孙[illegible]兴　等编

研究生入学考试高等数学试题三百例

中国建筑工业出版社

研究生入学考试

高等数学试题三百例

孙福兴　等编

中国建筑工业出版社

本书是研究生入学考试高等数学试题的选解。包括一元与多元微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数和概率论方面的例题共300余道。这些例题是从历届(主要是1982年以来)招考研究生的近4500道高等数学试题中精选出来的。既具有广泛性、多样性，又具有典型性、启发性；既包括一定难度的基本题，又包括一些难度较大、技巧性较强的综合题。本书体现了对高等数学课程的基本要求，在一定程度上反映了目前研究生入学考试中本门课程命题的特点和动向。

本书可作报考研究生的同志的复习资料，也可作大学生（包括电视大学、职工大学学生）的课外读物，还可供有关教师参考。

研究生入学考试

高等数学试题三百例

孙福兴 等编

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：12¾ 字数：343 千字

1986年8月第一版 1986年8月第一次印刷

印数：1—27,200册 定价：2.35元

统一书号：15040·5016

前　言

这是一本研究生入学考试高等数学（包括线性代数和概率论）试题选解。与通常的考题“汇编”不同，我们没有罗列数量惊人的考题，而是从历年来，主要是1982年以来，全国许多大学（特别是重点大学）招收研究生的近4500道试题中，按照不同类型和不同解题方法（兼顾到命题的份量轻重），精选了300余道题作为例子，给予详细解答；并在适当的地方，对问题类型、解题思路和方法进行了归纳与小结；例题之后，附了一些供读者实践的练习题，并给出了必要的提示或参考的答案。

鉴于微积分中一系列中值定理与曲线、曲面积分的难度较大，且在研究生考题中占有不可忽视的地位，我们将这两部分内容另立章节（第三章与第六章），给予足够重视。全书共分九章，它们是函数、极限、连续性、微分法、微积分基本定理、不定积分、定积分、重积分、常微分方程、曲线积分、曲面积分、无穷级数、线性代数和概率论。

本书所选题目，内容充实，形式多样，既包括体现高等数学课程要求并有一定难度的基本题，又包括一些难度较大，技巧性较强的综合题。在充分注意题目典型性的同时，还选了少量富于启发、耐人寻味的题目。我们希望，本书能帮助读者用不太长的时间，花费不很多的精力，对所学过的高等数学课程起到复习、巩固、提高的作用，并能了解目前国内研究生入学考试中命题的某些特点和动向。

本书是集体选编的。多年来，编者一直担负着为准备报考研究生的高年级大学生和青年教师辅导数学的任务，在教学中积累的一些经验已基本上反映在本书中。希望本书的出版对有志于报

考研究生的同志能有所裨益。本书编写分工如下：第一章，李崇礼；第二章§1，张思贤，§2，戴士元、张思贤；第三章，孙福兴；第四章，戴士元；第五章，王振中；第六章，黄泽民；第七章，王志成；第八章，孟发恒；第九章，李耀林。

限于水平，加之时间仓卒，不妥甚至错误之处恐还难免，敬请读者指正。

编者于西安

目　录

第一章　函数、极限、连续性

§1　函　　数

例 1　已知　$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots\cdots f(x)]\}}_{n\text{个}f}$，求$f_n(x)$。（南京邮电学院、兰州铁道学院）

解　由已知$f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，可得

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

下面用数学归纳法证明：$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$。

已知$n=1$时等式成立，设$n=K$时等式成立，即$f_K(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+Kx^2}}$，则当$n=K+1$时，

$$f_{K+1}(x)=f[f_K(x)]=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+Kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+Kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(K+1)x^2}},$$

等式仍成立，故对任何自然数n等式成立。

例 2 已知 $f\left(x+y,\ \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求$f(x,y)$。（哈尔滨工业大学、大连轻工业学院）

解 设 $u=x+y$，$v=\frac{y}{x}$，解出 x 和 y 得 $x=\frac{u}{1+v}$，$y=\frac{uv}{1+v}$，因而有

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v},$$

所以 $$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}。$$

例 3 设$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$，试求$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f\{f[g(x)]\}$，$f\{g[f(x)]\}$。（北京工业大学）

解 已知$g(x+1)=x^2+x+1$，设$u=x+1$，得$x=u-1$，因而有$g(u)=(u-1)^2+u-1+1=u^2-u+1$，把等式两边的$u$换成$x$就得

$$g(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$(-\infty,+\infty)。$$

由 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 可知 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)<0,\\ g(x), & g(x)\geqslant 0,\end{cases}$

得 $f[g(x)]=g(x)=x^2-x+1$，$(-\infty,+\infty)$；

$$g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1 & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0;\end{cases}$$

$$f\{f[g(x)]\}=\begin{cases}0 & f[g(x)]<0\\ f[g(x)] & f[g(x)]\geqslant 0,\end{cases}$$

因为 $f[g(x)]=x^2-x+1>0$，

所以 $f\{f[g(x)]\}=f[g(x)]=x^2-x+1$，$(-\infty,+\infty)$；

$$f\{g[f(x)]\}=\begin{cases}0, & g[f(x)]<0\\ g[f(x)], & g[f(x)]\geqslant 0,\end{cases}$$

因为 $g[f(x)]>0$，$(-\infty, +\infty)$，

所以 $f\{g[f(x)]\}=g[f(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0。\end{cases}$

练习

1.设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(f(x))]\}=x$，并求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ $(x\neq 0,\ x\neq 1)$。（华中工学院）

2.若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知当 $y=1$ 时，有 $z=x$。试求函数 $f(x)$的分析表达式及 z 的分析表达式。（北京工业大学）

3.设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当x<0,\\ 1, & 当x\geqslant 0。\end{cases}$

求 $f[f(x)]$。（同济大学）

答案 1. $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=1-x$。 2. $f(x)=x^3+3x^2+3x$；

$z=\sqrt{y}+x-1$。 3. $f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & 当x<-1,\\ 1, & 当x\geqslant -1。\end{cases}$

例 4 已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$的定义域及 $f[f(-7)]$。（中国人民大学）

解 由 $\dfrac{1}{\lg(3-x)}$ 得 $3-x>0$ 及 $3-x\neq 1$；又由 $\sqrt{49-x^2}$ 得 $-7\leqslant x\leqslant 7$，故 $f(x)$的定义域为满足下列不等式组的点集：

$$\begin{cases}3-x>0,\\ 3-x\neq 1,\\ -7\leqslant x\leqslant 7。\end{cases}\quad 解得 \quad -7\leqslant x<2 \quad 及 \quad 2<x<3。$$

因为
$$f(-7)=\frac{1}{\lg 10}+0=1,$$

所以
$$f[f(-7)]=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}。$$

例 5 确定函数 $W=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arccos(1-y)$的定义域，并绘出定义域的草图。（重庆建筑工程学院）

解 由函数 $\arcsin\frac{x}{y^2}$ 得，$y\neq 0$ 且 $\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1$；又由函数 $\arccos(1-y)$ 得 $|1-y|\leqslant 1$；故所求的函数定义域为满足下列不等式组的点集：

$$\begin{cases} y\neq 0, \\ \left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1, \\ |1-y|\leqslant 1, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -y^2\leqslant x\leqslant y^2, \\ 0<y\leqslant 2。\end{cases}$$

由此可知，定义域为由抛物线 $x=-y^2$，$x=y^2$ 及直线 $y=2$ 所围成的平面区域（除去(0, 0)点），其图略。

练习

1.求 $z=\arcsin(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$ 的定义域。（西安交通大学）

答案

1. $\begin{cases} \frac{x^2}{3^2}+\frac{4y^2}{3^2}<1, \\ y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1。\end{cases}$

§2 极 限

例 1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+x^2}-x}$。（上海工业大学）

解 因为

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+x^2}-x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x)}{(\sqrt[4]{x^4+x^2}-x)(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\frac{2(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x)}{(\sqrt{x^4+x^2}-x^2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\frac{2(\sqrt[4]{x^4+x^2}+x)(\sqrt{x^4+x^2}+x^2)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

所以

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=4。$$

例 2 求 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots\cdots+n}$。（长春光学精密机械学院）

解 由 $$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\text{ 及}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

可得 $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots\cdots+n}=2\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N(N+1)}\right]=2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right]=2\left(1-\frac{1}{N+1}\right),$$

所以 $$原式=\lim_{N\to\infty}2\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=2。$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots\sqrt{3}}}}_{n\text{个根号}}$。（中国科学院）

解 事实上，对于一般的常数 $a>0$，有

$$\sqrt{a\sqrt{a\cdots\cdots\sqrt{a}}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots a^{\frac{1}{2^n}}$$

$$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=a^{\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}}=a^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}。$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a\sqrt{a\cdots\cdots\sqrt{a}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} a^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=a,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots\sqrt{3}}}=3。$$

练习

1.求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$。（北京钢铁学院、北京师范学院）

2.求数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[2]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2})$。（华南工学院）

3.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)+\left(\alpha+\frac{2\beta}{n}\right)+\cdots\cdots\right.$

$\left.+\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{n}\right)\right]$。（上海机械学院）

4.求$\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$。（北方交通大学）

答案 1.$\frac{1}{3}$。2.2。3.$\alpha+\frac{\beta}{2}$。4.$\frac{\pi}{6}$。

例 4 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right]$。（西安交通大学）

解 当$x\to 0$时，$\sin x$与x、e^x-1与x是等价无穷小，利用等价无穷小代换及无穷小的性质得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0;$$

又

$$\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}=\left(1+\frac{1-x-e^x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1-x-e^x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}\right]^{\frac{1-x-e^x}{\sin x}\cdot\frac{1}{2+x}},$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1-x-e^x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{\sin x}\right)-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$$

$$=-1-1=-2,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}=e^{\frac{1}{2}(-2)}=e^{-1};$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right]=0+e^{-1}=e^{-1}。$$

常用的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$ 等。选取适当的等价无穷小作代换，可使极限运算简化。

例 5 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}$（$n$ 为正整数）；

（2）$\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdots\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}$（$n$ 为正整数）。

（南京工学院）

解 （1）当 $\varphi\to 0$ 时，因为

$$1-\sqrt[n]{\cos n\varphi}=1-\sqrt[n]{1+(\cos n\varphi-1)}\sim\frac{1-\cos n\varphi}{n}$$

$$\sim\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}(n\varphi)^2=\frac{n}{2}\varphi^2,$$

所以 $$\lim_{\varphi\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{n}{2}\varphi^2}{\varphi^2}=\frac{n}{2}。$$

（2）$1-\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\cdots\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}$

$$=(1-\cos\varphi)\sqrt{\cos 2\varphi}\cdots\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}+(1-\sqrt{\cos 2\varphi})$$

$$\times\sqrt[3]{\cos n\varphi}\cdots\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}+\cdots\cdots+(1-\sqrt[n]{\cos n\varphi})$$

由(1)的结果得:

$$原式=\lim_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\cdots\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}$$

$$+\lim_{\varphi\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2\varphi}}{\varphi^2}\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\cdots\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}$$

$$+\cdots\cdots+\lim_{\varphi\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)。$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{tg}x}}{x-\operatorname{tg}x}$。(武汉工学院)

解 $\frac{e^x-e^{\operatorname{tg}x}}{x-\operatorname{tg}x}=e^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{e^{x-\operatorname{tg}x}-1}{x-\operatorname{tg}x}\right)$,

因为 $x\to 0$时,$x-\operatorname{tg}x$是无穷小,$e^{x-\operatorname{tg}x}-1\sim x-\operatorname{tg}x$,

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{tg}x}}{x-\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}e^{\operatorname{tg}x}=1。$$

练习

1.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$。(湖南大学)

2.计算$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$($x\neq 0$, x是实数,n为自然数)。(西南石油学院)

答案 1. 1。 2. $\frac{\sin x}{x}$。

上面例5与例6属于$\frac{0}{0}$型的未定式,处理未定式极限 的有效方法是利用罗必塔法则。

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$。(天津大学)

解 根据重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,可知

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$，故所求极限是$\frac{0}{0}$型未定式。利用罗必塔法则得：

$$原式=-\lim_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{2}{x}}]'=-\lim_{x\to 0}[e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}]'$$

$$=-\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}\frac{2\left[\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right]}{x^2}$$

$$=-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}$$

$$=-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=e^2。$$

练习

1.求$\lim\limits_{x\to\infty} n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right]$。（哈尔滨工业大学）

2.求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$。（武汉钢铁学院）

答案 1.$\frac{e}{2}$。 2.$e^{-\frac{1}{2}}$。

例 8 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$。（东北工学院，华南工学院，西北轻工业学院，武汉地质学院）

解 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{2t^2}dt=+\infty$，所以，所求的极限是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式。

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0。$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$。（西安冶金建筑学院，太原重型机械学院，南京工学院）

解 显然本题极限是$\frac{0}{0}$型未定式。使用罗必塔法则，并利用无穷小代换（$x\to0$时$\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$）有

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\sec^2x\sqrt{\sin(\operatorname{tg}x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg}x)}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}}=1。$$

例 10 设$f'(x)$连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq0$，求

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}。\text{（同济大学）}$$

解 显然，所求的极限是$\frac{0}{0}$型未定式，可以用罗必塔法则，但是，题设只是$f'(x)$连续，并未提及$f''(x)$连续，所以最多只能连续使用罗必塔法则两次。