

高等学校教学参考书 96



初等数学复习及研究

(立体几何)

朱德祥 编

人民教育出版社

本书系以中学平面几何和立体几何为基础写成的。为了便利读者,特别注意全书内容自成系统,对立体几何知识加以系统地复习与整理和适当地加深与提高。全书内容分五章,分论空间直线与平面、球、轨迹、初等几何变换、面积与体积、简单球面几何与球面三角。编写时注意到与平面几何、解析几何、射影几何、几何基础各科间的联系。每章末附有充分的习题,帮助读者进一步对本课程的理解。

本书可作为师范院校数学系的参考书,中学教师在教学时也可取为参考。

简 装 本 说 明

目前850×1168毫米规格纸张较少,本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷,定价相应减少20%。希鉴谅。

初等数学复习及研究

立 体 几 何

朱 德 祥 编

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

唐山人民印刷厂印装

*

开本 787×1092 印张 7 15/16 字数 183,000

1960年3月第4版 1979年5月第2次印刷

印数 20001—340,000

书号 13012·0340 定价 0.60 元

目 录

第一章 空間直綫与平面

1.1	点与直綫、点与平面的相关位置·空間几何公理	1
1.1.1	結合公理	1.1.2 順序公理
1.1.3	合同公理	
1.1.4	連續公理	1.1.5 平行公理
1.1.6	公理的推論	
1.1.7	希尔伯特几何体系的三个基本对象和三个基本关系	
1.2	空間二直綫的相关位置	7
1.2.1	注意	1.2.2 引理
1.2.3	平行綫的傳遞性	
1.2.4	空間二直綫間的角度	
1.3	直綫与平面的相关位置	10
1.4	二平面的相关位置·三平面的相关位置	13
1.4.1	介于平行平面間的平行綫段	1.4.2 三平面的相关位置
1.5	立体几何作图	20
1.5.1	立体几何作图公法	1.5.2 簡單作图題
1.6	直綫与平面的垂直	24
1.7	正射影·平行射影	30
1.7.1	从一点到一平面的垂綫和斜綫	1.7.2 三垂綫定理及其逆定理
1.7.3	直角的射影	1.7.4 直綫与平面間的角度
1.8	二面角	33
1.8.1	二平面的垂直	
1.9	作图題三則	43
1.10	三面角·多面角	46
1.10.1	互补三面角	1.10.2 关于多面角中面角与二面角的不等式
1.10.3	三面角的外二面角	1.10.4 有向三面角
1.10.5	两个三面角的相等	1.10.6 三面角的面角与其二面角之間的关系
1.10.7	三直三面角	
1.11	四面体	60
1.11.1	四面体的外接平行六面体	1.11.2 四面体的高綫

1.11.3 四面体的相等	
1.12 多面体	67
1.12.1 关于凸多面体的欧拉定理	1.12.2 正多面体
1.12.3 正多面体至多有五种	1.12.4 有五种正多面体存在
1.12.5 例题	
习题	77

第二章 球·轨迹

2.1 球	87
2.2 球与直线以及球与平面的相关位置	87
2.3 两球的相关位置	90
2.4 点对于球的幂	92
2.5 立体几何轨迹	94
2.5.1 基本轨迹命题	2.5.2 较复杂的轨迹命题
2.6 四面体的外接、内切和傍切球	102
2.7 用交轨法解作图题	105
习题	108

第三章 初等几何变换

3.1	图形的相等	113
3.1.1	图形相等的两种情况	
3.2	运动	117
3.2.1	平移	
3.2.2	旋轉	
3.2.3	半周旋轉或軸反射	
3.2.4	螺旋运动	
3.2.5	螺旋运动与軸反射	
3.2.6	螺旋运动的乘积	
3.3	反射或对称变换	126
3.3.1	面反射	
3.3.2	(中)心反射	
3.4	合同变换	131
3.5	自相对称——面对称、軸对称、(中)心对称	132
3.5.1	正多面体的內切球和外接球	
3.5.2	正多面体所容許的旋轉和对称变换	
3.5.3	立方体所容許的旋轉和对称变换	
3.6	利用运动和反射解作图題	137
3.7	位似形及其性質	141
3.7.1	两个位似的乘积	

3.8	两球的位似	145
3.9	用位似法解作图题	146
3.10	反演	148
3.10.1	反演的二重点	3.10.2 直线、平面、球面、圆周的反形
3.10.3	反演的保角性	3.10.4 用反演法解作图题
	习题	153

第四章 面积与体积

4.1	面积和体积的概念	158
4.2	长方体的体积	160
4.3	棱柱和平行六面体	162
4.4	棱锥	166
4.4.1	施瓦兹原理	4.4.2 棱锥的体积
		4.4.3 棱台
4.5	圆柱	175
4.6	圆锥	177
4.7	球面积	181
4.8	球体积	184
	习题	189

第五章 简单球面几何与球面三角

5.1	球面几何	197
5.2	球面角、球面二角形、大圆的垂直	198
5.3	球面多边形	200
5.3.1	球面多边形与多面角之关系	5.3.2 极三角形
5.4	球面三角形的合同	203
5.5	关于球面三角形中边与角的不等	204
5.6	球面三角形边与角之间的关系	206
5.7	一点到一圆的球面距离	206
5.8	球面三角形的面积	208
5.9	球面三角	211
5.10	正弦定律	212
5.10.1	球面三角形的正弦定律与平面三角形的正弦定律	
5.11	边的余弦定律	214

5.11.1 球面三角形边的余弦定律与平面三角形的余弦定律	
5.12 角的余弦定律	216
5.13 半角公式	216
5.14 半边公式	218
5.15 例	219
习题	223
附录(一) 关于四面体傍切球的存在与分布	227
附录(二) 祖暅求球体积法	235

第一章 空間直綫与平面

1.1 点与直綫、点与平面的相关位置·空間几何公理

我們現在以中学几何以及一年級所学平面几何为基础，来学习立体几何。第一章是这个学习的关键部分。

首先介紹初等几何即欧几里得^①几何公理体系。此地所介紹的，基本上就是1899年希尔伯特^②在历史成就的基础上所完成的初等几何公理体系。

关于希尔伯特公理体系，在学习平面几何时可能已經介紹过了，此地为了完备和引用方便起見，再重复一下。

点、直綫、平面称为几何元素。几何元素集合起来，便組成我們研究的对象几何图形。以后除非另有声明，將以大写拉丁字母 A, B, C 等表示点，以小写拉丁字母 a, b, c 等表示直綫，以小写希腊字母 α, β, γ 等表示平面。并且当談到两点、两直綫、三平面等等时，我們了解作不相同的两点、两直綫、三平面。

若点 A 在直綫 a 上，也就說直綫 a 通过或含有点 A 。若点 A 在平面 α 上，也就說平面 α 通过或含有点 A 。

1.1.1 結合公理

- I₁. 通过任意給定的两点有一直綫。
- I₂. 通过任意給定的两点至多有一直綫。
- I₃. 每一直綫上至少有两点；至少有三点不同在一直綫上。
- I₄. 通过任意給定的不共綫三点（即三点不在一直綫上）

① Euclid(約紀元前 330—275 年)。

② David Hilbert(1862—1943 年)。

有一平面;每一平面上至少有一点。

I₅. 至多有一平面通过任意給定的不共綫三点。

I₆. 若直綫 a 的两点 A 、 B 在平面 α 上,則 a 的所有点都在 α 上。这时直綫 a 称为在平面 α 上,或平面 α 通过或含有 a 。

I₇. 若两平面有一公共点,則至少还有一公共点。

I₈. 至少有四点不同在一平面上。

1.1.2 順序公理

II₁. 若点 B 介于两点 A 、 C 之間,則 A 、 B 、 C 是一直綫上的不同点,且 B 也介于 C 、 A 之間。

II₂. 对于任意两点 A 、 B ,直綫 AB 上至少有一点 C 存在,使 B 介于 A 、 C 之間。

II₃. 在共綫三点中,一点介于其他两点之間的情况不多于一次。

II₄. (帕須^①公理)。設 A 、 B 、 C 是不共綫的三点, α 是平面 ABC 上不通过 A 、 B 、 C 中任一点的一直綫,則若 α 有一点介于 A 、 B 之間,那末它必还有一点介于 A 、 C 之間或介于 B 、 C 之間。

1.1.3 合同公理

III₁. 設 A 、 B 为一直綫 a 上两点, A' 为同一或另一直綫 a' 上的点,則在 a' 上点 A' 的給定一側有且只一点 B' 使綫段 AB 合同于或等于綫段 $A'B'$: $AB=A'B'$ 。并且对于每一綫段,要求

$$AB=BA.$$

III₂. 設綫段 $A'B'=AB$, $A''B''=AB$,則也有 $A'B'=A''B''$ 。

III₃. 設 AB 和 BC 是直綫 a 上沒有公共內点的两綫段,而 $A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一或另一直綫 a' 上的两綫段,也沒有公共內点。如果这时有 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$,則也有 $AC=A'C'$ 。

① Moritz Pasch(1843—1930)。这公理发表于1882年。

Ⅲ₄. 在平面 α 上给定 $\angle(h, k)$, 在同一或另一平面 α' 上给定直线 a' , 而且在平面 α' 上指定了关于直线 a' 的一侧。设 h' 是直线 a' 上以一点 O' 为原点的射线。那末在平面 α' 上直线 a' 的指定一侧, 有且只一条以 O' 为原点的射线 k' 使 $\angle(h, k) = \angle(h', k')$ 。每个角都要求与自身合同, 即 $\angle(h, k) = \angle(h, k)$ 和 $\angle(h, k) = \angle(k, h)$ 。

即是说: 每个角可以唯一地放在给定平面上给定射线的给定一侧。

Ⅲ₅. 设 A, B, C 是不共线三点, 而 A', B', C' 也是不共线三点, 如果这时

$$AB = A'B', AC = A'C', \angle BAC = \angle B'A'C',$$

那末也就有

$$\angle ABC = \angle A'B'C', \angle ACB = \angle A'C'B'.$$

1.1.4 連續公理

IV₁. (阿基米德^① 公理)。设 AB 和 CD 是任意两线段, 那末在直线 AB 上存在着有限个点 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 排成这样: A_1 介于 A 和 A_2 之间, A_2 介于 A_1 和 A_3 之间, 以下类推, 并且线段 $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ 都合同于线段 CD , 而且 B 介于 A 和 A_n 之间 (图 1)。

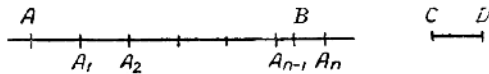


图 1

IV₂. (康托尔^② 公理)。设在一直线 a 上有由线段组成的一个无穷数列 $A_1B_1, A_2B_2, \dots$, 其中在后的每一线段都包含在前一个内部, 并且任意给定一线段, 总有一个足码 n 使线段 A_nB_n 比它

① Archimedes (约公元前 287—212)。

② Moritz Cantor (1845—1918)。这公理是 1871 年写成的。

小。那末在直線 a 上存在一點 X , 落在每個綫段 $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ 的內部(圖 2)。

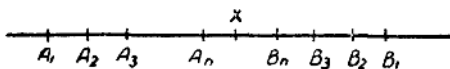


圖 2

1.1.5 平行公理 通過直線外一點至多可引一直線平行於該直線。

1.1.6 公理的推論 從這五組公理可以推出歐氏幾何全部結論, 當然這個過程是十分不簡單的。我們舉幾個最簡單的為例: 從結合公理出發, 可以推証下列諸命題。

由公理 I_1 和 I_2 立刻得到

定理 1. 兩點決定唯一直線。

從公理 I_4 和 I_5 得到

定理 2. 不共綫三點決定唯一平面。

定理 3. 一直綫 a 和它外面一點 A 決定唯一平面。

証明: 因為直綫 a 上至少有一點 B, C (公理 I_3), 不共綫三點 A, B, C 決定一平面 α (公理 I_4)。這平面 α 通過直綫 a (公理 I_6) 和點 A 。又凡通過 a 和 A 的平面都要含三點 A, B, C , 所以根據公理 I_5 , 只能與 α 重合。

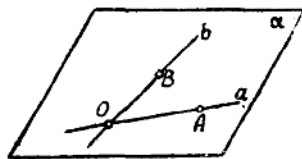


圖 3

定理 4. 兩相交直綫決定唯一平面。

証明: 設兩直綫 a, b 相交於點 O (圖 3), 由公理 I_3 , 在 a 上除 O 外還有一點 A , 在 b 上除 O 外還有一點 B 。根據公理 I_4 , 不共綫三點 O, A, B 決定一平面 α 。這平面 α 既通過 a 又通過 b (公理 I_6)。

此外不再有任何平面既通過 a 又通過 b , 因為這樣的平面必含

O, A, B 三点, 因而与 α 重合。

定理 5. 两平行直线决定唯一平面。 留给读者自证。

定理 6. 空间至少有四平面六直线。

证明: 根据公理 I_8 , 空间至少有不共面 (即不在同一平面上) 的四点 A, B, C, D

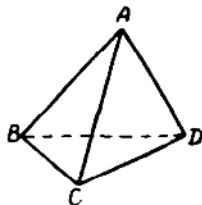


图 4

(图 4)。根据公理 I_1 , 它们决定了六直线 AB, AC, AD, BC, BD, CD ; 根据公理 I_4 , 它们决定四平面 BCD, ACD, ABD, ABC 。

系 不共面的直线存在。

因 AB 和 CD 便是不共面的直线。

定理 7. 若两平面公有一点, 则必公有一直线上的点, 且此外不再有其他公共点。

证明: 设两平面 α, β 有一公共点 A , 则至少还有一公共点 B (公理 I_7)。有一直线 a 通过两点 A, B (公理 I_1), 而由公理 I_6 , 直线 a 上所有各点既在 α 上又在 β 上, 所以平面 α 和 β 公有直线 a 上各点。

平面 α 和 β 不能再有其他公共点, 否则 α 和 β 便将重合了 (定理 3)。证完。

这时平面 α 和 β 称为相交, 直线 a 称为其交线。所以, 若两平面有一公共点, 便相交于一直线。

到此可以看出, 运用结合公理可以推出一些命题。但必须指出, 只用公理 I_{1-8} 所能证明的几何事实为数甚少, 例如从结合公理就不能推出几何元素的集合是无穷的。这样的论证, 我们留在几何基础里去谈。利用结合公理和顺序公理, 经过相当复杂的推理, 可以证明定理 8—13, 在此我们不妨把它们作为公理来引用。

定理 8. 每一直线上有无穷多点。

定理 9. 每一平面上有无穷多点, 而且它们不尽在一直线上。

定理 10. 共綫三點中有一點也只有一點介於其他兩點之間。

定理 11. 若 A, B 為已知點，則在直綫 AB 上有無窮多個點介於 A, B 之間，且有無窮多個點使 B 介於 A 與它們每個點之間。

定理 12. 一直綫上每一點 O 將綫上其餘的點分為兩類；點 O 介於異類的任兩點之間，而不介於同類的任兩點之間。

這時我們說點 O 分該直綫為兩條半直綫或射綫， O 稱為它們的原點或端點。

定理 13. 平面 α 上的一直綫 a 將 α 上除 a 以外的點分為兩類；異類兩點的聯綫段必與直綫 a 相交，而同類兩點的聯綫段不與直綫 a 相交。

這時我們說直綫 a 分該平面為兩半平面， a 稱為它們的邊緣。

現在我們可以證明：

定理 14. 在每一平面上有無窮多條不都共點的直綫。通過每一點有無窮多條不都共面的直綫。

這命題的證明留給讀者。

定理 15. 通過一直綫有無窮多個平面（共軸面）。

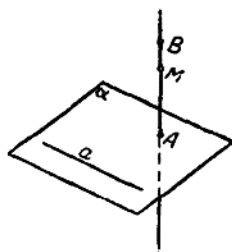


圖 5

證明：設 a 為已知直綫。根據公理 I_3 ，至少有一點 A 不在 a 上（圖 5）。直綫 a 和點 A 決定一平面 α （定理 3）。根據公理 I_3 ，至少有一點 B 不在平面 α 上。點 A 和 B 決定一直綫 AB （公理 I_1 ）。直綫 AB 上有無窮多點（定理 8），其中任一點 M 和直綫 a 決定一平面 μ （定理 3）。由於直綫 AB 和 a 不共面，這些平面 μ 彼此不重合。所以有無窮個平面通過 a 。

1.1.7 希爾伯特幾何體系的三個基本對象和三個基本關係 希爾伯特取三個基本對象即點、直綫、平面和三個基本關係即結合關係（點在直綫上，點在平面上）、順序關係（介於……之間）、合同關係（綫

段的相等,角的相等)作为不加定义的六个基本概念,并要求这些关系满足五組公理 I_{1-3} , II_{1-4} , III_{1-5} , IV_{1-2} , V 的要求,建立了初等几何的基础。从此可以建立运动概念、測量理論等等。許多几何事实(特别是平面几何事实)我們就作为可以从公理推导出来而逕加引用。

1.2 空間二直線的相关位置

由公理 I_2 立刻得到

定理 1. 空間兩直線至多有一公共点。

当兩直線有一个公共点时,就称为相交。从 1.1 定理 4, 我們知道相交直線是共面的。反过来,从平面几何,共面兩直線却未必相交,并且共面而不相交的兩直線称为平行線。

从 1.1 定理 6 系,又知道不共面的兩直線存在,所以总结起来就得到

定理 2. 空間兩直線可以有下列各种相关位置:

- I. 兩直線不共面,因而也就沒有公共点(不共面直線);
- II. 兩直線共面,这时分为两款:
 - (a) 共面而有一公共点(相交直線);
 - (b) 共面而沒有公共点(平行直線)。

1.2.1 注意 (1) 过去在平面几何, 兩直線不平行便相交。在立体几何,不平行的直線却未必相交,因为它們可能不共面。重要的还在于另外一面:要断定兩直線平行,不能仅仅証明它們不相交就算完事,首先还要确定它們是共面的。

(2) 利用平行公理 V , 和平面几何一样,仍然得到:通过已知直線外一点,有一且仅一直線与已知直線平行。事实上,通过已知点而与已知直線平行的直線,只能在該点与該直線所决定的平面上。

(3) 从平行線的定義,我們知道,平行性有对称性,即是說:若 $a \parallel b$, 則 $b \parallel a$ 。現在要証明:在空間和在平面上一样, 平行性有

傳遞性，即是說，空間三直線 a, b, c 間，若有 $a \parallel c$ 和 $b \parallel c$ ，則亦有 $a \parallel b$ 。為了證明這個重要性質，我們先證明下面的引理。

1.2.2 引理 設相交兩平面各通過兩已知平行線之一，那末它們的交線平行於這兩平行線。

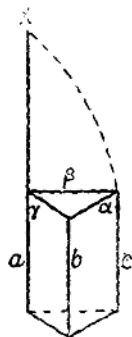


圖 6

證明：假設直線 $a \parallel b$ ，平面 α 通過 b ，平面 β 通過 a ，且 α 和 β 相交於直線 c （圖 6）。求證 $c \parallel a$ ， $c \parallel b$ 。

我們取 $c \parallel a$ 證之， $c \parallel b$ 仿此證明。

以 γ 表示平行直線 a 和 b 所在的平面。由於 c 和 a 都在平面 β 上，要斷定 $c \parallel a$ ，只要斷定 c 與 a 不可能相交。我們使用反證法。

設直線 c 和 a 相交於一點 X 。一方面， X 在 a 上，因之既在 β 上又在 γ 上。另一方面， X 在 c 上，因之既在 β 上又在 α 上。從此推出 X 既在 γ 上又在 α 上，因而在 γ 和 α 的交線 b 上。那末 a 和 b 相交於一點 X 了！這矛盾反證了 $c \parallel a$ 。

1.2.3 定理 3（平行線的傳遞性）。同平行於第三直線的兩直線互相平行。

證明：設直線 $a \parallel c, b \parallel c$ ，求證 $a \parallel b$ 。

當三直線 a, b, c 共面時，從平面幾何我們知道這定理成立。當 a, b, c 不共面時證明如下。

在直線 a 上任取一點 A （圖 7），以 β 表示 A 和 b 所決定的平面，以 γ 表示 A 和 c 所決定的平面。由於假設 a, b, c 不共面，而 A 為 a 上任一點，那末 β 和 γ 不會重合。既然 β 和 γ 有一公共點 A ，就相交於一直線 a' （1.1 定理 7）。

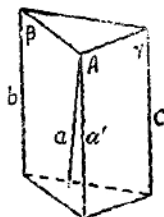


圖 7

由於 $b \parallel c$ ， β 通過 b ， γ 通過 c ，且 β 和 γ 相交於 a' ，所以根據引理得 $a' \parallel c$ 和 $a' \parallel b$ 。

但通过点 A 只能有一直线与 c 平行, 而根据假设 a 就是这样一条直线, 所以 a' 即是 a 。

从 $a' \parallel b$ 于是就得到我们的结论 $a \parallel b$ 。

1.2.4 空間二直線間的角 在討論了空間二直線三種可能的相互位置(即不共面、相交、平行), 并証明了平行性的傳遞性以后, 我們來將平面上兩直線夾角或交角的概念, 推广于空間二直線。为了这个, 我們先証明

定理 4. 設兩角的邊分別同向平行, 則此兩角相等。

証明: 假設兩角 A 和 A' 的邊分別平行且同向, 要証明 $\angle A = \angle A'$ 。

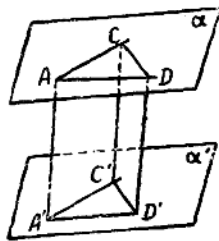


图 8

当这两角在同一平面上时, 这定理已在平面几何証过。現在假定它們在两个平面 α 和 α' 上(图 8)。在两角的边上取对应相等的綫段: $AC = A'C'$, $AD = A'D'$, 并聯結 AA' 、 CC' 、 DD' 、 CD 、 $C'D'$ 。

由于 AC 和 $A'C'$ 同向平行且相等, 所以 AA' 和 CC' 平行且相等。同理 AA' 和 DD' 平行且相等。由于平行性和等量的傳遞性, CC' 和 DD' 平行且相等; 从而断定 CD 和 $C'D'$ 平行且相等。

两三角形 CAD 和 $C'A'D'$ 因三边对应相等而全等, $\therefore \angle A = \angle A'$, 証完。

系 ① 設兩角的邊分別异向平行, 則此兩角相等。

② 設兩角的邊分別平行, 一同向而一异向, 則此兩角相补。

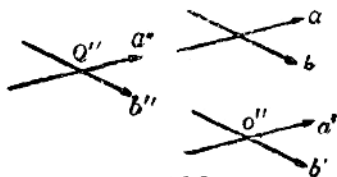


图 9

証明了定理 4 以后, 我們就可以来定义不共面二直線間的角。

設 a, b 为两条不共面直線(图 9), 为了确定起見, 我們各給

它們一個正向。通過空間任意兩點 O' 和 O'' ，各引直線 a' 和 a'' 與 a 同向平行，各引直線 b' 和 b'' 與 b 同向平行。根據定理 4， $\angle(a', b') = \angle(a'', b'')$ 。這個大小因 a, b 而定，而與角頂的選擇無關的角，因此就定義作不共面二直線間的角。

我們顯然可以從（例如）直線 a 上一點引 b 的平行線，由這兩條相交線的交角來代表不共面二直線間的角。

倘若沒有給出 a 和 b 的正向，那末不共面二直線 a, b 於是也和平面幾何里一樣，形成兩個互補的角。

倘若這兩個互補的角相等，即各為一直角，不共面二直線就稱為互相垂直的。這垂直的概念，是平面幾何同一概念的推廣。

但必須特別注意，在平面幾何兩條垂直線一定相交，在空間，不相交的两直線依然可以垂直。不過當我們說：“從一點 A 向一直線 a 作垂線”時，指的則是與 a 垂直相交 的線。

1.3 直線與平面的相關位置

設 α 為一平面， a 為空間一直線。按照公理 I_6 ，若 a 有兩點在 α 上，則其每一點都在 α 上，於是直線在平面上，或平面通過或含有該直線。比如在工業生產上用刀口尺檢查工件的平面性時，觀察刀口尺與工件的接觸處是否透光，便是應用這個性質。

定理 1. 一平面和不在其上的一直線至多有一公共點。

若直線 a 與平面 α 有一且僅一公共點 A ，它們就稱為相交， A 為交點。若 a 與 α 沒有任何公共點，就說直線平行於平面（或平面平行於直線），記作 $a \parallel \alpha$ 。

首先指出，與平面 α 相交的直線存在，因按公理 I_8 ，必有一點不在 α 上，這樣的點與 α 上任一點聯線，就是與 α 相交的一條直線。

與定平面 α 平行的直線的存在性，由定理 2 保證。

定理 2. 設平面外一直線与平面上一直線平行，則与此平面平行。

証明：設直線 l 平行于平面 α 上的直線 l' (图 10)，求証 $l \parallel \alpha$ 。

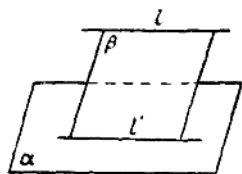


图 10

以 β 表示含平行線 l 和 l' 的平面，倘若定理的反面成立，直線 l 和平面 α 相交于一点 X ，那末 X 既在 α 上又在 β 上，因之在 α 和 β 的交線 l' 上，于是 l 和 l' 相交于 X 。这矛盾反証 $l \parallel \alpha$ 。

系 通过平面外一点有无穷多条直線平行于这个平面。

事实上，設 A 为平面 α 外一点，在 α 上任取一点 B ，并在 α 上



通过 B 引一群直線 b (图 11)。通过 A 引一些直線 a 与这一群中每一直線对应平行。由于通过一点不能引一直線与两相交線平行，这些直線 a 不能重合。它們都通过 A 而平行于 α 。証完。

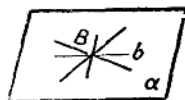


图 11

由上面所說看来，直線与平面的相关位置，由定理 3 所概括：

定理 3. 直線与平面有下列三种可能的相关位置：

- (a) 直線在平面上 (直線上各点在平面上)；
- (b) 直線与平面相交 (直線有一点也只有一点在平面上)；
- (c) 直線与平面平行 (直線沒有任何点在平面上)。

定理 4. 設二平行線之一与一平面相交，則另一直線也与該平面相交。

証明：假設两平行線 a, a' 中的一条 a 与平面 α 相交于点 A (图 12)。以 β 表示 a 和 a' 所在的平面。两平面 α 和 β 有

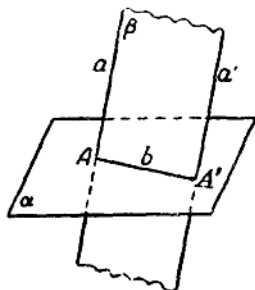


图 12