转角.

由式(1.1.8)和图 1.1 可知

(1) 在 $\eta=0$ 的 $x-y$ 平面上, 回转椭球坐标构成如下圆:

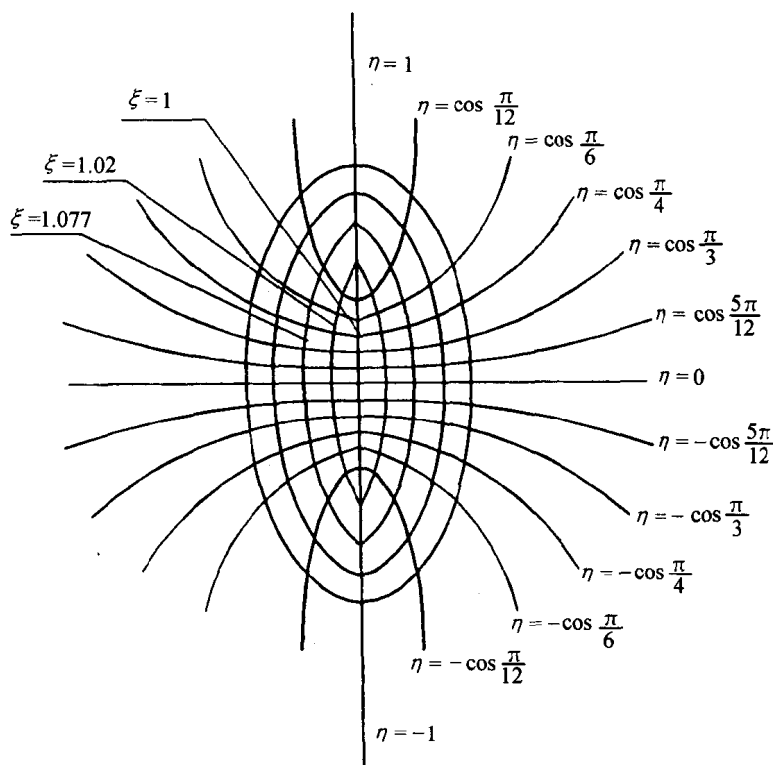


图 1.1 回转椭球坐标^[1].

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 (\xi^2 - 1).$$

(2) 在 y - z 平面上, 消去 η , 仅考察 ξ , 回转椭球坐标是长轴 $(\frac{d}{2})\xi$ 在 z 轴上, 短轴 $(\frac{d}{2})\sqrt{\xi^2 - 1}$ 在 y 轴上, 焦距为 d 的椭圆

$$\frac{z^2}{(\frac{d}{2})^2 \xi^2} + \frac{y^2}{(\frac{d}{2})^2 (\xi^2 - 1)} = 1.$$

由于是旋转对称, 在 x - z 平面的椭圆与上式完全一致, 仅把 y 换为 x .

(3) 在 y - z 平面上, 消去 ξ , 仅考察 η , 回转椭球坐标是焦距为 d 在 z 轴上的双曲线

$$\frac{z^2}{(\frac{d}{2})^2 \eta^2} - \frac{y^2}{(\frac{d}{2})^2 (1 - \eta^2)} = 1.$$

在 x - z 平面上双曲线与上式一致, 仅把 y 换为 x .

在式(1.1.8)所示回转椭球坐标下解赫姆霍兹方程(1.1.7), 得

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$+ C^2(\xi^2 - \eta^2)]\psi = 0, \quad (1.1.10)$$

式中 C 为回转椭球参量. 式(1.1.10)的解 $\psi_{m,n}$ 可分解为

$$\psi_{m,n} = S_{m,n}(C, \eta) R_{m,n}(C, \xi) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)中, $S_{m,n}(C, \eta)$ 为角波函数, $R_{m,n}(C, \xi)$ 为径向波函数.

人们普遍关注 $m=0$ 的角波函数 $S_{0,n}(C, \eta)$, 它满足如下微分方程:

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 S_{0,n}(C, \eta)}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dS_{0,n}(C, \eta)}{d\eta} + [\lambda_{0,n} - C^2 \eta^2] S_{0,n}(C, \eta) = 0, \quad (1.1.12)$$

这个 $m=0$ 的角波函数 $S_{0,n}(C, \eta)$ 还满足如下两个积分方程和一个正交关系:

$$\frac{2C}{\pi} [R_{0,n}^{(1)}(C, 1)]^2 S_{0,n}(C, t) = \int_{-1}^1 \frac{\sin C(t-s)}{\pi(t-s)} S_{0,n}(C, s) ds, \quad (1.1.13)$$

$$2i^n R_{0,n}^{(1)}(C, 1) S_{0,n}(C, t) = \int_{-1}^1 e^{icts} S_{0,n}(C, s) ds, \quad (1.1.14)$$

$$\int_{-1}^1 S_{0,n}(C, t) S_{0,n'}(C, t) dt = \delta_{nn'} [u_n(C)]^2, \quad (1.1.15)$$

$$\text{式中} \quad [u_n(C)]^2 = \int_{-1}^1 [S_{0,n}(C, t)]^2 dt. \quad (1.1.16)$$

如上关于回转椭球波函数的研究结果, 已由一些数学家早期完成, 读者欲知细节可查阅参考文献[1].

§ 1.2 时间限制信号和频带限制信号^[2]

设有一类复值函数 $f(t)$, 它定义在实轴 t 上, 且平方可积, 即

$$\|f(t)\|_A^2 = \int_{-A}^A |f(t)|^2 dt \quad (1.2.1)$$

存在. 上式中, $\|f(t)\|_A^2$ 代表着 $f(t)$ 在域 $[-A, A]$ 内的能量. 而 $\|f(t)\|_\infty^2$ 则代表 $f(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内的总能量, 它被表述为

$$\|f(t)\|_\infty^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad (1.2.2)$$

这一类函数 $f(t)$, 其傅里叶变换及傅里叶反变换按下式表示:

$$\left\{ \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \right. \quad (1.2.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \end{aligned} \right. \quad (1.2.4)$$

式中 t 为时间, $\omega/2\pi$ 为时间频率, ω 为时间圆频率.

在此作一点补充说明: 时间频率 ν 与时间圆频率 ω 的关系是 $\omega = 2\pi\nu$, 那么式(1.2.4)的傅里叶变换人们又常表示为

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

对傅里叶变换的如上两种不同表示法人们可根据习惯随意选择.

1. 频带限制函数

设在 $f(t)$ 中有一类函数, 它的傅里叶变换 $F(\omega)$ 局限于 $|\omega| \leq \Omega$ 之内, 此频率域之外则为零, 即

$$F(\omega) = \begin{cases} F(\omega) & |\omega| \leq \Omega, \\ 0 & |\omega| > \Omega, \end{cases} \quad (1.2.5)$$

这一类函数构成一个集合 $\mathcal{B}$, 称为频带限制函数集, 该集合中的这种函数称为频带限制 (bandlimited) 函数, 如图 1.2 所示.

式 (1.2.5) 中 Ω 为上限圆频率, 它与上限频率 W 的关系是

$$\Omega = 2\pi W. \quad (1.2.6)$$

考虑到这种函数的特点 (1.2.5), 它被表示为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.7)$$

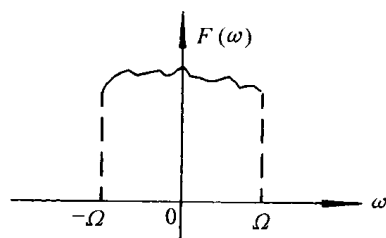


图 1.2 频带限制函数.

如果把频带限制函数集 $\mathcal{B}$ 视为一种运算, 则

$$\mathcal{B}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.2.8)$$

频带限制函数是经常碰到的. 例如, 在电子学中, 通过低通滤波器的信号 (时间频率受限). 又如, 经过一个有限孔径光学系统的光学信号 (空间频率受限) 都可用这种函数描述.

2. 时间限制函数

$\mathcal{D}$ 是这样一类平方可积复值函数, 当时间 t 限制于 $|t| > \frac{T}{2}$ 时, 其值为零, 即

$$\mathcal{D}f(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq T/2, \\ 0 & |t| > T/2, \end{cases} \quad (1.2.9)$$

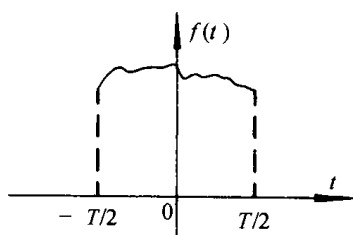


图 1.3 时间限制函数.

式中同样把 $\mathcal{D}$ 视为一种运算. 这类函数构成一个集合 $\mathcal{D}$, 叫做时间限制函数集, 内中的函数叫时间限制函数. 示于图 1.3.

这种函数在电子学中普遍存在. 而在光学中, 所论及光学物或像, 显然不是时间限制函数, 而是空间限制函数, 即把时间坐标换为空间坐标.

§ 1.3 一维线性回转椭球波函数^[2]

1. 回转椭球波函数集 $\{\psi_i(t)\}$

对于任何大于零的时间区域 $T > 0$ 和任何上限圆频率 $\Omega > 0$, 都存在一个实函数集

$$\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_i(t), \dots \quad (1.3.1)$$

和一组正的实数

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 \dots \lambda_i \dots, \quad (1.3.2)$$

这个实函数集 $\{\psi_i(t)\}$ 具有如下性质:

1) 在 $(-\infty, \infty)$ 上正交, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t) \psi_j(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3.3)$$

2) 在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上也正交

$$\int_{-T/2}^{T/2} \psi_i(t) \psi_j(t) dt = \lambda_i \delta_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

由式(1.3.3)和(1.3.4)知, $\{\psi_i(t)\}$ 函数集是十分独特的, 它在无穷区间和有限区间都正交.

3) 存在如下积分方程:

$$\lambda_i \psi_i(t) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \Omega(t-s)}{\pi(t-s)} \psi_i(s) ds \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3.5)$$

积分方程(1.3.5)表明: 任何第 i 阶输入函数 $\psi_i(t)$ 经过圆频率 Ω 限制一次, 又经过时间域 $T/2$ 限制一次之后, 系统的输出函数仍为它自身 $\psi_i(t)$, 但要乘上一个小于 1 的正实系数 λ_i . 这个性质是很特别的, 它给我们带来许多分析和处理问题的方便.

在式(1.3.1)至式(1.3.5)中, $\psi_i(t)$ 又叫回转椭球的本征函数, λ_i 叫做对应于本征函数 $\psi_i(t)$ 的本征值. 它们均为回转椭球参量

$$C = \frac{T\Omega}{2} \quad (1.3.6)$$

的函数, 即实际上

$$\begin{aligned} \psi_i(t) &= \psi_i(C, t), \\ \lambda_i &= \lambda_i(C). \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

式(1.3.6)中回转椭球参量 C 实际上是系统的时间带宽积.

现将文献[2]的数据加以整理, 把不同回转椭球参量 C 的本征值 λ_i 列在表 1.1 内, 并把每个 C 所对应的 $\frac{2C}{\pi}$ 取整之后放在表的下方. 数据表明当 $i > \frac{2C}{\pi}$ 时, λ_i 迅速趋于零; 反之

λ_i 迅速趋于 1. 请见图 1.4.

表 1.1 λ_i 数据表

	$C=8$	$C=4$	$C=2$
i	λ_i	λ_i	λ_i
0	$\lambda_0=1.0$	$\lambda_0=0.99589$	$\lambda_0=0.88056$
1	$\lambda_1=0.99988$	$\lambda_1=0.91211$	$\lambda_1=0.35564$
2	$\lambda_2=0.99700$	$\lambda_2=0.51905$	$\lambda_2=0.03587$
3	$\lambda_3=0.96055$	$\lambda_3=0.11021$	$\lambda_3=0.00115$
4	$\lambda_4=0.74790$	$\lambda_4=0.00883$	$\lambda_4=0.00002$
5	$\lambda_5=0.32028$	$\lambda_5=0.000381$	$\vdots$
6	$\lambda_6=0.06078$	$\vdots$	
7	$\lambda_7=0.00613$		
8	$\lambda_8=0.00042$		
$\vdots$	$\vdots$		
	$\frac{2C}{\pi} \doteq 5$	$\frac{2C}{\pi} \doteq 3$	$\frac{2C}{\pi} \doteq 1$

2. 回转椭球波函数集 $\{\psi_i(t)\}$ 的由来

Slepian、Pollak 和 Landau 为了回答 C. E. Shannon 在 § 1.1 中提出的问题, 特作如下关于式 (1.1.13) 至式 (1.1.16) 中 $S_{o,n}(C, \eta)$ 的代换

$$\psi_n(C, t) = \frac{\sqrt{\lambda_n(C)}}{u_n(C)} S_{o,n}(C, 2t/T), \quad (1.3.8)$$

其中

$$\lambda_n(C) = \frac{2C}{\pi} [R_{o,n}^{(1)}(C, 1)]^2. \quad (1.3.9)$$

还有 (1.1.16)

$$[u_n(C)]^2 = \int_{-1}^1 [S_{o,n}(C, t)]^2 dt.$$

经如上变量代换, 那么式 (1.1.15) 则成了式 (1.3.4); 设 $T/2 \rightarrow \infty$, 则 $C \rightarrow \infty$, 于是式 (1.1.15) 成为式 (1.3.3); 式 (1.1.13) 成为式 (1.3.5).

在式 (1.1.14) 中, 令

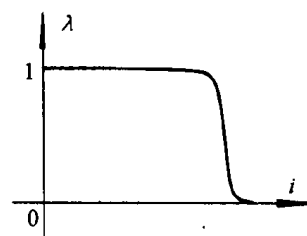


图 1.4 λ_i 曲线[序4].