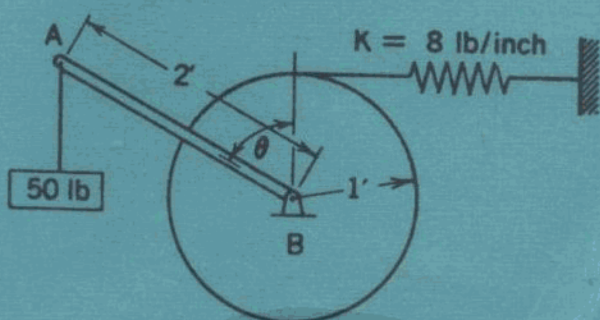
工程力學問題詳解

（動力學）

ENGINEERING MECHANICS

IRVING H. SHAMES

Professor and Head
Division of Interdisciplinary Studies
State University of New York at Buffalo



曉園出版社

修訂版　72年10月第一次印刷發行
74年6月第二次印刷發行

工程力學問題詳解
（動　力　篇）

定　價：新臺幣 210 元

原著者：SHAMES
譯著者：廖　明　亮
發行人：黃　旭　政
發行所：曉　園　出　版　社
臺北市青田街7巷5號
電　話：(02) 394-9931 三線
郵　撥：0745333-7號
門市部(1)：臺北市新生南路三段96號之三
電　話：3917012・3947375
門市部(2)：臺北市重慶南路一段61號地下樓
電　話：三一四九五八〇
門市部(3)：臺北縣淡水鎮英專路71號
電　話：六二一七八四〇
門市部(4)：臺中市西屯區文華路113號
電　話：(04)251-2759・254-6663
印刷所：遠　大　印　刷　廠
臺北市武成街36巷16弄15號
出版登記：局版臺業字第 1244 號
著作執照：臺內著字第　　號

72245

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徽的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

90w-677

1990.8.14

Shames 工程力學問題詳解

（動力篇目錄）

第十一章
質點運動學—簡單相對運動

11-1　一質量由四根彈簧所支承，該質量有水平 (x) 方向及垂直 (y) 方向的振動運動，運動形式為：

$x = 2\sin 2t$ mm/sec

$y = 2\cos(2t + 0.3)$ mm/sec

當 $t = 4$ sec 時，加速度向量為多少？相對於多少個重力加速度？

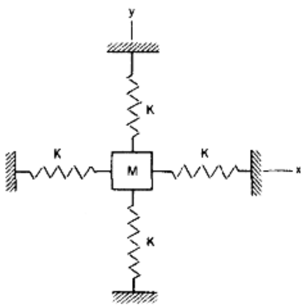


圖 11-1

解　$\mathbf{V}(t) = [4\cos 2t\,\mathbf{i} - 4\sin(2t + 0.3)\,\mathbf{j}]$ mm/sec

$\mathbf{a}(t) = [-8\sin 2t\,\mathbf{i} - 8\cos(2t + 0.3)\,\mathbf{j}]$ mm/sec^2

$\mathbf{a}(4) = [-8\sin 8\,\mathbf{i} - 8\cos(8.3)\,\mathbf{j}]$ mm/sec^2

$= (-7.915\,\mathbf{i} + 3.451\,\mathbf{j})$ mm/sec^2

$|\mathbf{a}| = 8.635$ mm/sec^2

$$\frac{|\mathbf{a}|}{g} = \frac{8.635}{9.81 \times 10^3} = 8.8 \times 10^{-4}$$

11-2　一質點沿一平面圓周(半徑為 $r = 1$ ft)而運動。OA之位移以時間為變數表示如下：

$\theta = 6\sin 5t$ rad

求 $t = \frac{1}{5}$ sec時速度之直角分量？

解 $\mathbf{OA}=r(\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j})$

$r=1$

$$\therefore \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

已知 $\theta=6\sin 5t$

$$\mathbf{V}_A=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}$$

$$=-\sin\theta[30\cos 5t]\mathbf{i}+\cos\theta[30\cos 5t]\mathbf{j}$$

$$=-[\sin(6\sin 5t)][30\cos 5t]\mathbf{i}+[\cos(6\sin 5t)][30\cos 5t]$$

代 $t=\dfrac{1}{5}$

$$\mathbf{V}_A=-[\sin(6\sin 1)][30\cos 1]\mathbf{i}+[\cos(6\sin 1)][30\cos 1]\mathbf{j}$$

$$=15.300\mathbf{i}+5.351\mathbf{j}\ \text{ft/sec}$$

$\dot{x}=15.3$ ft/sec，$\dot{y}=5.351$ ft/sec

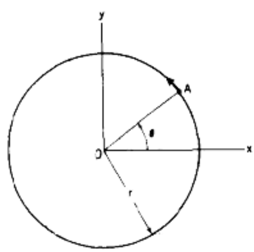


圖 11-2

11-3 一質點之初位置向量爲 $\mathbf{r}=5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$ m、其加速度爲：

$$\mathbf{a}=6t\mathbf{i}+5t^2\mathbf{j}+10\mathbf{k}\ \text{m/sec}^2$$

若其初速爲零，求此質點於 $t=10$ 秒時之加速度，速度，及位置。

解 當 $t=0$ $\mathbf{r}=5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$ m

$\mathbf{r}=0$

$\mathbf{r}=6t\mathbf{i}+5t^2\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ m/sec² (a)

可求得 $\dot{\mathbf{r}}(t)$：

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\int(6t\mathbf{i}+5t^2\mathbf{j}+10\mathbf{k})\,dt=3t^2\mathbf{i}+\frac{5}{3}t^3\mathbf{j}+10t\mathbf{k}+K_1$$

而當 $t=0$：

$$0=K_1$$

$$\mathbf{r}(t)=\frac{3t^3}{3}\mathbf{i}+\frac{5t^4}{12}\mathbf{j}+\frac{10t^2}{2}\mathbf{k}+K_2$$

當 $t=0$：

$$5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}=K_2$$

$$\therefore \mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+\frac{5}{12}t^4\mathbf{j}+5t^2\mathbf{k}+(5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}) \qquad \text{(c)}$$

從(c)，(b)和(a)式求得 $t=10$ 時之各值：

$$\mathbf{r}(10)=1005\mathbf{i}+4172\mathbf{j}+501\mathbf{k}\ \text{m}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(10)=300\mathbf{i}+1667\mathbf{j}+100\mathbf{k}\ \text{m/sec}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(10)=60\mathbf{i}+500\mathbf{j}+10\mathbf{k}\ \text{m/sec}^2$$

11-4　一質點於 $t=10$ sec，$t=5$sec 與 $t=2$sec 時之位置各為：

$$\mathbf{r}(10)=10\mathbf{i}+5\mathbf{j}-10\mathbf{k}\ \text{ft}$$

$$\mathbf{r}(5)=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}\ \text{ft}$$

$$\mathbf{r}(2)=8\mathbf{i}-20\mathbf{j}+10\mathbf{k}\ \text{ft}$$

若加速度之形式為：

$$\mathbf{a}=c_1t\mathbf{i}+c_2t^2\mathbf{j}+c_3\ln t\mathbf{k}\ \text{ft/sec}^2$$

c_1,c_2，與 c_3 為常數，求此質點於 $t=5$ sec 時之加速度。

解　$\mathbf{r}(10)=10\mathbf{i}+5\mathbf{j}-10\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(5)=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(2)=8\mathbf{i}-20\mathbf{j}+10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}=c_1t\mathbf{i}+c_2t^2\mathbf{j}+c_3\ln t\mathbf{k} \qquad \text{(a)}$$

由(a)式求得 $\mathbf{r}(t)$：

$$\mathbf{V}(t)=c_1\frac{t^2}{2}\mathbf{i}+\frac{c_2t^3}{3}\mathbf{j}+c_3t(\ln t-1)\mathbf{k}+K_1$$

$$\mathbf{r}(t)=\frac{c_1t^3}{6}\mathbf{i}+\frac{c_2t^4}{12}\mathbf{j}+\frac{c_3}{2}(\ln t-\frac{1}{2})t^2\mathbf{k}-c_3\frac{t^2}{2}\mathbf{k}+K_1t+K_2$$

則：

$$\mathbf{r}(10)-\mathbf{r}(5)=7\mathbf{i}+3\mathbf{j}-15\mathbf{k}$$

$$=\frac{c_1}{6}(1000-125)\mathbf{i}+\frac{c_2}{12}(10000-625)\mathbf{j}+\frac{c_3}{2}[(\ln 10-\frac{1}{2})(100)$$

$$-(\ln 5-\frac{1}{2})(25)]\mathbf{k}-\frac{c_3}{2}(100-25)\mathbf{k}+(K_1)(5) \qquad \text{(b)}$$

同時 $\mathbf{r}(5)-\mathbf{r}(2)=-5\mathbf{i}+22\mathbf{j}-5\mathbf{k}$

$$=\frac{c_1}{6}(125-8)\mathbf{i}+\frac{c_2}{12}(625-16)\mathbf{j}+\frac{c_3}{2}[(\ln 5-\frac{1}{2})(25)$$

$$-(\ln 2-\frac{1}{2})(4)]\mathbf{k}-\frac{c_3}{2}(25-4)\mathbf{k}+(K_1)(3) \qquad \text{(c)}$$

由(b)，(c)兩式消去 K_1:

(b)× 3

$$21\mathbf{i}+9\mathbf{j}-45\mathbf{k}=437.5c_1\mathbf{i}+2343.75c_2\mathbf{j}+116.284c_3\mathbf{k}+15K_1 \qquad \text{(d)}$$

(c)× 5

$$-25\mathbf{i}+110\mathbf{j}-25\mathbf{k}=97.5c_1\mathbf{i}+253.75c_2\mathbf{j}+14.908c_3\mathbf{k}+15K_1 \qquad \text{(e)}$$

(e)－(d)

$$-46\mathbf{i}+101\mathbf{j}+20\mathbf{k}=-340c_1\mathbf{i}-2090c_2\mathbf{j}-101.376c_3\mathbf{k}$$

$\therefore\quad c_1=0.1353\,;\quad c_2=-0.0483\,;\quad c_3=-0.1974$

因此　$\mathbf{a}(5)=0.6765\mathbf{i}-1.2075\mathbf{j}-0.3177\mathbf{k}$ ft/sec^2

11-5　圖所示為一理想之加速儀，用以度量加速度沿某方向之分量——在此情況下為 x 方向。B 質量裝置於加速儀之箱中使其沿線性彈簧作 x 方向之運動，當加速儀箱沿此方向加速度，質量即作 δ 之位移。此位置使彈簧力予 B 質量相等於箱之加速度。此位移 δ 即感應至一電感裝置而描出以時間為變數之函數。箱內流體用以消除質量之振動。若加速度與時間之關係如圖所示。求 10sec，30sec，45sec 後物體之速率。加速度 a_x 以 g 為單位，亦即以 32.2ft/sec^2 或 9.81m/sec^2 為單位。設物體於 $x=0$ 處由靜止出發。

解　$V(10)=\int_0^{10} a(t)\,dt$

$$=32.2[\frac{1}{2}(10)(1)]$$

$$=161 \quad \text{ft/sec}$$

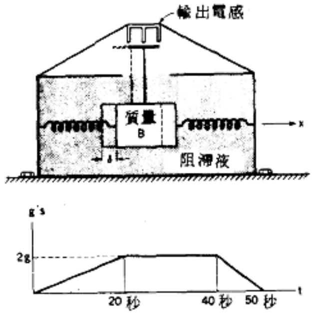


圖 11—5

$$V(30)=\int_0^{30} a(t)\,dt$$

$$=32.2[\frac{1}{2}(20)(2)+(30-20)(2)]$$

$$=1288 \text{ ft/sec}$$

$$V(45)=\int_0^{45} a(t)\,dt$$

$$=32.2[\frac{1}{2}(20)(2)+(40-20)(2)+\frac{1}{2}(45-40)(1+2)]$$

$$=2173.5 \text{ ft/sec}$$

11-6　已知一質點之位置向量如下：

$$\mathbf{r}=6t\mathbf{i}+(5t+10)\mathbf{j}+6t^2\mathbf{k}$$

求 $t=3$ sec 時之加速度？求在此期間中該質點所行之距離？（提示：注意問題的下半部，設 $dr=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$，並分別乘以 dt。由附錄 I 查出 $\int\sqrt{a^2+t^2}\,dt$ 之積分式。）

解　(a)　$\mathbf{r}=6t\mathbf{i}+(5t+10)\mathbf{j}+6t^2\mathbf{k}$

$\dot{\mathbf{r}}=6\mathbf{i}+5\mathbf{j}+12t\mathbf{k}$

$\ddot{\mathbf{r}}=12\mathbf{k}$

$\therefore\ \ddot{\mathbf{r}}(3)=12\mathbf{k}$ m/sec²

(b)　$d=\int dr=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dz}{dx})^2}\,dx$

由於　$x=6t\ ;\ dx=6dt$　　(a)

$y=5t+10\ ;\ dy=5dt$　　(b)

$z=6t^2\ ;\ dz=12tdt$　　(c)

$\therefore (\frac{dy}{dx})=\frac{5}{6}\ ;\ \frac{dz}{dx}=2t$

積分回來：

$$d=\int_{x=0}^{x=18}\sqrt{1+(\frac{5}{6})^2+4t^2}dx=2\int_0^{18}\sqrt{0.424+t^2}\,dx$$

從(a)式可知 $t=x/6$，代入上式則：

$$d=2\int_0^{18}\sqrt{0.424+\frac{x^2}{36}}\,dx=\frac{2}{6}\int_0^{18}\sqrt{15.25+x^2}\,dx$$

$$d=\frac{1}{3}\{\frac{1}{2}[x\sqrt{15.25+x^2}+15.25\ \ln(x+\sqrt{15.25+x^2})]\}_0^{18}$$

$$=\frac{1}{6}\{[(18)\sqrt{15.25+324}+15.25\ \ln(18+\sqrt{15.25+324})]$$

$$-15.25\ \ln\sqrt{15.25}\}$$

$$=\frac{1}{6}[331+54.4-20.7]=60.8\ \text{m}$$

11-7　在例題 11-1 中若C 桿的加速率為 10 ft／sec² 求 B 栓的向量加速度？

解　把已知 $\ddot{x}=10\,\text{ft/sec}^2$ 代入例題之(d)式則

$$\frac{\dot{x}^2}{10^2}+\frac{x\ddot{x}}{10^2}+\frac{\dot{y}^2}{6^2}=-\frac{\ddot{y}y}{2^2}$$

$$\therefore\ \ddot{y}=-[(\frac{6}{10})^2\dot{x}^2+(\frac{6}{10})^2x\ddot{x}+\dot{y}^2]\frac{1}{y}$$

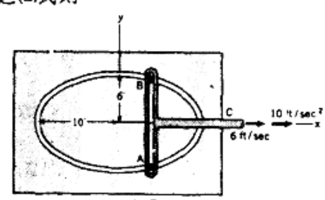


圖 11-7

把 $\ddot{x}=10\ ;\ \dot{x}=6\ ;\ y=5.2\ ;\ x=5\ ,\ \dot{y}=-2.08$ 代入

$$\ddot{y}=-6.80\,\text{ft/sec}^2$$

因此向量加速度為：

$$\mathbf{a}=10\,\mathbf{i}-6.80\,\mathbf{j}\ \ \text{ft/sec}^2$$

11-8 質點A與B始終被限制於半徑爲5ft之圓溝中，同時此二質點又須在一拋物形之長孔中。於 $t=0$ 時長孔以點線表示。若此長孔以3 ft／sec 之常速向右移動，求 $t=1$ sec 時兩質點相向之速率與速率之改變率爲何？

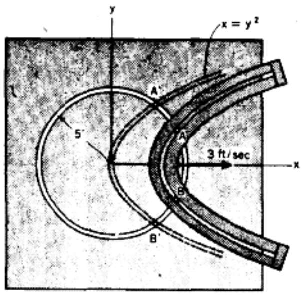


圖 11-8

解 槽的關係式爲：

$$y^2=x-3t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

圓的關係式爲：

$$x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots\cdots(2.a)$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{25-y^2} \quad \cdots\cdots\cdots(2.b)$$

由於A點必需於圓溝及長槽中，故必需同時滿足(1)與(2)式：

因此： $y^2=\sqrt{25-y^2}-3t$

$$y=(\sqrt{25-y^2}-3t)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式對時間微分：

$$2y\dot{y}=\frac{1}{2}(25-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y\dot{y})-3$$

$$\therefore \quad \dot{y}=-\frac{1.5}{y\left[1+\dfrac{1}{2(25-y^2)^{1/2}}\right]} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

微分(4)式則：

$$\ddot{y}=-\dot{y}^2\left[\frac{1}{y}+\frac{y}{(25-y^2)^{3/2}\left[2+(25-y^2)^{-1/2}\right]}\right] \quad \cdots\cdots(5)$$

把(1)式代入（2.a）式求 $t=1$ 時的 y

$$x^2+x=25+3t$$

於 $t=1$ ：$x^2+x-28=0$　　$\therefore\ x=4.815\ \text{ft}$

$$y=\sqrt{x-3t}\qquad \therefore\ y=1.347\ \text{ft}$$

現由(4)式可得 $\dot{y}$ ：

$$\dot{y}=\frac{-1.5}{1.347\left[1-\dfrac{1}{2(25-1.814)^{1/2}}\right]}$$

$\therefore\ \dot{y}=-1.24\ \text{ft/sec}$

因此兩質點相對的速率爲 2.48 ft／sec

並於 $t=1$　從(5)式可得：

$$\ddot{y}=-1.148\ \text{ft/sec}^2$$

因此兩質點相對的加速度爲 2.296 ft／sec²

11-9　圖示爲一陰極射線管面，由於管內電場，一電子作水平（x）方向之運動，形式爲

$$x=A\sin\omega t\ \text{mm/sec}$$

電子同時亦作垂直方向之運動，形式爲

$$y=A\sin(\omega t+\alpha)\ \text{mm/sec}$$

當 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 時，表示在螢幕上其軌跡是一半徑等於 Amm 之圓。若 $\alpha=\pi$ ，表示其軌跡爲一對 xy 軸傾斜 45° 之直線。最後，求電子在 xy 面上的速度及加速度方向之方程式。

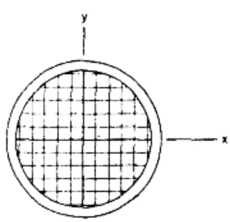


圖 11-9

解　$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$x = A\sin\omega t$

$y = A\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\quad = A\cos\omega t$

$x^2 + y^2 = A^2\sin^2\omega t + A^2\cos^2\omega t$

$\qquad = A^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)$

$\qquad = A^2$（圓之方程式）

$\alpha = \pi$

$x = A\sin\omega t$

$y = A\sin(\omega t + \pi)$

$\quad = -A\sin\omega t$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{A\sin\omega t}{-A\sin\omega t} = -1$　（斜度爲 45° 之直線方程式）

$\mathbf{V} = A\omega\cos\omega t\ \mathbf{i} + A\omega\cos(\omega t + \alpha)\,\mathbf{j}\ \mathrm{mm/sec^2}$

$\mathbf{a} = -A\omega^2\sin\omega t\ \mathbf{i} - A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)\,\mathbf{j}\ \mathrm{mm/sec^2}$

11-10 一機車特技員嘗試跳過一深坑。由起跳點至降落處距離爲 100 m。作爲技術顧問的你，能否告訴特技員，他在起跳點 A 之速率爲何？機車以流線形設計以減少風的阻力。答案以 km/hr 表示。

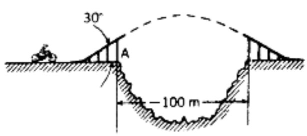


圖 11-10

解　$\dot{x} = v\cos 30^\circ$

$x = vt\cos 30^\circ$

$\dot{y} = -gt + v\sin 30^\circ$

$y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + vt\sin 30^\circ$

$$\because \quad x = 100 = vt\cos 30°$$

$$t = \frac{100}{v\cos 30°}$$

$$y = 0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{100}{v\cos 30°}\right)^2 + v\sin 30°\left(\frac{100}{v\cos 30°}\right)$$

$$v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{100g}{\cos 30°\sin 30°}$$

$$v = 33.6565 \text{ m/sec}$$

$$= 121.1635 \text{ km/hr}$$

11-11 一帶電粒子在 $t=0$ 時，以速率 10 ft/sec, 45°被發射，若電場使其有 $-200t^2\mathbf{j}$ ft/sec² 之加速度，其軌跡方程式為何？碰撞時的 d 值？

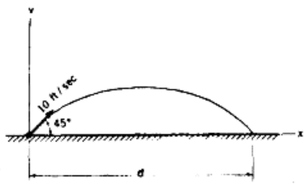


圖 11-11

解 $\ddot{y} = -200t^2$

$$\dot{y} = -\frac{1}{3}(200t^3) + C_1$$

$$y = -\frac{1}{12}(200t^4) + C_1 t + C_2$$

$$\because \quad C_2 = 0$$

$$C_1 = v\sin 45° = 10\sin 45°$$

$$= 7.071$$

$$\therefore \quad \dot{y} = -\frac{1}{3}(200t^3) + 7.071$$

$$y = -\frac{1}{12}(200t^4) + 7.071\,t$$

$\dot{x} = v\cos 45° = 10\cos 45°$

$\quad = 7.071$

$x = 7.071\,t$

$t = \dfrac{x}{7.071}$

t 代入 y

$$y = -\frac{1}{12}\left[200\left(\frac{x}{7.071}\right)^4\right] + 7.071\left(\frac{x}{7.071}\right)$$

$$= x - 6.667\times 10^{-3}x^4$$

$\because \quad y = 0$

$\therefore \quad 1 - 6.667\times 10^{-3}x^3 = 0$

$$x^3 = \frac{1}{6.667\times 10^{-3}}$$

$$x = 5.3132\ \text{ft} = d$$

11-12 一拋射體與斜面成 40°，以速率為 1000m／sec 拋射， 斜面與水平夾角為 20°。若不計摩擦，拋射體碰到斜面時沿斜面之距離為多少？

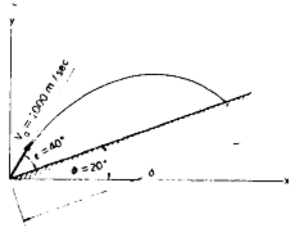


圖 11-12

解　$x = d\cos 20°$

$y = d\sin 20°$

$\dot{x} = v_0\cos 60°$

$x = v_0 t\cos 60° = d\cos 20°$

$$t = \frac{d\cos 20°}{v_0\cos 60°}$$

$\ddot{y}=-g$

$\dot{y}=-gt+C_1$

$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$

$\because\quad C_2=0$

$\qquad C_1=v_0\sin 60^\circ$

t，C_1 代入 y

$y=-\frac{1}{2}(9.81)\left(\frac{d\cos 20^\circ}{v_0\cos 60^\circ}\right)^2+v_0\sin 60^\circ\left(\frac{d\cos 20^\circ}{v_0\cos 60^\circ}\right)$

$=d\sin 20^\circ$

$1.7325\times 10^{-5}d^2-1.2856d=0$

$d=74203.74$

$=7.42\times 10^4\,\text{m}$

11-13 穀粒以速率 v_0 爲 20ft／sec 吹落火車箱內，若確定所有穀粒都會掉入車箱內，則最大及最小的高度 d 爲何？不計摩擦及風力。

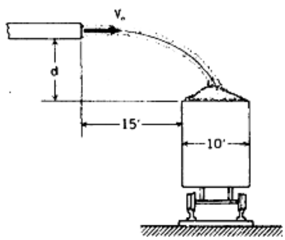


圖 11-13

解 $\dot{x}=v_0$

$x=v_0t$

$t=\frac{x}{v_0}$

$\ddot{y}=g$

$\dot{y}=gt$

$y=\frac{1}{2}gt^2$

$$=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

令 $v_0=20$ ，$x=15$ ，代入 y

$$d_{min}=\frac{1}{2}g\left(\frac{15}{20}\right)^2$$

$$=9.05625\ ft$$

令 $v_0=20$ ，$x=25$ ，代入 y

$$d_{max}=\frac{1}{2}g\left(\frac{25}{20}\right)^2$$

$$=25.15625\ ft$$

11-14　一貨船之引擎室失火，滅火拖曳船被拖至其旁，並噴出一水柱灌入貨船之烟囱內，若水的噴射速率爲 70 ft／sec ，則 α 需多大才可達成任務。（提示：只有一個 α 值能使水灌入烟囱內）

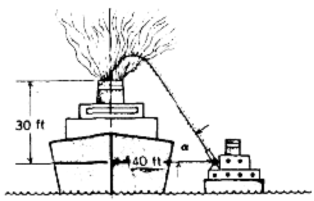


圖 11-14

解　$\dot{x}=v\cos\alpha$

$x=vt\cos\alpha$

$\ddot{y}=-g$

$\dot{y}=-gt+v\sin\alpha$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+vt\sin\alpha$$

$$t=\frac{x}{v\cos\alpha}=\frac{40}{70\cos\alpha}$$

$$y=30=-\frac{1}{2}(32.2)\left(\frac{4}{7}\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2+40\tan\alpha$$