

《自修数学》小丛书

拓 扑 学

——橡皮膜上的几何学

[英] D. A. 约翰逊 著
W. H. 格伦



科学出版社

《自修数学》小丛书

拓 扑 学

——橡皮膜上的几何学

(英) D. A. 约翰逊 著
W. H. 格伦

刘远图 译

科 学 出 版 社

1 9 8 0

内 容 简 介

本书是英国《自修数学》小丛书中的一本，它用通俗浅显的语言，形象生动的举例，介绍了数学中比较抽象的一个分支——拓扑学的基本概念及其用场，是给具有中等文化程度的读者课外(或业余)阅读的一本通俗读物，对开阔读者眼界、增长数学知识颇有利益。

该书可供中学师生、家长及知识青年阅读。

Donovan A. Johnson

William H. Glenn

TOPOLOGY

The Rubber-Sheet Geometry

John Murray London, 1964

拓 扑 学

——橡皮膜上的几何学

[英] D. A. 约翰逊 著
W. H. 格伦

刘远图 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年10月第一版 开本：787×1092 1/32

1980年10月第一次印刷 印张：2

印数：00001—27,150 字数：35,000

统一书号：13031·1347

本社书号：1870·13—1

定价：0.20元

出版说明

英国出版的《自修数学》小丛书 (*Exploring Mathematics On Your Own*) 是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物。该丛书自 1964 年初版后,于 1974 年、1976 年多次再版印刷。为开阅读者眼界、增长数学知识,我们将选其中的一部分翻译出版,其目次如下:

大家学数学

测量世界

数型

毕达哥拉斯定理

统计世界

集合、命题与运算

数学逻辑与推理

曲线

拓扑学——橡皮膜上的几何学

概率与机率

向量基本概念

有限数学系统

无限数

矩阵

大家都来学点拓扑学

学习数学,就象读一本侦探小说,象在一个山洞中探险一样,也是一个猎险. 数学里面有许许多多令人惊奇不已的东西,费人思索的难题和技巧,还有许多有趣的思想. 如果你打算在数学上自己作出一些探索,那么当你发现新的概念时,一定会兴高采烈. 数学研究最不平凡的一个分支是拓扑学. 当今许多数学家还在拓扑学方面发现了新的成果.

这本关于拓扑学的小册子,你不能象看小说那样来读. 你必须慢慢钻研. 当你第一次读到一句话或者读完一节但又感到并不完全理解时,你不必为此沮丧. 应当有耐心,坚持下去. 读数学书籍应当养成一种习惯,就是旁边一定要放一支铅笔和一张纸. 该用就用,毫不犹豫. 一定要做练习,画图,回答提出的问题,这样才能使你容易理解你读的内容. 我们希望,这本小册子能使你同别人一起,分享研究数学的欢乐.

目 录

一、奇异的拓扑学世界	1
1. 什么是拓扑学?	1
2. 拓扑学和几何学	2
3. 拓扑学里几何图形是怎样变化的?	5
4. 波斯的哈里发和他的女儿的求婚者	9
5. 有趣的莫比乌斯带	12
二、拓扑学会解答一些有趣的问题	18
1. 七桥问题和拓扑学	18
2. 什么样的网络才可以通过?	19
3. 欧拉关于网络的发现	21
4. 网络,区域,一个重要的公式	25
5. 关于网络的欧拉定理	26
6. 地图四色问题	27
三、拓扑学怎样看待我们所在的三维空间?	30
1. 拓扑图形分类	30
2. 数学家创造的一种怪瓶子	34
3. 用欧拉公式考察三维图形	35
四、利用拓扑学变戏法	38
1. 结绳和拓扑学	38
2. 纽孔挂物	39
3. 海滨脱衣	41

4. 怎样把三个环连结在一起	41
5. 两个人能分得开吗?	41
6. 纽扣和珠子	42
7. 瑞士学校问题	43
8. 怎样分农场?	44
9. 怎样摆硬币?	44
10. 马路清扫工的路线	44
11. 怎样从硬纸片上解下带纽扣的绳子?	45
12. 怎样取下纸的长统靴?	45
五、拓扑学的模型演示	49
练习答案	51

一、奇异的拓扑学世界

1. 什么是拓扑学？

你可曾听说过一张纸只有一面？为什么数学家认为环形的炸面圈和花瓶相比，要比炸面圈和栗子相比更相似一些呢？在什么情况下三角形和圆是一样的呢？左脚穿的鞋子能不能在空间掉换位置以后把它变成右脚穿的鞋子呢？这就是拓扑学要回答的一些问题。听起来这一点也不象是数学，是不是？但是这却是数学中最新和最令人感兴趣的分支之一。既然拓扑学讨论的是手套的里面或者左右脚穿的鞋子的差别这样一些你挺熟悉的东西，所以你并不会感到很生疏。加上拓扑学里面还有许许多多不可能做到的事情、技巧和难题，学习起来一定会是挺有趣味的。

拓扑学是数学的一个分支，它判定什么是可能做到的。它将告诉我们能不能把一个内胎里面朝外翻转过来。你可能会想，这是一个简单的问题。研究拓扑学的专家说这是可能的，但是真的要拿来一个内胎，谁也没有办法把它翻转过来。

在拓扑学里，我们从来就不提这样的问题：“有多长？”“有多远？”或“有多大？”而是问：“在哪儿？”“在什么的中间？”“在里面还是在外面？”当一个旅行者到达他从来没有到过的

生疏的道路交叉口,而且又不知道应当朝哪个方向前进时,他决不会问:“这里离巴尔希斯特还有多远?”而“从这里还要走三英里”这样的回答,对他也无济于事,因为他面前有好几条路!他最好是问:“到巴尔希斯特怎么走?”“沿这条路走到一个路口,然后向左转弯”,这个回答将告诉他怎样走才能到达巴尔希斯特.听起来这个回答里面没有什么数学,因为它既没有涉及距离,也没有说明道路是直的还是弯曲的.但是拓扑学却正好是这样来回答问题的.

2. 拓扑学和几何学

拓扑学有点象几何学,这是因为它研究的也是线、点和图形.但是拓扑学里讲的图形同几何学中的图形不一样,它可以改变大小和形状.因此,有的人把拓扑学叫做“橡皮膜上的几何学”(或“橡皮几何学”).拓扑学最感兴趣的是图形的

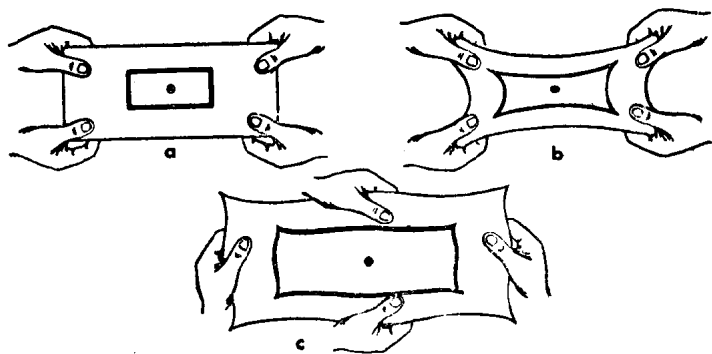


图 1

位置，而不是它的大小或者形状。它所研究的图形位置的性质，不因图形大小和形状的改变而改变。例如，你在一块橡皮膜上画一个正方形，再在正方形内部点一点。不管你怎样拉橡皮膜，点总是在正方形的内部。这就是说，拓扑学是研究图形不因拉伸或者弯曲而改变的几何性质的学科。

在拓扑学里，距离是没有什么意义的。相隔一英寸的两点，只要一拉伸就很容易变成相距两英寸。同样，角的大小也没有意义，因为你可以紧拉橡皮膜，使 15° 的角变成 35° 的角。甚至直线在拓扑学里也没有意义，因为只要一拉橡皮膜，直线 AB

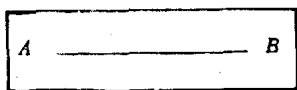


图 2

就会变成曲线：

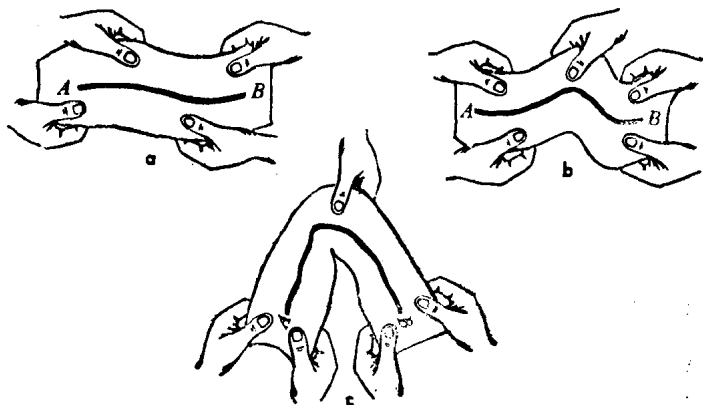


图 3

这里,直线不仅仅变成了曲线,而且长度也变了。

通常我们总是把钥匙这样一类东西,看成是坚硬而又不能弯曲的。它保持一定的形状,而且年复一年总是能开开锁,尽管这把钥匙实际已经发生了变化。当一架飞机腾空而起飞向远方,看起来它变得愈来愈小了。但是我们知道,不管飞机飞到哪里,它的大小还是原来那样。欧几里得几何是研究大小不变的物体的学科,而拓扑学是研究运动中大小和形状都发生变化的物体的学科。没有不能弯曲的物体,每一件东西的大小、形状和位置都可以改变,这就是拓扑学思考问题的出发点。

我们不妨把一条线想象成一段细绳子。线上的一个点就好像细绳上一个结,不管你怎样把这条线扭绞、拉伸或且弯曲,这个点还是在那条线上。我们还说线是连续的,线上没有洞眼。当一条线穿过另一条线时,这条线穿过另一条线的一个点。这就是说,如果象下图那样,画一条线 CD 经过线 XY , 线 CD 一定经过线 XY 上的一个点

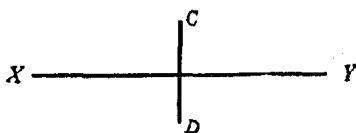


图 4

看来,在橡皮几何里,线和图形的许许多多性质都变了,你可能连想也想不出还有什么性质是保持不变的。这种看法却是不对的。我们再来看看图 2 里的线 AB 吧! 不管我们怎样拉伸橡皮膜或者弯曲它,从 A 到 B 的道路只有一条,即从 A

到 B 本身不相交的道路。这条线或者道路可以比图 3 里弯曲得很厉害，变得更长，但是从 A 到 B ，仍然只有一条线或者道路。拓扑学里，象 AB 这样的道路或者线，叫做“弧 AB ”。

3. 拓扑学里几何图形是怎样变化的？

前面我们讲的象 AB 那样简单的线的问题，同样适用于研究形成象圆或三角形这样的几何图形的线。

让我们来看看，一块橡皮膜上的圆会发生什么变化。拉紧橡皮膜，圆就会变成下图中的形状。我们看到，圆的形状和

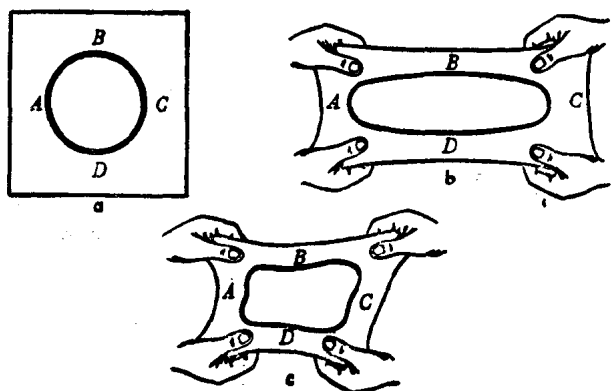


图 5

大小发生了明显的变化。但是，不管我们怎么去拉紧橡皮膜，图形仍然只有一条道路， $ABCD A$ 。我们还看到，从道路上任何一个地方出发，我们都会回到出发点，而且中间不和这条道路交叉。如果我们从 C 出发，经过 B 、 A 、 D ，就可以回到 C 。

在拓扑学里，所有这些图形有相同的名称。其中每一个都叫做简单闭曲线或者闭合道路，它们都是由两条弧 ABC 和 ADC 组成的，而这两条弧只有 A 和 C 是公共点。

让我们来看看下面的几何图形：

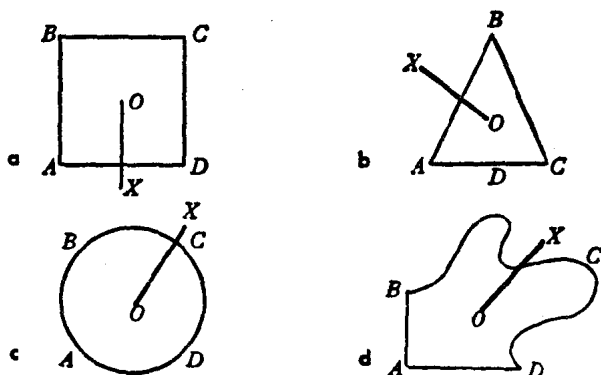


图 6

拓扑学认为这些图形都是简单的闭曲线。每一个图形都是由两条弧 ABC 和 ADC 组成的。尽管其中有的弧是直的，有的弧是弯的，但这些图形没有任何差别。

上面各个图形中，闭曲线内部有一点 O ，闭曲线外面有一点 X 。线 OX 通过闭曲线的一条弧。不管由于拉伸而引起图形发生多大变化， OX 总是经过曲线的一条弧。闭的弧 $ABCD A$ 没有洞眼， OX 不能偷偷地钻出来。

“一条线没有洞”，这种说法听起来好象很简单，但是这却是一个非常重要的概念。我们已经看到，线上没有洞这个概念被称为连续。实际上，没有人知道一条线有洞，还是没有

洞。但是假定一条线没有洞，看来是比较合理的。

我们说，上面那些闭曲线把橡皮膜分成两个部分，一个是内部，一个是外部。你要从内部走到外部，不可能不通过闭曲线。不管你怎样改变形状，上面讲的总是对的。当你从外部到内部时，不管你怎样改变图形的形状，你总要通过这条线，所以我们把通过这条线这个事实，叫做一种不变的性质。在图形变形的条件下仍然保持不变的性质，拓扑学里叫做不变的性质。当我们改变一个图形的形状，例如把一条直线展成一条曲线，或者把一个正方形展成一个圆，我们就完成了一次变形。这种变形叫做拓扑变换。这种变形改变图形的大小和形状，但是并不形成一个新的拓扑图形。如果我们把一条线或者一个面切去一部分，撕裂它，或者把它折叠起来，这样的改变就会使线或者面获得新的性质。因此，拓扑变换不允许切割、撕裂、折叠或者穿孔。

对于圆 $ABCD$ 来说，它还有另外一个不变的性质，这就是点 A 、 B 、 C 、 D 的次序是不变的。线 AB 有什么不变的性质呢？不管你怎么拉伸，从 A 到 B 自身不相交的道路只有一条。前面我们已经看到，拓扑学里圆可以变成椭圆或者正方形，直线可以变成曲线。但是，如果我们象图 7 那样，把线 AB 上的点 A 和 B 合在一处，我们得到的是一个新图形，即闭曲线。

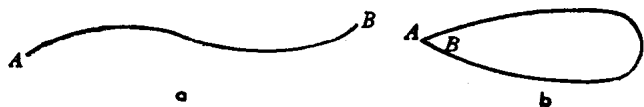


图 7

同样,如果我们象图 8 那样,从圆上切去一段弧,闭曲线就会变成线。

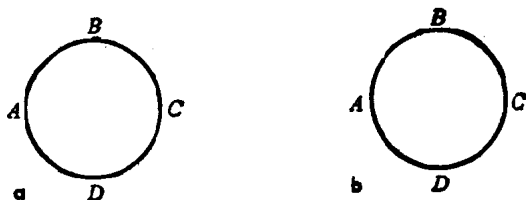


图 8

这两种变形都不是变换,因为已经形成了新的拓扑图形。

我们在几何里学习的是有关图形的大小、形状、面积和角度的许多性质。当我们能够把一个图形叠合到另一个对应部分大小和形状完全相同的图形上时,我们说这两个图形全等。而由拓扑变换得到的图形,叫做等价图形。拓扑学里,尽管圆和正方形的大小很不一样,圆和正方形却是等价图形。这两种图形都有一个内部和一个外部。从内部走到外部,我们都得通过一条线。如果象下图那样把内部划上阴影线,我们很容易看到图形是怎样把图面分成两个区域的。



图 9

4. 波斯的哈里发和他的女儿的求婚者

关于内部和外部的概念,可以用来解决许多有趣的问题,象古老的故事里讲的那样,波斯哈里发就曾经用一个拓扑学问题去为他的漂亮的女儿选择一个丈夫.他的女儿有许许多多的求婚者,因此他决定挑选最善于解答问题的求婚者作他的女婿.向求婚者提出的第一个问题可以用图 10 来说明.问题是要求用线把写有相同数字的小圆圈连结起来,但是不准连结线彼此相交,而且不和图中已有的线相交.谁要是能正确地解答这个问题,那他就能同哈里发的女儿面谈.

这是一个简单的问题,它吸引着所有求婚者的兴趣.你试试看能不能解答这个问题.

但是谁想同哈里发的女儿结婚,还必须解出第二个问题.第二个问题也是要求用线把写有相同数字的小圆圈连结起来,但是不准连结线彼此相交,而且不和图中已有的线相交.

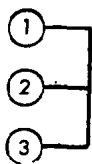


图 10

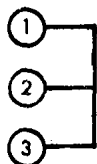
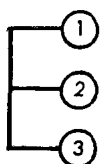
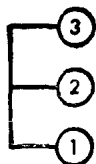


图 11



但是要注意,这个问题的图同第一题不同.(图 11)你能解答这个问题吗?

有人说,哈里发的女儿至死未嫁。关于这种说法,你是怎么想的呢?

第一个问题可以象下面这样来解。

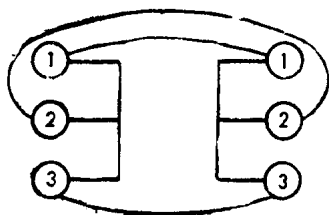


图 12

这多容易啊!

对于第二个问题,我们从 1 到 1、从 2 到 2 分别画线。现在我们得到一条简单的闭曲线。它的内部用阴影线表示。一个 3 在闭曲线的内部,而另一个 3 在外部。我们知道,从闭曲线的内部走到它的外部,又不允许和线相交,那是做不到的。这就是说,拓扑学告诉我们,要画这样一条不相交的线是不可能的。

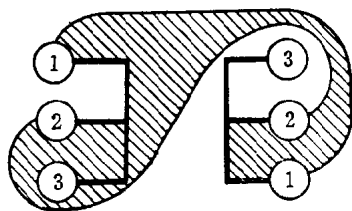


图 13

在哈里发的问题中,我们讨论的是只有一个内部和一个外部的简单闭曲线。拓扑学还要研究另外一些不是简单闭曲