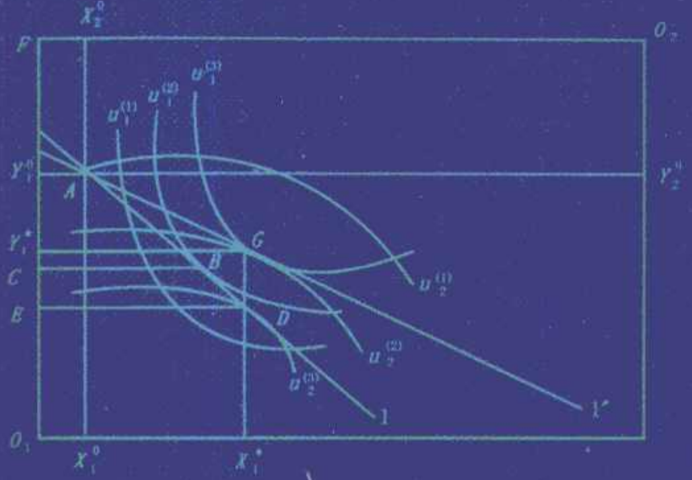
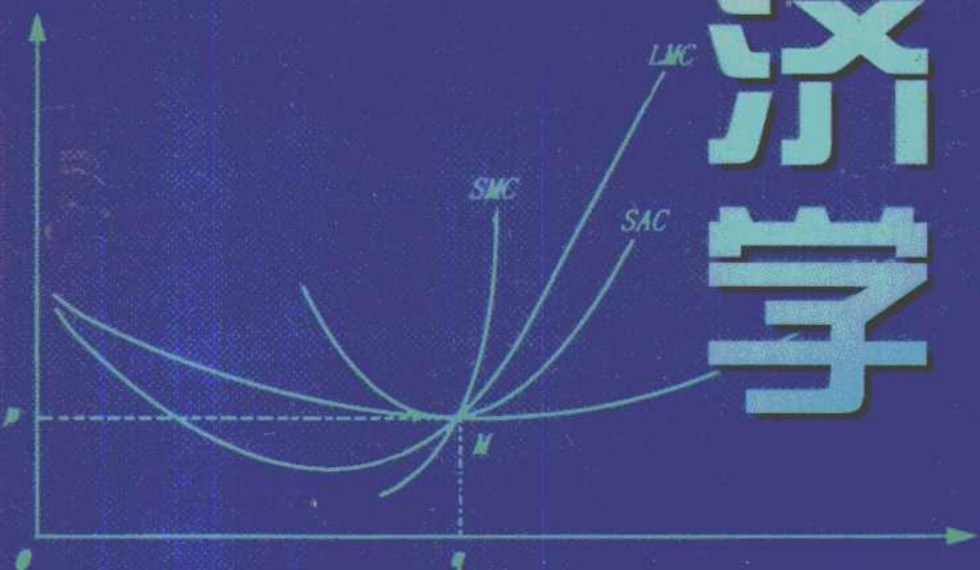
数理经济学



李庆华 编著



中国石化出版社

13

数理经济学

李庆华　编著

中国石化出版社

内 容 提 要

本书首先从均衡系统出发，介绍了比较静态分析方法和极大化分析方法，并应用这些方法对消费者的行为、生产者的行为进行了局部均衡分析，在此基础上介绍了瓦尔拉斯一般均衡理论，从而形成了数理经济分析的基本框架；其次，在对福利经济问题进行规范分析的基础上，介绍了常用的微观经济政策；再次，介绍了投入产出分析的基本理论；最后，介绍了进行经济实证分析和建立经济模型所必须掌握的计量经济学的基础理论。

本书适合于高等院校经济类和数学类的师生、从事经济分析、经济管理等相关人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

数理经济学/李庆华编著. —北京：中国石化出版社，2000. 7

ISBN 7-80043-968-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. 李… Ⅲ. 数理经济学 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 65686 号

中国石化出版社出版发行

北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编：100011 电话：（010）84271859

http://press.sinopec.com.cn

海丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

787×1092 毫米 16 开本 14.25 印张 351 千字 印 1－1500

2000 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 1 次印刷

定价：22.00 元

第一章　均衡系统与比较静态分析

各种不同的经济学领域，如生产经济学、消费者行为、国际贸易、商业循环、收入分析等，在形式上具有惊人的相似之处。这些不同领域的不同理论的主要特征之间所存在的相似性，表明了在这些特定的理论之下存在着更为基础的一般理论。数理经济学就是运用数学工具，采用均衡分析、比较静态分析、最大化分析和动态分析等方法，来研究这种一般的基础理论，并使各种经济理论统一于这种基础理论之下的经济学学科。均衡分析方法作为其他一切方法的总揽，乃是数理经济学能把各种经济理论统一于对均衡系统及其变化的分析的一个最基本的方法。本章就从这一方法着手对均衡系统进行一般的表述，并研究参数或经济条件的变化对均衡系统的影响，即进行比较静态分析。

第一节　均衡系统

均衡，亦称平衡，是物理学中的一个概念，指一个物体受到各种外力作用而处于合外力为零的相对静止的状态。把均衡概念应用于经济分析，便可以得到经济均衡的概念。所谓经济均衡是指这样一种状态：在一定经济条件下，经济决策者在权衡抉择其使用资源的方式的时候，认为重新调整其配置资源的方式已不可能获得更多的好处，从而不再改变其经济行为；或者相互矛盾、相互依存的力量势均力敌，所考察的事物或经济行为不再发生变化。

在考察各行为主体的经济关系时，有许多变量，这些变量是相互依存、相互联系的，它们之间可能形成某种形式的函数关系。由于各行为主体的经济行为是在一个既定的经济环境中实现的，所以经济变量间的函数关系也只能在一个既定的环境中成立，这些经济环境可以用参数表示，于是某行为主体的经济行为可用下式表示：

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0$$

其中 i 表示某个或某种行为主体，$x_1,\cdots,x_n$ 表示变量，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 表示参数。

各行为主体的经济行为不仅在一定的环境中实现，而且它们之间是相互依存、相互联系的，只有在一定的条件或参数下，各变量趋于一致的时候，才达到一个均衡状态。用数学语言表示就是将各函数关系联立起来，形成一个方程组：

$$\begin{cases}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0\\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0\end{cases}\tag{1}$$

或者更为简洁地写成：

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=0,i=1,2,\cdots,n$$

如果方程组（1）有确定解，则称方程组（1）为均衡系统。

在方程组（1）中，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为变量，$\alpha_j(j=1,2,\cdots,m)$称为参数。显然，各行为主体的变量和参数的个数不一定是相同的，在这种情况下，可以用0来补充，以保证系统中各方程在形式上的一致性。

假定方程组（1）中的各方程是独立的，则在方程组（1）是均衡系统的前提下，方程的个数不能大于n，但如果小于n，系统将是不确定的。

对于系统（1），相应于任何一组预先给定的参数$(\alpha_{10},\alpha_{20},\cdots,\alpha_{m0})$，可以认为它们能确定变量的一组唯一的值$(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$。这表明均衡系统（1）确定了$(\alpha_{10},\alpha_{20},\cdots,\alpha_{m0})$与$(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$的函数关系，设其显式为：

$$\begin{aligned}&x_i=g_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\\&(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{2}$$

需要说明的是：（2）式并不意味着能把未知数表示成参数的任何初等函数。

例 1：税收问题。考虑一个厂商，它面临一条给定的联系着价格和产出的需求曲线和一条给定的联系着总成本和产出的生产成本线。假定对这个厂商的单位产出征收t元税收。则这个厂商的利润可以写成：

$$\pi=xp(x)-c(x)-tx$$

其中：π表示利润，x表示产出，$xp(x)$是总收益，$c(x)$表示每个可能产出量x的最低总生产成本，tx表示厂商支付的总税收。

显然对于任何给定的税率，例如t_0，这个厂商将选择某个特定的产出进行生产和销售，设这个特定的产出为x_0，则$x_0=g(t_0)$所表示的函数相当于（2）中的函数。这就是说，每个税率存在着一个均衡产出。

假定这个厂商是理性的，其行为必定是在某个税率的条件下，选择使其净收益极大化的那个产出，用数学式子表示其经济行为，则有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\pi(x,t)}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial^2\pi(x,t)}{\partial x^2}<0\end{cases}\tag{3}$$

为了简化，假定（3）中的第二个式子恒成立，则厂商的行为方程是：

$$\frac{\partial\pi(x,t)}{\partial x}=0$$

即：

$$\frac{\partial}{\partial x}[xp(x)-c(x)]-t=0 \tag{4}$$

方程（4）就相当于均衡系统（1），在这里，由于只需确定一个未知数的值，因而只有一个方程。

对应于t的每一个值，包含x的结果方程都有一个相应的根，这个根就是在一定条件下（一定税率）的均衡值，即

$$x=g(t) \tag{5}$$

例 2：均衡价格或均衡量。考察一种商品或服务的市场，在市场上有两方在起作用：

对消费者而言，其行为可用需求曲线表示，在需求曲线里，引进一个参数α，用以表示消费者所处的经济条件或环境，用数学式表示为

$$D(x,\alpha)-p=0 \tag{6}$$

其中x表示需求量，p表示商品或服务的价格。$D(x,\alpha)-p=0$表示在价格p时，消费者的需求量x是使其效用达到最大的需求量。

对生产者而言，其行为可用供给曲线表示，在供给曲线中，引进一个参数β用以表示商品或服务的生产者所处的经济环境如劳动生产率等。用数学式表示为

$$S(x,\beta)-p=0 \tag{7}$$

其中x表示生产量，p表示价格，$S(x,\beta)-p=0$表示在价格p时，生产者所提供的产出x是使其成本最小的产出。

均衡价格必定是使消费者和生产者都感到满意的价格，即联立方程（6）和（7）的价格：

$$\begin{cases} D(x,\alpha)-p=0 \\ S(x,\beta)-p=0 \end{cases} \tag{8}$$

（8）式相当于均衡方程组（1），即（8）式是该商品或服务市场的均衡系统，设（8）式的解为：

$$\begin{cases} \bar{p}=g_1(\alpha,\beta) \\ \bar{x}=g_2(\alpha,\beta) \end{cases} \tag{9}$$

则方程组（9）相当于方程组（2），当然在这里假定方程组（8）是一个均衡系统。

然而，第一，方程组（8）或更一般地，方程组（1）是否有确定解呢？这是解的存在性与唯一性问题；第二，方程组（8）或（1）中的参数变化会引起变量怎样变化呢？这是系统的比较静态分析问题；第三，当实际或初始状态并非均衡状态时，方程（8）或（1）能否自动回归到均衡状态呢？这是均衡系统的稳定性问题。本书将对上述问题进行讨论。

第二节　比较静态分析

在（1）式中的各经济变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的时间状态都相同的条件下，如果参数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 不变，则均衡系统（1）是静态系统。对静态系统的解的存在性与唯一性的分析属于静态分析的范畴。但是对任何均衡系统而言，其外界条件不是一成不变的，相反，其外界条件如市场条件、宏观和微观经济政策等总是处在不断变化中，用数学语言来讲，就是（1）式的参数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是会变化的。那么，参数的变化，对均衡有何影响呢？或变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的均衡值如何随 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的变化而变化呢？用数学语言表示，就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 对参数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的偏导数：

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}(i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,m)$$

或者导数

$$\frac{dx_i}{d\alpha_j}(i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,m)$$

的值是多少或至少其符号是正号还是负号呢？对此作出判断从而对均衡点如何移动进行分析，并在此基础上对外界条件如市场条件、宏观和微观经济政策对各经济行为主体的决策有何影响进行判断就是比较静态分析。

现对均衡系统（1）进行比较静态分析，不妨设 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}$ 是均衡系统（1）的均衡值，α_1 发生变化，而其他参数不变。

对（1）式的每个方程进行微商，有：

$$\begin{cases} f'_{1x_1}(\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}) + f'_{1x_2}(\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}) + \cdots + f'_{1x_n}(\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}) = -f'_{1\alpha_1} \\ f'_{2x_1}(\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}) + f'_{2x_2}(\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}) + \cdots + f'_{2x_n}(\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}) = -f'_{2\alpha_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{nx_1}(\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}) + f'_{nx_2}(\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}) + \cdots + f'_{nx_n}(\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}) = -f'_{n\alpha_1} \end{cases} \qquad (10)$$

其中：

$$f'_{ix_j}=\frac{\partial f_i(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n};\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}{\partial x_j}$$

$$f'_{i\alpha_j}=\frac{\partial f_i(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n};\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}{\partial \alpha_j}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n)$$

$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_1}(j=1,2,\cdots,n)$是方程（1）中当参数$\alpha_1$变化，而其他参数不变时，$x_j$对$\alpha_1$的导数即是$x_j$对参数$\alpha_1$的偏导数。

令

$$f'_{i\bar{x}}=(f'_{ix_1},f'_{ix_2},\cdots,f'_{ix_n})\Bigg|_{\substack{x_1=\overline{x_1}\\ x_2=\overline{x_2}\\ \cdots\cdots\\ x_n=\overline{x_n}}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial\alpha_1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\\ \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_1}\\ \cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial\alpha_1}\end{bmatrix}_{(x_1=\overline{x_1},x_2=\overline{x_2},\cdots,x_n=\overline{x_n})}$$

则（10）可以写成

$$f'_{i\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\alpha_1}=-f'_{i\alpha_1}\qquad(11)$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

又令

$$f'_{\bar{x}}=\begin{bmatrix}f'_{1\bar{x}}\\ f'_{2\bar{x}}\\ \cdots\\ f'_{n\bar{x}}\end{bmatrix},f'_{\alpha_1}=\begin{bmatrix}f'_{1\alpha_1}\\ f'_{2\alpha_1}\\ \cdots\\ f'_{n\alpha_1}\end{bmatrix}$$

则（11）式可以写成在形式上更为简单的式子：

则

$$f'_{\bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha_1}=-f'_{\alpha_1} \tag{12}$$

显然（12）式是关于$\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha_1}$的线性方程，若$f'_{\bar{x}}$是非奇异的，则

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha_1}=-[f'_{\bar{x}}]^{-1}[f'_{\alpha_1}] \tag{13}$$

其中$[f'_{\bar{x}}]^{-1}$是$f'_{\bar{x}}$的逆矩阵。

如果用行列式表示，则

$$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_1}=-\frac{\sum_{i=1}^{n} f'_{i\alpha_1}\left|f_{ij}\right|}{\left|f'_{\bar{x}}\right|} \tag{14}$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

其中$\left|f_{ij}\right|$是矩阵$f'_{\bar{x}}$的第i行第j列的元素的代数余子式。

比较静态分析就是要对（13）式或（14）式的存在性、唯一性及其值进行分析，从而研究均衡状态$(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})$的移动。

下面对上节的两个具体的均衡系统进行比较静态分析。

例 1：税收问题。

对均衡系统（4）

$$\frac{\partial}{\partial x}[xp(x)-c(x)]-t=0$$

关于参数t进行微商，得

$$\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}[xp(x)-c(x)]\}\frac{\partial x}{\partial t}=1$$

若

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[xp(x)-c(x)]\neq 0$$

则

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[xp(x)-c(x)]}$$

根据（3）式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[xp(x)-c(x)]<0$$

所以

$$\frac{\partial x}{\partial t}<0 \tag{15}$$

（15）式表明，厂商的均衡产量与税率成反方向变化。即提高税率会使均衡产量下降，降低税率会使均衡产量提高。

例 2：均衡价格或均衡量。

对均衡系统（8）

$$\begin{cases} D(x,\alpha)-p=0 \\ S(x,\beta)-p=0 \end{cases}$$

关于参数α进行微商，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}-\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}=-\dfrac{\partial D}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial S}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}-\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}=0 \end{cases} \tag{16}$$

把$\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}$和$\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}$作为未知数，解方程组（16）得

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}=-\dfrac{\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial D}{\partial x}-\dfrac{\partial S}{\partial x}}=\dfrac{\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}} \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}=-\dfrac{\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}\dfrac{\partial S}{\partial x}}{\dfrac{\partial D}{\partial x}-\dfrac{\partial S}{\partial x}}=\dfrac{\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}\dfrac{\partial S}{\partial x}}{\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}} \end{cases} \tag{17}$$

假定参数α是刺激需求的因素如收入水平、竞争对手的价格等，即假定$\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}>0$，则（17）式表示：$\left.\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}$是大于或小于零取决于$\dfrac{\partial S}{\partial x}$大于或小于$\dfrac{\partial D}{\partial x}$；而$\left.\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}$的

符号则由$\frac{\partial S}{\partial x}$与$\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial D}{\partial x}$是否同号决定。

对（8）式关于参数β进行微商得

$$\begin{cases}\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial p}{\partial \beta}=0\\ \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial p}{\partial \beta}=-\frac{\partial S}{\partial \beta}\end{cases} \tag{18}$$

解出$\frac{\partial x}{\partial \beta}$和$\frac{\partial p}{\partial \beta}$得

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial x}{\partial \beta}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}=-\dfrac{\frac{\partial S}{\partial \beta}}{\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial D}{\partial x}}\\ \left.\frac{\partial p}{\partial \beta}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}=-\dfrac{\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial \beta}}{\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial D}{\partial x}}\end{cases} \tag{19}$$

假定参数β是影响供给的因素如生产的技术水平、劳动生产率等。当β变化时，供给曲线会与之成反方向变化，即$\frac{\partial S}{\partial \beta}<0$。这就是说，当生产的技术水平或劳动生产率等提高时，从坐标系反映出来就是供给曲线向下移动，如图 1-1 所示。

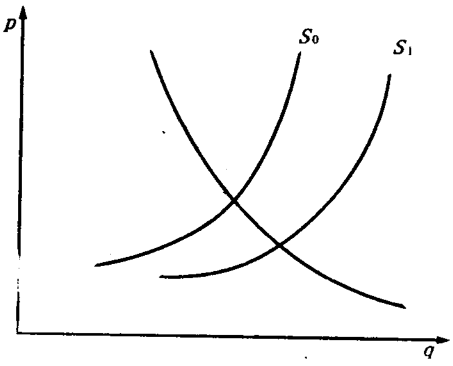


图 1-1 β增加时供给曲线的移动

在图 1-1 中，当供给曲线由S_0移动到S_1时，均衡价格下降而均衡产出上升。

注意$\frac{\partial p}{\partial \beta}$与$\frac{\partial S}{\partial \beta}$是不同的，前者表示均衡价格受$\beta$的部分影响，后者表示供给曲线

受 β 的偏影响。

由于 $\dfrac{\partial S}{\partial \beta}$ 为负号，由（19）式易知：$\dfrac{\partial x}{\partial \beta}$ 的符号取决于 $\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}$ 的符号，而 $\dfrac{\partial p}{\partial \beta}$ 的符号由 $\dfrac{\partial D}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}$ 是否同号决定。

根据均衡系统的假定，在一般情况下，理性的消费者的行为将使需求曲线向下倾斜，即 $\dfrac{\partial D}{\partial x}<0$；而理性的生产者的行为将使供给曲线向上倾斜，即 $\dfrac{\partial S}{\partial x}>0$。所以，在一般情况下有如下三个式子成立：第一，$\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}>0$；第二，$\dfrac{\partial S}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}$ 同号；第三，$\dfrac{\partial D}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial D}{\partial x}$ 异号。

故

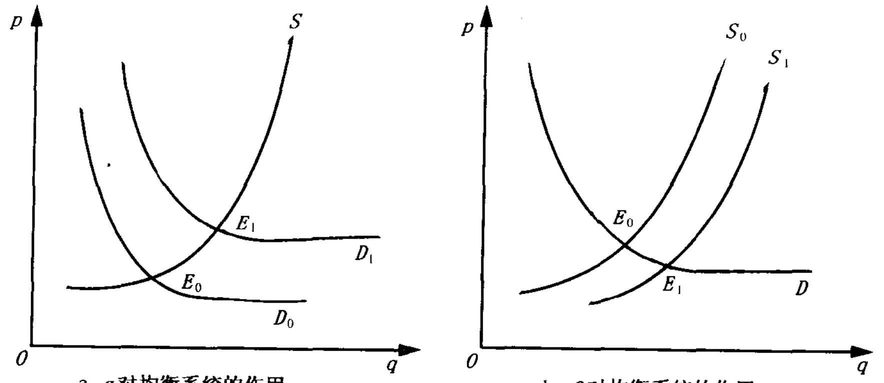
$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}>0 \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}>0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial x}{\partial \beta}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}>0 \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial \beta}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ p=\bar{p}}}<0 \end{cases} \tag{21}$$

（20）式的经济意义是：如果 α 是刺激需求的一个综合或非综合因素，那么 α 的上升，一方面导致均衡产出增加，另一方面则导致均衡价格提高。可见刺激需求对经济的影响是双面的即既有正影响又有负作用。正影响是可增加产出扩大就业，而负作用是物价上涨。

（21）式的经济意义是：如果 β 是刺激供给的因素如劳动生产率，那么 β 的上升，不仅可以增加均衡产出量而且使均衡价格下降。可见，提高劳动生产率、改进生产技术对社会经济在产出量方面和价格方面的影响都是有利的。

参数 α 与参数 β 对均衡系统的影响可用图 1-2 表示。



a. α对均衡系统的作用　　b. β对均衡系统的作用

图 1-2　参数α、β对均衡系统的作用

作为本节的结束需要提醒读者注意的是：第一，$\frac{\partial D}{\partial \alpha}$是表示需求曲线的移动，而$\frac{\partial D}{\partial x}$是表示沿一条需求曲线的变化；第二，$\frac{\partial D}{\partial \beta}$是表示供给曲线的移动，而$\frac{\partial S}{\partial x}$是表示沿一条供给曲线的变化。

第三节　极大化行为分析

均衡系统（1）的每个方程往往表示某个或某类行为主体的经济行为。这些行为主体可能是消费者和生产者等。在市场经济条件下，理性的行为主体一般是遵循某种极大化原则的。比如对消费者来说，就是在一定的收入条件和价格条件下使自己得到最大的满足。对企业或厂商而言，就是在一定的条件下使利润最大。所以，可不失一般性假设均衡系统（1）中的方程是某个极大化行为的结果。如此，变量的均衡值就是某个极值点。

考虑一个新的变量v，v定义为决策变量的单值函数：

$$v = v(x_1, x_2, \cdots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \tag{22}$$

其中v至少存在二阶偏导数并且在一个足够的区间内连续（对普通的经济问题，一般是有限离散型的，根据数学中的有关定理，可构造一个二阶偏导数存在并且连续的单值函数，使之在相应的点与离散的实际点吻合）。

如果对于任意预先给定的诸α_i的值：$\alpha_i = \alpha_{i0}$都存在一组x的值$(x_{10}, \cdots, x_{n0})$，对应于它的函数值v取得极大值，则在$x_0 = (x_{10}, \cdots, x_{n0})$附近，有

$$v(x_1, \cdots, x_n, \alpha_{10}, \cdots, \alpha_{m0}) \leqslant v(x_{10},, \cdots, x_{n0}, \alpha_{10}, \cdots, \alpha_{m0}) \tag{23}$$

作为一种较简单的记法，可把（23）式写成

$$v(x,\alpha_0) \leqslant v(x_0,\alpha_0) \tag{24}$$

其中， $x=(x_1,\cdots,x_n)$， $\alpha_0=(\alpha_{10},\cdots,\alpha_{m0})$

为了讨论行为主体的极大化行为，先研究极大值的条件。

设 $v=f(t)$ 是一个在闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上处处都具有连续二阶导数的确定的函数，v 在 t_0 处取得极大值。即对 t 的邻近值来说

$$f(t) \leqslant f(t_0)，\quad a < t_0 < b \tag{25}$$

为使（25）式成立，条件

$$f'(t_0)=0 \tag{26}$$

和条件

$$f''(t_0) \leqslant 0 \tag{27}$$

是必要的。

其中（26）可由下面的方式导出，由中值定理得

$$f(t)-f(t_0)=(t-t_0)f'[t_0+\theta(t-t_0)] \quad (0<\theta<1)$$

若
$$f'(t_0)>0$$

则根据连续性假定，必存在一个区间

$$t_0-q<t<t_0+q$$

使在这个区间内

$$f'(t)>0$$

处处成立。这样，在区间 (t_0-q,t_0+q) 内， $f(t)$ 是严格递增的。

故当 $t>t_0$ 且 $t\in(t_0-q,t_0+q)$ 时，有

$$f(t)>f(t_0)$$

这与 t_0 是极值点矛盾。

可见 $f'(t_0)>0$ 不成立。

同理 $f'(t_0) < 0$ 也不成立。

因此 $$f'(t_0) = 0$$

第二个必要条件可用相似的方法导出。根据有余项的泰勒展式可得

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} f''[t_0 + \theta_1(t - t_0)]$$
$$(0 < \theta_1 < 1)$$

由（26）式得

$$f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^2}{2} f''[t_0 + \theta_1(t - t_0)] \quad (0 < \theta_1 < 1) \tag{28}$$

若 $f''(t_0) > 0$

则根据连续性假设，必有区间 $(t_0 - q_1, t_0 + q_1)$ 使得在该区间内有

$$f''(t) > 0$$

由（28）式得

$$f(t) - f(t_0) > 0$$

这与 $f(t_0)$ 的极大性相矛盾。所以

$$f''(t_0) \leqslant 0$$

若把（27）式中的等号去掉时的函数的极大值定义为与正则极大值，则使 v 在 t_0 取正则极大值的充分必要条件是

$$f'(t_0) = 0$$

和

$$f''(t) < 0 \tag{29}$$

同样，在相同假定条件下函数具有极小值的必要条件

$$f'(t_0) = 0$$

和

$$f''(t) \geqslant 0 \tag{30}$$

而一个正则极小值的充分必要条件是

$$f'(t_0)=0$$

和

$$f''(t)>0 \tag{31}$$

下面讨论多元函数的极大值条件。

令 $v=v(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一个在开区域 S 上具有各种连续二阶偏导数的确定函数。对于充分接近 $x_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 的值 x，如果 $v(x)\leqslant v(x_0)$，则称 v 在 x_0 处取得极大值。

使 v 在 x_0 处取得极大值的必要条件是

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_i}=0,(i=1,\cdots,n)$$

和

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j\leqslant 0$$

其中 $(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 是任意的 n 元实数组。

令

$$v'_{i0}=\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_i}$$

$$v''_{ij0}=\frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x_i\partial x_j}$$

则必要条件可以写成

$$v'_{i0}=0\quad(i=1,\cdots,n) \tag{32}$$

和

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}v''_{ij0}h_ih_j\leqslant 0 \tag{33}$$

而一个正则极大值的充分必要条件是

$$v'_{i0}=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

和

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v''_{ij0} h_i h_j < 0 \tag{34}$$

其中 $h_i(i=1,\cdots,n)$ 不全为零。

设 $x_i = x_{i0} + th_i(i=1,\cdots,n)$； $h_i(i=1,\cdots,n)$ 可取任意不全为零的值。则（32）式、（33）式和（34）式均可利用一元函数的相类似的结论予以证明（作为练习留给读者）。

把上述结论应用于（24）式中可知：使（24）式成立即使 $v(x,\alpha_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值的必要条件是

$$v'_{x_{i0}} = \frac{\partial v(x_{10},\cdots,x_{n0},\alpha_{10},\cdots,\alpha_{m0})}{\partial x_i} = 0 \tag{35}$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

而且

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v''_{x_i x_j 0} h_i h_j \leqslant 0 \tag{36}$$

其中 $v''_{x_i x_j 0}$ 表示 $v(x,\alpha_0)$ 对 x_i 和 x_j 在 $(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 处的二阶偏导数， $h_i(i=1,\cdots,n)$ 为任意实数。

对于一个严格的极大值来说，（36）式所表示的条件可以写成

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v''_{x_i x_j 0} h_i h_j < 0 \tag{37}$$

其中 $h_i(i=1,\cdots,n)$ 不全为零。换言之，（37）式左边的关于 $h_i(i=1,\cdots,n)$ 的对称二次齐次式必定是负定的。对于正则极大值而言，（35）式加上（37）式不仅是必要条件而且还是充分条件。

下面利用(35)式和(36)式或者(35)和(37)式来讨论某行为主体的极大值点即均衡点的偏移。从数学角度来看，对这个问题的讨论就是研究当某个参数 α_k $(k=1,\cdots,m)$ 变化时，决策变量 x_i $(i=1,\cdots,n)$ 如何变化的问题，而对此的讨论又可以转化为对变化率